Лекция: Конечные автоматы с выходом (КАВ). Автоматные функции, способы их задания. Теорема о преобразовании периодических последовательностей автоматными функциями.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по “Дискретной математике”-2.
1-й курс, группа 141,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Определение конечного автомата с выходом

Конечным автоматом с выходом (КАВ) (**автоматом-преобразователем**) называется

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1),$$

где

$A = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad n \geq 1,$	– входной алфавит;
$B = \{b_1, \dots, b_m\}, \quad m \geq 1,$	– выходной алфавит;
$Q = \{q_1, \dots, q_r\}, \quad r \geq 1,$	– множество состояний;
$\varphi : A \times Q \to B$	– функция выходов;
$\psi : A \times Q \to Q$	– функция переходов;
$q_1 \in Q$	– начальное состояние.

Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):

Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):

Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):

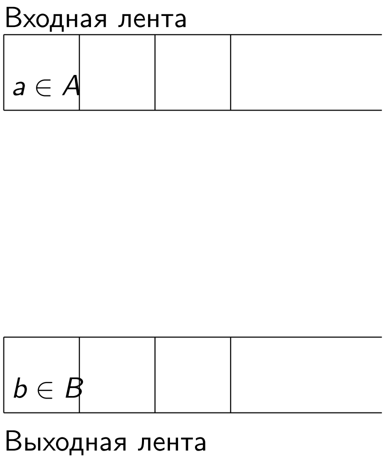
Входная лента

Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):

Содержательное понимание КАВ

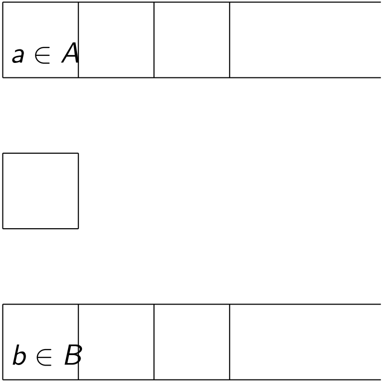
Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):



Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):

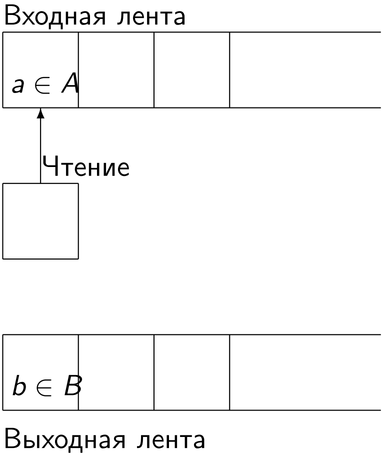
Входная лента



Выходная лента

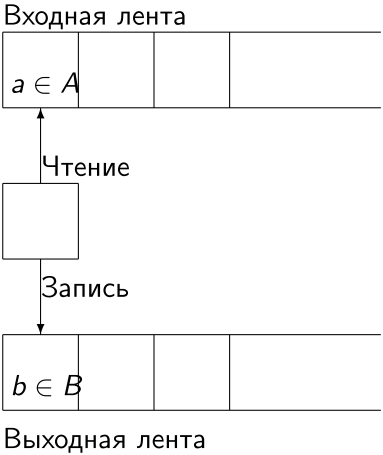
Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):



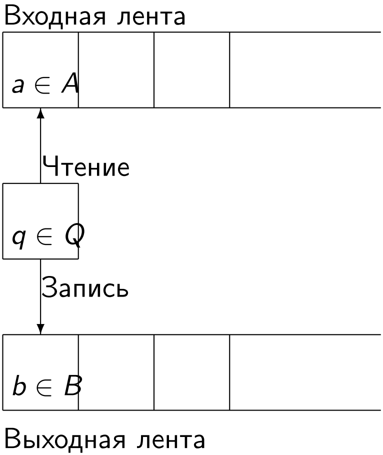
Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):



