

Курс «Основы кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Системное программирование и компьютерные науки»

1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 – «Прикладная математика и информатика». При этом объём и, в некоторой степени, программа курса варьируются в зависимости от профиля. Для бакалавров 3 курса профиля «Системное программирование и компьютерные науки» (320–328 группы) курс «Основы кибернетики» читается в 6 семестре в объёме 48 часов лекций, сопровождаемых 16 часами семинарских занятий. Курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

В разделах 2-7 данного описания приводится подробная информация о содержании курса, программах и планах его изучения в 2024–2025 уч. году, методических материалах, а в разделах 8 и 9 – об особенностях организации учебного процесса, формах и сроках проведения контрольных мероприятий.

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики; лектор 2024–2025 уч. года – профессор Романов Д.С. (romanov@cs.msu.ru).

2. Аннотация

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С.В. Яблонский, читается на факультете ВМК с первых лет его существования. Он является продолжением курса «Дискретная математика» и посвящён изложению основных моделей, методов и результатов математической кибернетики, связанных с теорией дискретных управляющих систем (УС), с задачей схемной или структурной реализации дискретных функций и алгоритмов. Методическая, и, частично, содержательная концепции данного варианта курса разработаны профессором С.А. Ложкиным, который читал его для студентов программистских кафедр около 35 лет.

В курсе «Основы кибернетики» рассматриваются различные классы УС (классы схем), представляющие собой дискретные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Для базовых классов УС (схем из функциональных элементов, формул, контактных схем, автоматных схем), а также некоторых других типов УС, ставятся и изучаются основные задачи теории УС: задача минимизации дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), задача эквивалентных преобразований и структурного моделирования УС, задача синтеза УС, задача повышения надёжности и контроля УС из ненадёжных элементов и др. Рассматриваются также некоторые вопросы сложности алгоритмов. В программу курса входят классические результаты К. Шеннона, С.В. Яблонского, Ю.И. Журавлева и О.Б. Лупанова, а также некоторые результаты последних лет, полученные С.А. Ложкиным. Показывается возможность практического применения этих результатов на примере задачи проектирования СБИС, которые составляют основу программно-аппаратной реализации алгоритмов.

3. Программа

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи

Единичный куб и функции алгебры логики (ФАЛ), представление ФАЛ с помощью ДНФ. Сокращённая ДНФ и тупиковые ДНФ, их «геометрический» смысл. Способы построения однозначно получаемых ДНФ (сокращённой, пересечения тупиковых, Квайна, суммы тупиковых). Особенности ДНФ для ФАЛ из некоторых классов. Функция покрытия и алгоритм построения всех тупиковых ДНФ, оценка длины градиентного покрытия. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ, оценки максимальных и типичных значений некоторых параметров ДНФ.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

Различные классы УС (классы схем) как структурные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Основные классы УС – формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ), контактные схемы (КС), – их структура, меры сложности, функционирование, эквивалентность, полнота. Оценка числа схем различных типов.

Понятие подсхемы и принцип эквивалентной замены. Тождества и связанные с ними эквивалентные преобразования УС. Построение полных систем тождеств для формул и СФЭ, представление об эквивалентных преобразованиях КС.

III. Синтез и сложность управляющих систем

Задача синтеза УС, сложность ФАЛ и функция Шеннона. Простейшие методы синтеза схем, реализация некоторых ФАЛ и оценка их сложности. Операция суперпозиции схем и её корректность, лемма Шеннона. Метод каскадов для КС и СФЭ, метод Шеннона. Мощностные методы получения нижних оценок для функций Шеннона. Асимптотически наилучшие методы синтеза формул, СФЭ и КС. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов и индивидуальных ФАЛ.

IV. Надёжность и контроль управляющих систем

Самокорректирующиеся КС и простейшие методы их синтеза. Асимптотически наилучшие методы синтеза КС, корректирующих один обрыв или одно замыкание.

Задача контроля УС, тесты для таблиц. Алгоритм построения всех тупиковых тестов, оценки максимального и типичного значений длины диагностического теста.

