Занятие 2. Дизъюнктивные и конъюнктивные норомальные формы. Полиномы Жегалкина.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Страница курса на сайте https://mk.cs.msu.ru

Элементарные конъюнкции

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ — различные переменные и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in E_2$, называется **элементарной конъюнкцией** (ЭК) **ранга** k, $k \geqslant 1$.

Элементарной конъюнкцией ранга 0 назовем константу 1.

Например, 1, x_2, $\bar{x}_1 x_3 x_4$ — элементарные конъюнкции.

Считаем, что две ЭК совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них переменных.

Дизъюнктивные нормальные формы

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины l, $l \geqslant 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК.

Дизъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 0.

Другими словами, ДНФ называется выражение вида

$$K_1 \vee \ldots \vee K_l,$$

где K_j — различные ЭК, $l \geqslant 1$, или константа 0.

Например, x_1x_2, $x_2 \vee x_3$, $\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2$ — ДНФ.

Считаем, что две ДНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭК.

Каждая ДНФ с переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет какую-то функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Совершенная ДНФ

Если каждая ЭК в ДНФ содержит все переменные этой ДНФ, то такая ДНФ называется **совершенной**.

Теорема (о совершенной ДНФ). *Каждая функция* $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $f \neq 0$, *может быть представлена в виде совершенной ДНФ* D_f, *а именно:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенная ДНФ

Пример. Найдем совершенную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Для самостоятельного разбора: гл. 1

Гл. 1: 2.3(1,3,4), 2.18(1).

Для решения задач

Элементарные дизъюнкции

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ — различные переменные и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in E_2$, называется **элементарной дизъюнкцией** (ЭД) **ранга** k, $k \geqslant 1$.

Элементарной дизъюнкцией ранга 0 назовем константу 0.

Например, 0, x_2, $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$ — элементарные дизъюнкции.

Считаем, что две ЭД совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них переменных.

Конъюнктивные нормальные формы

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины l, $l \geqslant 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД.

Конъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 1.

Другими словами, КНФ называется выражение вида

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_l,$$

где D_j — различные ЭД, $l \geqslant 1$, или константа 1.

Например, $\bar{x}_1 \vee x_2$, $x_1 \cdot \bar{x}_3$, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$ — КНФ.

Считаем, что две КНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭД.

Каждая КНФ с переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет какую-то функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Совершенная КНФ

Если каждая ЭД в КНФ содержит все переменные этой КНФ, то такая КНФ называется **совершенной**.

Теорема (о совершенной КНФ). *Каждая функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $f \neq 1$, *может быть представлена в виде совершенной КНФ* K_f, *а именно:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma) = 0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Совершенная КНФ

Пример. Найдем совершенную КНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Для самостоятельного разбора: гл. 1

Гл. 1: 2.4(3,5).

Для решения задач

Монотонные элементарные конъюнкции

Элементарная конъюнкция, не содержащая отрицаний переменных, называется **монотонной** (ЭК), или **мономом**, или **одночленом**.

Например, 1, x_2, $x_1x_2x_4$ — монотонные ЭК.

Полиномы Жегалкина

Полиномом (или **многочленом**) **Жегалкина** длины l, $l \geqslant 1$, назовем сумму по модулю два l различных монотонных ЭК.

Полиномом (или **многочленом**) **Жегалкина** длины 0 назовем константу 0.

Другими словами, полиномом Жегалкина называется выражение вида

$$K_1 \oplus \ldots \oplus K_l,$$

где K_j — различные монотонные ЭК, $l \geqslant 1$, или константа 0.

Например, 0, 1, $x_1x_2 \oplus x_1$, $x_2 \oplus x_3 \oplus 1$, $x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_3$ — полиномы Жегалкина.

Считаем, что два полинома Жегалкина совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них монотонных ЭК.

Каждый полином Жегалкина с переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет какую-то функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Полином Жегалкина

Теорема (И. И. Жегалкина). *Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ может быть единственным образом представлена в виде полинома Жегалкина P_f.*

Построение полиномов Жегалкина

Если задана функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$, то ее полином Жегалкина можно построить:

1) методом **неопределенных коэффициентов**;

2) **быстрым способом**.

Метод неопределенных коэффициентов

Пример. Методом **неопределенных коэффициентов** найдем полином Жегалкина для функции $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$:

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Запишем ее полином Жегалкина с неопределенными коэффициентами:

$$f(x_1, x_2) = c_{1,2}x_1x_2 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus c_0,$$

где $c_{1,2}, c_1, c_2, c_0 \in E_2$ — неизвестные коэффициенты.