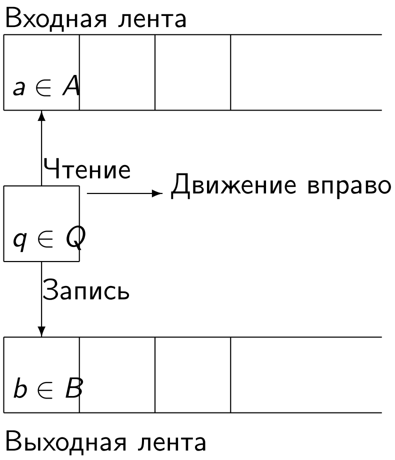
Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):



Содержательное понимание КАВ

Содержательно КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (преобразователя):



Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

a_{i_1}	a_{i_2}	a_{i_3}	$\ldots$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$

a_{i_1}	a_{i_2}	a_{i_3}	$\ldots$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$

a_{i_1}	a_{i_2}	a_{i_3}	$\ldots$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$

a_{i_1}	a_{i_2}	a_{i_3}	$\ldots$

q_1

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$

a_{i_1}	a_{i_2}	a_{i_3}	$\dots$

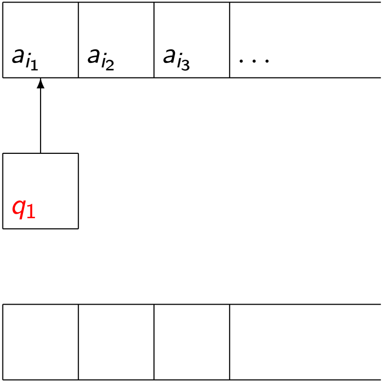
$\mathbf{t = 1}$

q_1

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



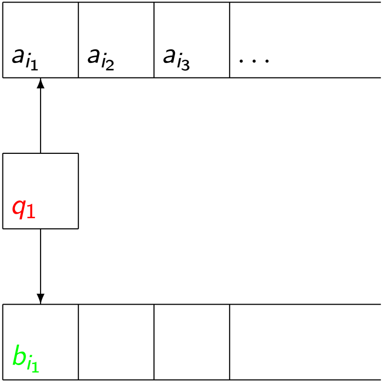
$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



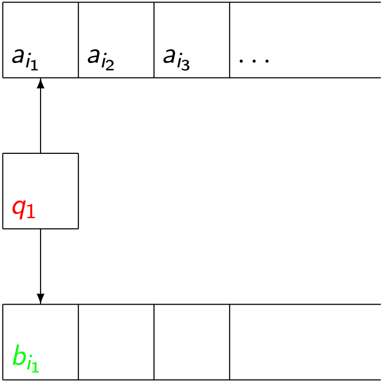
$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

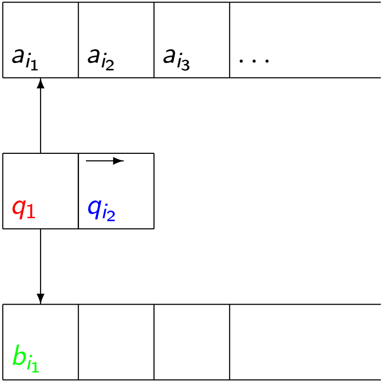
$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

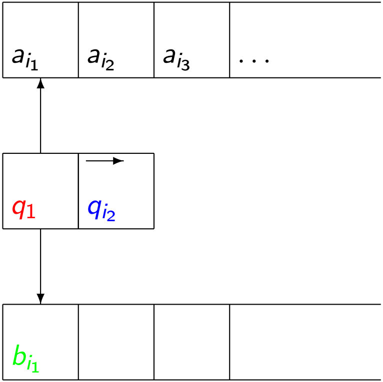
$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

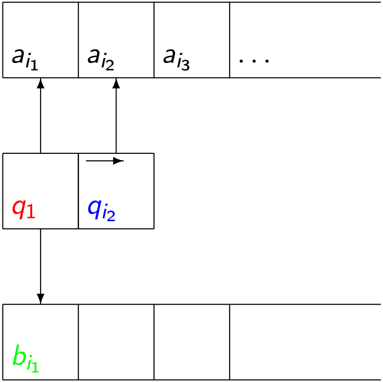
$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