V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов и классы схем, связанные с их программно-аппаратной реализацией

Доказательство теоремы Кука–Левина, примеры NP-полных проблем, связанных с графами.

Некоторые модификации основных классов схем, связанные с программной реализацией ФАЛ. Автоматные функции, их реализация схемами из функциональных элементов и элементов задержки, схемы с «мгновенными» обратными связями. Схемы на КМОП-транзисторах, задача логического и «физического» синтеза СБИС, основные этапы её решения.

4. Список вопросов к экзамену по курсу «Основы кибернетики» (весенний семестр 2024–2025 уч. года; 320-328 группы).

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ. См. [1:гл.1, §§2,5].
2. Сокращённая ДНФ и способы её построения [1:гл.1, §3].
3. Тупиковая ДНФ, ядро и ДНФ пересечения тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в тупиковые ДНФ и его локальность. См. [1:гл.1, §4].
4. Особенности ДНФ линейных и монотонных ФАЛ. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ. См. [1:гл.1, §§5,6].
5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о «протыкающих» наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ. См. [1:гл.1, §6].
6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функции Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ [1:гл.1, §7].
7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров [1:гл.1, §§1,3,7]. Теорема Ю.И. Журавлёва о ДНФ сумма минимальных [1:гл.1, §5].

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

8. Формулы алгебры логики, их эквивалентные преобразования с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. См. [1:гл.3, §2].
9. Задание формул с помощью деревьев, функционалы их сложности и соотношения между ними. Оптимизация подобных формул по глубине. См. [1:гл.2, §2].
10. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Изоморфизм и эквивалентность схем, функционалы их сложности, операции приведения. Верхние оценки числа формул и СФЭ в базисе B_0 . См. [1:гл.2, §3].
11. Контактные схемы (КС) и π -схемы, их изоморфизм, эквивалентность, сложность, операции приведения. Структурное моделирование некоторых формул и π -схем. Оценки числа КС и числа π -схем. Особенности функционирования многополюсных КС. См. [1:гл.2, §§5,6].
12. Эквивалентные преобразования СФЭ и моделирование с их помощью формульных преобразований. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода. См. [1:гл.3, §§1,3].
13. Эквивалентные преобразования КС. Основные тождества, вывод вспомогательных (дополнительных) и обобщенных тождеств. См. [1:гл.3, §4].
14. Полнота системы основных тождеств. Отсутствие конечной полной системы тождеств в классе всех КС. См. [1:гл.3, §5].

III. Синтез и сложность управляющих систем

15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций. См. [1:гл.4, §1].
16. Простые нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем. См. [1:гл.4, §2], [6:§7].
17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные КС и лемма Шеннона. См. [1:гл.2, §§6,7].
18. Каскадные КС и СФЭ. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона. См. [1:гл.4, §3].
19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для ФАЛ из специальных классов [1:гл.4, §4].

20. Дизъюнктивно-универсальные множества ФАЛ. Асимптотически наилучший метод О.Б. Лупанова для синтеза СФЭ в базисе B_0 . См. [1:гл.4,§5].
21. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование ФАЛ переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе B_0 . См. [1:гл.4,§6].
22. Асимптотически наилучший метод синтеза КС. См. [1:гл.4, §7,5].

IV. Надёжность и контроль управляющих систем

23. Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста. См. [1:гл.1,§8].
24. Самокорректирующиеся КС и методы их построения. Асимптотически наилучший метод синтеза КС, корректирующих 1 обрыв (1 замыкание). См. [4:§7], [2: ч. III, р. 2, §1].

V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов и классы схем, связанные с их программно-аппаратной реализацией

25. Формулировка теоремы Кука–Левина и доказательство первой части теоремы.
26. Формулировка теоремы Кука–Левина и доказательство второй части теоремы.
27. Примеры NP-полных проблем: 3-выполнимость КНФ, (0,1)-целочисленное линейное программирование, клика, вершинное покрытие, покрытие множества.

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи на ДНФ

1. По заданной ФАЛ построить её сокращённую ДНФ, ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых, все тупиковые ДНФ.

