Лекция 1. Множество E_2^n. Наборы, вес набора. Слой множества E_2^n. Частичный порядок на множестве E_2^n. Соседние и противоположные наборы, расстояние между наборами. Лексико-графический порядок на множестве E_2^n.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Декартова (прямая) степень множества

Если A — множество и $n \geqslant 1$, то множество A^n состоит из всех упорядоченных n-ок элементов из A.

Любой элемент из A^n будем называть **набором** (**длины** n). При этом составляющие набор элементы множества A будем называть его **разрядами**, или **компонентами**.

Если a — обозначение некоторого набора из A^n (возможно, с индексами), то i-й разряд набора a будем обозначать a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

В частности, если $a_j \in A^n$, то $a_j = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n})$.

Множество E_2^n

Введем обозначение: $E_2 = \{0, 1\}$.

В дальнейшем будем рассматривать множество E_2^n, $n \geqslant 1$. Множество E_2^n будем также называть n-**мерным** (**двоичным**) **кубом**.

Любой элемент из E_2^n будем называть (**двоичным**) **набором**.

Наборы из множества E_2^n, как правило, будем обозначать греческими буквами начала алфавита: α, β и т. д., возможно, с индексами.

При этом если $\alpha \in E_2^n$, то $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; если $\alpha_j \in E_2^n$, то $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,n})$.

Множество E_2^n

Пример.

1. Пусть $n = 2$. Перечислим все наборы из множества E_2^2:

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,0),\quad (1,1).$$

Всего найдется 4 набора в множестве E_2^2.

2. Пусть $n = 3$. Перечислим все наборы из множества E_2^3:

$$\begin{array}{cccc} (0,0,0), & (0,0,1), & (0,1,0), & (1,0,0), \\ (0,1,1), & (1,0,1), & (1,1,0), & (1,1,1). \end{array}$$

Всего найдется 8 наборов в множестве E_2^3.

Мощность множества E_2^n

Предложение 1.1. *Если* $n \geqslant 1$, *то* $|E_2^n| = 2^n$.

Доказательство.
Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$.
Подсчитаем, сколькими способами можно построить такой набор α.
Каждый его разряд α_i, где $i = 1, \ldots, n$, равен одному из двух значений (0 или 1), причем вне зависимости от значений других разрядов.
Поэтому число способов построить набор из E_2^n (а значит, и число наборов в E_2^n) равно 2^n.
Следовательно, $|E_2^n| = 2^n$.

$\square$

Слои множества E_2^n

Набор из E_2^n называется **нулевым**, если все его разряды равны нулю, и **единичным**, если все его разряды равны единице.

Весом $|\alpha|$ набора $\alpha \in E_2^n$ называется число его единичных разрядов. Отметим, что $0 \leqslant |\alpha| \leqslant n$, причем вес, равный 0, — только у нулевого набора; а вес, равный n, — только у единичного набора.

Пусть $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$. Множество

$$E_2^{n,k} = \{\alpha \in E_2^n \mid |\alpha| = k\},$$

т. е. множество всех наборов из E_2^n с весом, равным k, называется **k-м слоем** куба E_2^n.

Слои множества E_2^n

Пример.

1. Перечислим все наборы из слоя $E_2^{3,2}$:

$$(0,1,1), \quad (1,0,1), \quad (1,1,0).$$

Всего найдется 3 набора в слое $E_2^{3,2}$.

2. Перечислим все наборы из слоя $E_2^{4,2}$:

$$\begin{array}{ccc} (0,0,1,1), & (0,1,0,1), & (0,1,1,0), \\ (1,0,0,1), & (1,0,1,0), & (1,1,0,0). \end{array}$$

Всего найдется 6 наборов в слое $E_2^{4,2}$.

Мощность k-го слоя множества E_2^n

Предложение 1.2. *Если $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$, то $|E_2^{n,k}| = C_n^k$, где C_n^k обозначает биномиальный коэффициент из n по k.*

Доказательство.
Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^{n,k}$.
Подсчитаем, сколькими способами можно построить такой набор α.
Можно выбрать k разрядов из всех n разрядов и построить набор α, в котором выбранные разряды равны 1, а остальные разряды равны 0.
Поэтому число способов построить набор из $E_2^{n,k}$ (а значит, и число наборов из $E_2^{n,k}$) совпадает с числом выборов k разрядов из n разрядов, т. е. с C_n^k.
Следовательно, $|E_2^{n,k}| = C_n^k$. $\square$

Частичный порядок на E_2^n

На множестве E_2^n определим **частичный порядок** $\leqslant$: если $\alpha, \beta \in E_2^n$, то полагаем $\alpha \leqslant \beta$ при $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (считаем, что $0 < 1$). При этом если $\alpha \leqslant \beta$ и $\alpha \neq \beta$, то пишем $\alpha < \beta$.

Если $\alpha \leqslant \beta$, то говорим, что набор α предшествует набору β, или что набор β следует за набором α.

Если $\alpha < \beta$, то говорим, что набор α строго предшествует набору β, или что набор β строго следует за набором α.