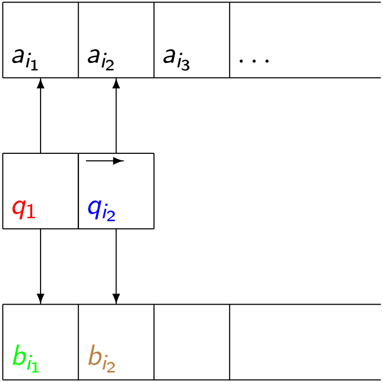
$\mathbf{t = 2}$

$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2})$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

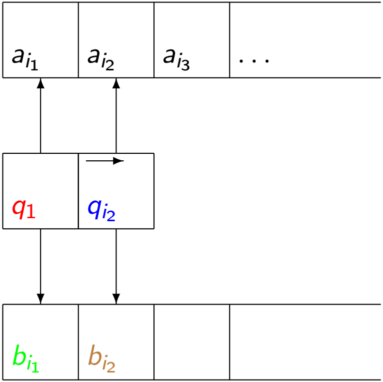
$\mathbf{t = 2}$

$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2})$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

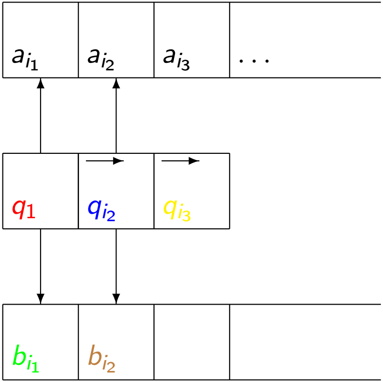
$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2})$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

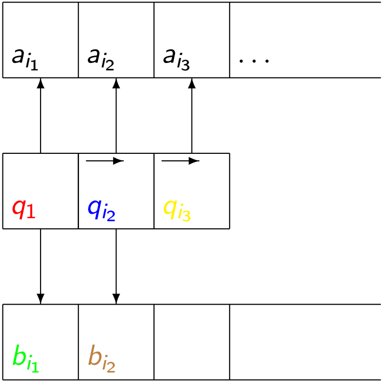
$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2})$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

Функционирование конечного автомата с выходом

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$:

На входной ленте – $a^\infty \in A^\infty$



$\mathbf{t = 1}$

$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q_1)$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2})$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

И т.д.

Отображение, осуществляемое КАВ

В результате работы конечного автомата $\mathcal{A}$ бесконечная последовательность $a^\infty \in A^\infty$ (конечная последовательность длины l a^l) преобразуется в бесконечную последовательность $b^\infty \in B^\infty$ (конечную последовательность длины l b^l).

Т.е. конечный автомат $\mathcal{A}$ определяет некоторую (словарную) функцию

$$f_{\mathcal{A}} : A^\infty \to B^\infty,$$

которую будем называть **отображением, осуществляемым конечным автоматом** $\mathcal{A}$.

Отображение, осуществляемое КАВ

Конечный автомат с выходом $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ **определяет функцию** $f_{\mathcal{A}} : A^\infty \to B^\infty$,
такую, что для каждой бесконечной последовательности

$$x^\infty = x(1)x(2)\dots x(t)\dots$$

соответствующая ей выходная последовательность

$$f(x^\infty) = y^\infty = y(1)y(2)\dots y(t)\dots$$

построена по правилам:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)); \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)); \\ q(0) = q_1. \end{cases}$$

Эта система правил называется **каноническими уравнениями** автомата $\mathcal{A}$.

Автоматные функции

Функция

$$f : A^\infty \to B^\infty$$

называется **автоматной**, если найдется такой конечный автомат

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1),$$

что $f_\mathcal{A} = f$.