II. Задачи на структурное моделирование и эквивалентные преобразования

2. По заданной формуле с поднятыми отрицаниями построить моделирующую её π -схему и обратно.
3. По заданным эквивалентным формулам или КС построить эквивалентное преобразование, переводящее их друг в друга с помощью основных тождеств.

III. Задачи на синтез схем

4. По данной каскадной КС построить инверсную каскадную КС.
5. По заданной ФАЛ с помощью простейших методов, метода каскадов или метода Шеннона построить реализующую её СФЭ или КС.
6. Оценить сверху и снизу сложность конкретной ФАЛ или сложность самой сложной ФАЛ из заданного множества в заданном классе схем.

IV. Задачи на самокоррекцию и тесты.

7. По заданной КС построить эквивалентную ей самокорректирующуюся КС.
8. По заданной таблице или КС и списку её неисправностей построить все тупиковые проверяющие (диагностические) тесты.

6. Планы семинарских занятий

Общий план содержит 8 семинарских занятий.

Семинар 1

Представление ФАЛ с помощью ДНФ, импликанты и простые импликанты ФАЛ. Сокращённая ДНФ и методы её построения.

Теоретический материал [1: с. 27-35], [5: с. 47, 296-298].

В классе. Из [5]: гл. I – 2.3 (3); гл. IX – 2.1 (1,2), 2.5 (1,5), 2.6 (1,5), 2.3 (1,2), 2.2 (1,2), 2.9 (1,2).

На дом. Из [5]: гл. I – 2.3 (4); гл. IX – 2.1 (3), 2.5 (2,6), 2.6 (2,6), 2.2 (3,4), 2.3 (3,4), 2.9 (6).

Семинар 2

Ядро и ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых. Построение всех тупиковых ДНФ.

Теоретический материал [1: с. 38-43, 51-55], [5: с. 301-302].

В классе. Из [5, гл. IX]: 3.1 (1, 5), 3.3 (1, 2 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (3), 3.6 (1, 4, 7).

На дом. Из [5, гл. IX]: 3.1 (4, 6), 3.3 (3, 4 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (4), 3.6 (3, 6, 8).

Семинар 3

Эквивалентные преобразования формул.

Теоретический материал [1: с. 146-148, 156-161], [4: с. 19].

В классе. Из [4]: 3.1 (1), 3.3 (1, 4), 3.8 (1-3), 3.9 (1).

На дом. Из [4]: 3.1 (2), 3.3 (3, 6), 3.8 (5-9), 3.9 (2).

Семинар 4

Моделирование формул и π -схем. Эквивалентные преобразования КС.

Теоретический материал [1: с. 169-185].

В классе. Промоделировать π -схемой какую-нибудь формулу с поднятыми отрицаниями. Промоделировать формулой какую-нибудь π -схему. Из [4]: 4.1 (2, 4, 6–8), 4.3 (1).

На дом. Промоделировать π -схемой какую-нибудь формулу с поднятыми отрицаниями. Промоделировать формулой какую-нибудь π -схему. Из [4]: 4.1 (9–12), 4.3 (3).

Семинар 5

Сложность ФАЛ и методы синтеза схем на основе ДНФ.

Теоретический материал [1: с. 186-210].

В классе. Из [5: гл. X]: 1.1 (2, 3, 4, ФАЛ μ_1 – как в классе СФЭ, так и в классе КС, а также ФАЛ $(x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)x_4$ – в классе КС); 2.4 (1); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем.

На дом. Из [5: гл. X]: 1.1 (5-7), 2.4 (2); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем.

Семинар 6

Каскадные КС и СФЭ; метод каскадов для КС и СФЭ. Метод Шеннона.

Теоретический материал [1: с. 186-210].

В классе. Из [5: гл. X]: 2.13 (1, 7), 2.14 (1), 2.14 (5 – как КС, так и СФЭ) и т.п. Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

На дом. Из [5: гл. X]: 2.13 (2, 6), 2.14 (2), 2.14 (6 – как КС, так и СФЭ). Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

Семинар 7

Тесты для таблиц, тесты для контактных схем.

Теоретический материал: [1: с. 65-72, 51-55], [4: с.32-34, 37-38].