Метод неопределенных коэффициентов

Пример (продолжение). Подставляя поочередно все наборы из E_2^2 в левую и правую части полученного равенства, составляем систему линейных уравнений с неизвестными $c_{1,2}, c_1, c_2, c_0$:

$$\begin{cases} f(0,0) = c_0 = 0, \\ f(0,1) = c_2 \oplus c_0 = 1, \\ f(1,0) = c_1 \oplus c_0 = 1, \\ f(1,1) = c_{1,2} \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_0 = 1. \end{cases}$$

Решаем полученную систему и находим:

$$c_{1,2} = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_0 = 0.$$

Получаем полином Жегалкина функции f:

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2.$$

Полином Жегалкина

Если $f \in P_2^{(n)}$, то ее полином Жегалкина P_f однозначно определяется своими коэффициентами при всех возможных монотонных ЭК над переменными $x_1, \ldots, x_n$.

Монотонные ЭК над $x_1, \ldots, x_n$

Набору $\alpha \in E_2^n$ **взаимно однозначно сопоставим** монотонную ЭК над переменными $x_1, \ldots, x_n$:

$$x^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = (0, \ldots, 0), \\ \prod\limits_{\alpha_i = 1} x_i, & \alpha \neq (0, \ldots, 0). \end{cases}$$

Если α пробегает по всем возможным наборам из E_2^n, то x^α перечисляет все возможные монотонные ЭК над $x_1, \ldots, x_n$.

Например, если $n = 2$, то

$$x^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = (0, 0), \\ x_2, & \alpha = (0, 1), \\ x_1, & \alpha = (1, 0), \\ x_1 x_2, & \alpha = (1, 1). \end{cases}$$

Коэффициенты полинома Жегалкина

Пусть $c_f(\alpha)$ обозначает **коэффициент** при мономе x^α, $\alpha \in E_2^n$, в полиноме Жегалкина функции $f \in P_2^{(n)}$.

Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_f(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Для нахождения полинома Жегалкина функции f нужно найти коэффициенты $c_f(\alpha)$ для всех $\alpha \in E_2^n$.

Вычисление коэффициентов при $n = 1$

Если $f(x) \in P_2^{(1)}$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{x} \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = (x \oplus 1) \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = \\ &= x \cdot (f(0) \oplus f(1)) \oplus f(0). \end{aligned}$$

Поэтому

$$c_f(0) = f(0),$$
$$c_f(1) = f(0) \oplus f(1).$$

Например, если $f(x) = \bar{x}$, то

$$c_f(0) = f(0) = 1,$$
$$c_f(1) = f(0) \oplus f(1) = 1 \oplus 0 = 1.$$

Поэтому $\bar{x} = x \oplus 1$.

Вычисление коэффициентов полинома Жегалкина

Теорема (вычисление коэффициентов). *Если* $n \geqslant 1$, $f(y, x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n+1)}$, $f_a(x_1, \ldots, x_n) = f(a, x_1, \ldots, x_n)$, *где* $a \in E_2$, *то для каждого* $\alpha \in E_2^n$ *верны равенства:*

$$c_f(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_{f_0}(\alpha),$$
$$c_f(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha).$$

Быстрый способ

Пример. Пользуясь формулами предыдущей теоремы, найдем полином Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Быстрый способ

Пример (продолжение). На шаге 1 вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\sigma(x_3)$, $\sigma \in E_2^2$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1, x_2:

x_1	x_2	x_3	f	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Быстрый способ

Пример (продолжение). На шаге 2, пользуясь полученными значениями на шаге 1, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\delta(x_2, x_3)$, $\delta \in E_2^1$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1:

x_1	x_2	x_3	f	1	2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Быстрый способ

Пример (продолжение). Наконец, на шаге 3, пользуясь полученными значениями на шаге 2, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f	1	2	$3(c_f)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Быстрый способ

Пример (продолжение).

x_1	x_2	x_3	f	1	2	$3(c_f)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

Для самостоятельного разбора: гл. 1

Гл. 1: 2.22(5), 2.23(3,4,7), 2.27(1,2), 2.28.

Для решения задач

Домашнее задание

По задачнику: Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Гл. 1: 2.3(2,5), 2.18(7), 2.4(4,6), 2.22(6), 2.23(5,6,8), 2.27(4,5), 2.29*.