Канонические уравнения

Рассмотрим способы задания конечных автоматов и соответствующих автоматных функций.

1. Канонические уравнения
Конечный автомат с выходом $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$
(и автоматную функцию $f_{\mathcal{A}} : A^\infty \to B^\infty$)
можно задавать **каноническими уравнениями**

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)); \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)); \\ q(0) = q_1. \end{cases}$$

Диаграмма Мура

2. Диаграмма Мура

Диаграммой Мура конечного автомата с выходом $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ (и автоматной функции $f_{\mathcal{A}} : A^{\infty} \to B^{\infty}$) называется ориентированный граф с пометками

$$D_{\mathcal{A}} = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}}),$$

где

$V_{\mathcal{A}} = Q$;

$E_{\mathcal{A}} = \{(q, \psi(a, q)) \mid a \in A, q \in Q\}$;

причем

дуге $(q, \psi(a, q)) \in E$ приписана пометка $a(\varphi(a, q))$;

вершина $q_1 \in V$ помечена „звездочкой“ $*$.

Функция единичной задержки

Пусть $A = B = \{0, 1\}$.
Рассмотрим такую функцию $f : A^\infty \to B^\infty$, что для каждой входной последовательности

$$x^\infty = x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots$$

соответствующая ей выходная последовательность имеет вид

$$f(x^\infty) = y^\infty = 0x(1)x(2)\dots x(t-1)\dots.$$

Такая функция f называется **функцией единичной задержки**.

Содержательно, она задерживает элемент входной последовательности на один такт работы и затем записывает его в выходную последовательность. На первом такте работы она выдает 0.

Докажем, что функция f – автоматная.

Функция единичной задержки

Функция f осуществляется конечным автоматом

$$\mathcal{A} = (A, B, Q = \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_1 = 0),$$

где состояние $q = 0$ означает „в предыдущий момент времени на входе был 0“; состояние $q = 1$ означает „в предыдущий момент времени на входе была 1“.
Находим таблицы функций φ и ψ, а также канонические уравнения:

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1); \\ q(t) = x(t); \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Так как в первый момент времени всегда выдается 0, состояние $q = 0$ – начальное.

Диаграмма Мура функции единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции f.

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и $q_1 = 0$

Диаграмма Мура функции единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции f.

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и $q_1 = 0$

Диаграмма Мура функции единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции f.

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и $q_1 = 0$

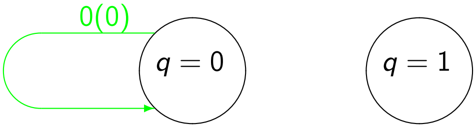


Диаграмма Мура функции единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции f.

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и $q_1 = 0$

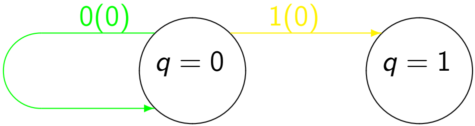


Диаграмма Мура функции единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции f.

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и $q_1 = 0$

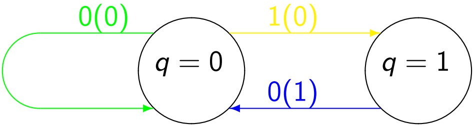


Диаграмма Мура функции единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции f.

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и $q_1 = 0$

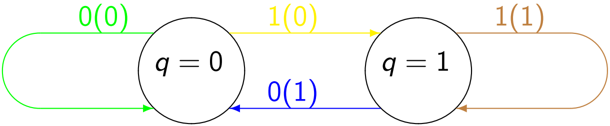
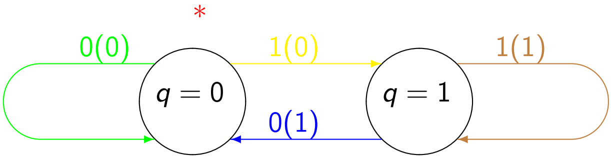


Диаграмма Мура функции единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции f.