В классе. Из [4]: 5.1 (1, 2 – все тупиковые диагностические тесты), 5.1 (3 – все тупиковые проверяющие тесты), 6.2, 6.4, 6.11 (если хватит времени).

На дом. Из [4]: 5.1 (5 – все тупиковые диагностические тесты, 6 – все тупиковые проверяющие тесты), 6.3, 6.5, 6.14.

Семинар 8

Синтез схем для ФАЛ из специальных классов. Синтез самокорректирующихся КС.

Теоретический материал [1, с. 215-216, 222-224], [4: с. 49-50].

В классе. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ равных 1 при $x_1=1$ (КС), класса всех самодвойственных ФАЛ (СФЭ), класса всех ФАЛ симметричных по первым трём БП (КС). Из [4]: 7.9 (б), 7.10 (1), 7.13 (по книге [4] 2002 года: 7.7 (б), 7.8 (1), 7.11 (1)).

На дом. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ, равных 0 при $x_1=x_2=0$ (КС), класса, состоящего из всех тех ФАЛ, у которых любая подфункция от первых трёх БП линейна (СФЭ). Из [4]: 7.9 (в), 7.10 (2), 7.11 (а) (по книге [4] 2002 года: 7.7 (в), 7.8 (2), 7.9 (а)).

7. Литература

Основная:

1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. – М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу [http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(3-й_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)))
2. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. – М.: Высшая школа, 2007.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Алексеев В.Б., Вороненко А.А., Ложкин С.А., Романов Д.С., Сапоженко А.А., Селезнёва С.Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». – М.: МГУ, 2011.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Сапоженко А.А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. – М.: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ, 2001.

Дополнительная:

7. Алексеев В.Б., Ложкин С.А. Элементы теории графов, схем и автоматов. – М.: МГУ, 2000.
8. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1974.
9. Ложкин С.А., Марченко А.М., Шуплецов М. С. Математические модели и методы синтеза СБИС. (<http://mk.cs.msu.ru/images/8/87/Lozhkin-Marchenko-VSLI-models.pdf>)
10. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: МГУ, 1984.
11. Нигматулин Р.Г. Сложность булевых функций. – М.: Наука, 1991.

8. Особенности организации и контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов

Данный вариант курса «Основы кибернетики» является достаточно сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует от студентов полноценной и регулярной как аудиторной, так и самостоятельной работы, что невозможно без чёткой организации занятий, строгой дисциплины и систематического контроля. При этом необходимо, чтобы в рамках самостоятельной работы (1 час самостоятельной работы на 1 час аудиторных занятий) студенты систематически прорабатывали пройденный материал. По курсу предполагается провести две контрольные работы (каждая продолжительностью 2 акад. часа). Контрольные работы оцениваются по следующей шкале: не менее 80% – «5», не менее 65% и при этом менее 80% – «4», не менее 50% и при этом менее 65% – «3», не менее 30% и при этом менее 50% – «3-», менее 50% – «2». По результатам контрольных работ с учетом бонусов (посещаемость семинарских занятий и выполнение домашних заданий) будет выставлена предварительная оценка.

9. О проведении экзамена по курсу «Основы кибернетики»

Предполагается по курсу «Основы кибернетики» на 3-м потоке 3-го курса летом 2025 года проводить экзамен в один день и в одно время. Для студентов, согласных с выставлением предварительной оценки в качестве итоговой оценки по курсу «Основы кибернетики», будет организована сдача экзамена по упрощенной форме, предполагающей опрос только по формулировкам определений и утверждений курса (отметим, что по результатам опроса итоговая оценка может быть понижена по сравнению с предварительной). Каждый студент, не согласный с принятием своей предварительной оценки в качестве итоговой, должен будет сдавать экзамен по полной форме, то есть устно с выбором билета (два вопроса и задача) и ответом на дополнительные вопросы (и, возможно, задачи). Каждый студент, имеющий оценку «2» или «Н» за одну из контрольных работ или же имеющий предварительную оценку «2», «Н» или «3-», должен сдавать экзамен по полной форме.

Желаем успешного освоения курса и отличной сдачи экзамена!