Если $\alpha, \beta \in E_2^n$ и $\alpha \leqslant \beta$ или $\beta \leqslant \alpha$, то наборы α и β называются **сравнимыми**. В обратном случае наборы α и β называются **несравнимыми**.

Например, если $n = 2$, то $(0,0) \leqslant (0,1)$ и $(0,1) \leqslant (1,1)$; а наборы $(0,1)$ и $(1,0)$ являются несравнимыми.

Соседние и противоположные наборы из E_2^n

Наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ называются **соседними**, если они отличаются только в одном разряде. При этом если они отличаются в i-м разряде, то их также называют **соседними по i-му разряду**, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Например, если $n = 3$, то наборы $(0, 0, 1)$ и $(1, 0, 1)$ являются соседними (по первому разряду).

Наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ называются **противоположными**, если они отличаются во всех n разрядах. Отметим, что для любого $\alpha \in E_2^n$ противоположный ему набор определен однозначно; обозначим его $\bar{\alpha}$.

Например, если $n = 3$ и $\alpha = (0, 0, 1)$, то $\bar{\alpha} = (1, 1, 0)$.

Расстояние между наборами из E_2^n

Расстоянием $\rho(\alpha, \beta)$ между наборами $\alpha, \beta \in E_2^n$ называют число разрядов, в которых они отличаются.

Например, если $n = 3$, $\alpha = (0, 0, 1)$ и $\beta = (1, 1, 1)$, то $\rho(\alpha, \beta) = 2$.

Отметим, что если α и β — соседние наборы, то $\rho(\alpha, \beta) = 1$; а если α и β — противоположные наборы, то $\rho(\alpha, \beta) = n$.

Шары в E_2^n

Шаром радиуса r, $r \geqslant 0$, с центром в точке $\alpha \in E_2^n$ называется множество:

$$S_r(\alpha) = \{\beta \in E_2^n \mid \rho(\alpha, \beta) \leqslant r\}.$$

Другими словами, шар $S_r(\alpha)$ содержит в точности все такие наборы $\beta \in E_2^n$, которые от набора α находятся на расстоянии не более r.

Например, если $n = 3$, $\alpha = (0, 0, 1)$, то

$$S_1(\alpha) = \{(0, 0, 1), (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}.$$

Мощность шара радиуса r в E_2^n

Пусть $S_r(n)$ обозначает число наборов в шаре радиуса r в E_2^n.

Предложение 1.3. *Если* $n \geqslant 1$, $r \geqslant 0$, *то*

$$S_r(n) = 1 + C_n^1 + \ldots + C_n^r = \sum_{k=0}^{r} C_n^k,$$

где C_n^k *обозначает биномиальный коэффициент из* n *по* k.

Мощность шара радиуса r в E_2^n

Доказательство. Выберем произвольный набор $\alpha \in E_2^n$ и рассмотрим шар $S_r(\alpha)$.

Рассмотрим произвольный набор $\beta \in S_r(\alpha)$.
Подсчитаем, сколькими способами можно построить такой набор β.
Для каждого $k = 0, 1, \ldots, r$ можно выбрать k разрядов из всех n разрядов и построить набор β, который отличается от набора α только в выбранных k разрядах.
Поэтому число наборов в $S_r(\alpha)$ совпадает с числом выборов k разрядов из n разрядов для всех $k = 0, 1, \ldots, r$.
Следовательно,

$$S_r(n) = \sum_{k=0}^{r} C_n^k.$$

□

Лексико-графический порядок на E_2^n

Номером $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_2$ набора $\alpha \in E_2^n$ назовем целое неотрицательное число, для которого запись в двоичной системе счисления имеет вид $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

Другими словами,

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}.$$

Отметим, что $0 \leqslant (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_2 \leqslant 2^n - 1$.

(Линейное) упорядочивание наборов из E_2^n в порядке возрастания их номеров назовем **лексико-графическим** (или **алфавитным**) порядком на E_2^n.

Лексико-графический порядок на E_2^n

Пример. Перечислим все наборы из E_2^3 в лексико-графическом порядке. В следующей таблице в левом столбце указаны числа от 0 до $7 = 2^3 - 1$, а в правом столбце — соответствующие наборы из E_2^3:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_2$	$\alpha \in E_2^3$
0	$(0, 0, 0)$
1	$(0, 0, 1)$
2	$(0, 1, 0)$
3	$(0, 1, 1)$
4	$(1, 0, 0)$
5	$(1, 0, 1)$
6	$(1, 1, 0)$
7	$(1, 1, 1)$

Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что таблицу всех наборов из E_2^n, $n \geqslant 1$, в лексикографическом порядке можно построить следующим способом: для каждого $i = 1, \ldots, n$, начиная с первой строки таблицы, повторить 2^{i-1} раз: в i-м разряде в 2^{n-i} строках написать 0, затем в следующих 2^{n-i} строках написать 1.

Литература к лекции

1. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 9–10. Гл. I 1.1–1.5.