$a \in A$	$q \in Q$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

и $q_1 = 0$



Пример

Пример 1. Пусть $A = B = \{0, 1\}$.
Рассмотрим такую функцию $g : A^\infty \to B^\infty$, что для каждой входной последовательности

$$x^\infty = x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots$$

соответствующая ей выходная последовательность

$$g(x^\infty) = y^\infty = y(1)y(2)\dots y(t)\dots$$

имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Докажем, что функция g – автоматная.

Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

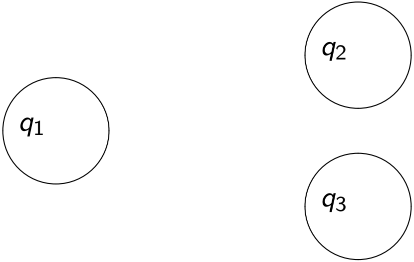
Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

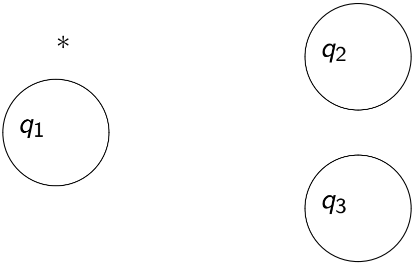


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

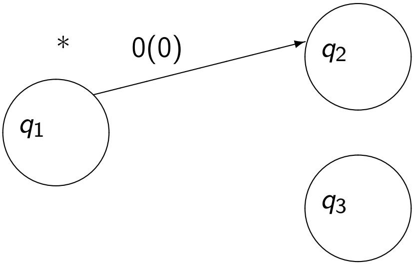


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

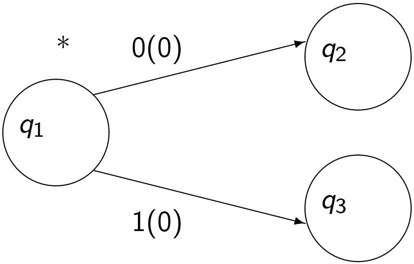


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

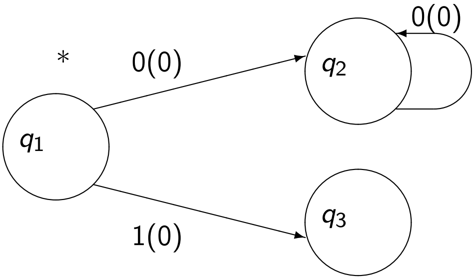


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

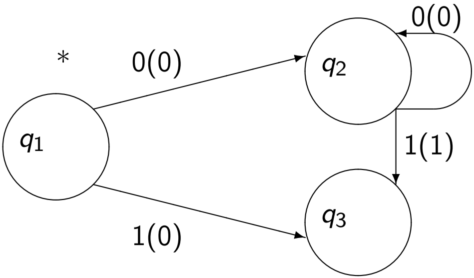


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

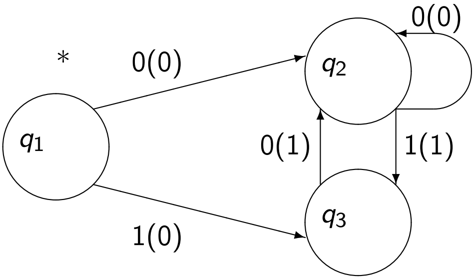


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

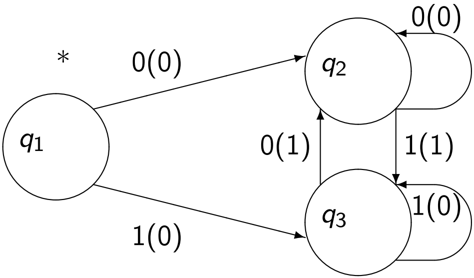


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.

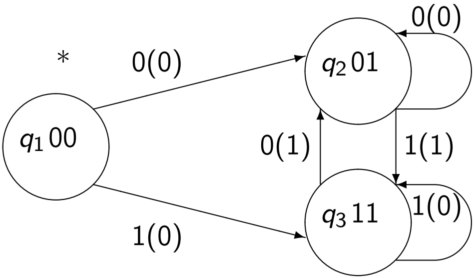


Пример

Для доказательства построим диаграмму Мура функции g.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1; \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: q_1 – момент времени $t = 1$, q_2 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 0$ и q_3 – момент времени $t \geq 2$ и $x(t-1) = 1$.



Пример

Найдем канонические уравнения для функции g.

$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

$$\begin{cases} y(t) = q_2(t-1)(q_1(t-1) \oplus x(t)); \\ q_1(t) = x(t); \\ q_2(t) = 1; \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Периодические последовательности

Последовательность

$$a^\infty = a(1)a(2)\dots a(t)\dots \in A^\infty$$

называется **периодической** с **периодом** T и **предпериодом** T_0, если для всех $t > T_0$ верно

$$a(t+T) = a(t).$$

Периодическая последовательность имеет вид

$$a^\infty = a_{j_1}\dots a_{j_{T_0}} a_{i_1}\dots a_{i_T} a_{i_1}\dots a_{i_T}\dots = a_{j_1}\dots a_{j_{T_0}}(a_{i_1}\dots a_{i_T})^\infty,$$

где $\alpha_0 = a_{j_1}\dots a_{j_{T_0}} \in A^*$ – предпериод, $\alpha = a_{i_1}\dots a_{i_T} \in A^*$ – период, $a_{j_1},\dots,a_{j_{T_0}}, a_{i_1},\dots,a_{i_T} \in A$.

Теорема о периодических последовательностях

Теорема 1. *Пусть $f : A^\infty \to B^\infty$ – автоматная функция, задаваемая конечным инициальным автоматом*

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$$

с r состояниями ($|Q| = r$).
Тогда если

$$a^\infty = a(1)a(2)\dots a(t)\dots \in A^\infty$$

периодическая последовательность с периодом T, то соответствующая ей выходная последовательность

$$f(a^\infty) = b^\infty = b(1)b(2)\dots b(t)\dots \in B^\infty$$

тоже периодическая последовательность с периодом $T' \le r \cdot T$.

Теорема о периодических последовательностях

Доказательство. Пусть предпериод периодической последовательности $a^\infty \in A^\infty$ равен T_0.
Рассмотрим следующие $(r+1)$ совпадающие значения этой последовательности

$$a(T_0+1) = a(T_0+1+T) = a(T_0+1+2T) = \cdots = a(T_0+1+r \cdot T).$$

Пусть при считывании этих значений конечный автомат $\mathcal{A}$ находился соответственно в состояниях

$$q^{(0)},\ q^{(1)},\ q^{(2)},\ \ldots,\ q^{(r)} \in Q.$$

Но в множестве Q всего r различных элементов.
Следовательно, найдутся такие номера i и j, где $i < j$, что

$$q^{(i)} = q^{(j)}.$$

Теорема о периодических последовательностях

Доказательство (продолжение). Значит, при $t = T_0 + 1 + i \cdot T$ и при $t = T_0 + 1 + j \cdot T$ конечный автомат $\mathcal{A}$ будет считывать один и тот же символ

$$a(T_0 + 1 + i \cdot T) = a(T_0 + 1 + j \cdot T) \in A,$$

находиться в одном и том же состоянии

$$q^{(i)} = q^{(j)} = q \in Q,$$

и, более того, бесконечные (входные) последовательности, которые автомат $\mathcal{A}$ прочитает, начиная с этих двух элементов $a(T_0 + 1 + i \cdot T)$ и $a(T_0 + 1 + j \cdot T)$ и из состояния q, будут совпадать.
Отсюда, соответствующие (бесконечные) выходные последовательности для них также будут совпадать.

Теорема о периодических последовательностях

Доказательство (продолжение). Значит, конечная последовательность

$$\beta = b(T_0+1+i\cdot T)b(T_0+1+i\cdot T+1)\dots b((T_0+1+j\cdot T)-1) \in B^*$$

является периодом выходной последовательности b^∞, соответствующей входной последовательности a^∞. Период этой последовательности b^∞ равен

$$T' = (j-i)\cdot T \leq r\cdot T.$$

$\square$

Примеры

Пример 2.
1. Пусть $A = B = \{0, 1, \ldots, 9\}$.
Рассмотрим функцию $f : A^\infty \to B^\infty$, которая преобразует входную последовательность

$$x^\infty = x(1)x(2)x(3)\ldots x(t)\ldots$$

в выходную последовательность

$$f(x^\infty) = y^\infty = y(1)y(2)\ldots y(t)\ldots$$

по правилу:

$$y(t) = t\text{-я цифра после запятой в числе } \pi.$$

Примеры

Т.е.

$$y(1) = 1,\; y(2) = 4,\; y(3) = 1,\; y(4) = 5, \ldots .$$

Докажем, что f не является автоматной функцией.
Предположим противное: пусть функция f – автоматная.
Рассмотрим периодическую входную последовательность $a^\infty = (0)^\infty \in A^\infty$ периода $T = 1$.
Тогда по теореме 3 соответствующая ей выходная последовательность $f(a^\infty) = b^\infty \in B^\infty$ также обязана быть периодической. Приходим к противоречию, т.к. число π иррационально и задается непериодической десятичной дробью.
Следовательно, функция f не является автоматной.

Примеры

2. Пусть $A = B = \{0, 1\}$.
Рассмотрим функцию $g : A^\infty \to B^\infty$, которая входную последовательность

$$x^\infty = x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots$$

преобразует в выходную последовательность

$$g(x^\infty) = y^\infty = y(1)y(2)\dots y(t)\dots$$

по правилу:

$$y(t) = t\text{-я цифра после запятой двоичной записи числа } \tfrac{2}{5}.$$

Докажем, что g – автоматная функция.

Примеры

Заметим, что

$$\frac{2}{5} = \frac{(10)_2}{(101)_2} = 0,(0110)^{\infty}.$$

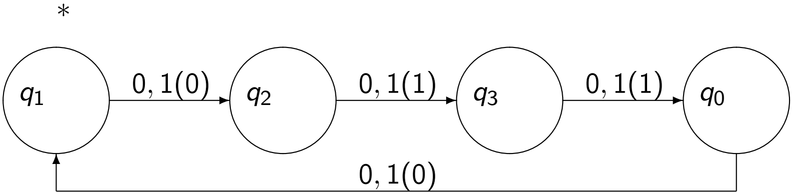
Построим диаграмму Мура функции g. Введем состояния $q_i = t \bmod 4$, где $i = 1, 2, 3, 0$.

Примеры

Заметим, что

$$\frac{2}{5} = \frac{(10)_2}{(101)_2} = 0,(0110)^{\infty}.$$

Построим диаграмму Мура функции g. Введем состояния $q_i = t \bmod 4$, где $i = 1, 2, 3, 0$. Тогда



Мы построили диаграмму Мура для функции g. Значит, g – автоматная функция.

Задачи для самостоятельного решения

1. Является ли функция $f(x(1)x(2)\dots) = y(1)y(2)\dots$ автоматной, если
1) $y(t)$ – t-я цифра после запятой в двоичной записи числа $\sqrt{2}$;
2) $y(t)$ – $(t+1)$-я цифра после запятой в двоичной записи числа $\frac{2}{3}\cdot x(t)$?

2. Построить диаграмму Мура автоматной функции, заданной каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = x(t)\cdot q_1(t-1)\cdot q_2(t-1); \\ q_1(t) = \bar{x}(t); \\ q_2(t) = x(t)\cdot q_1(t-1); \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

2. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: МАКС Пресс, 2004. Стр. 66-67.

3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Конец лекции