

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 4

Как формализовать предложение
на языке логики предикатов
(пример)

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Попробуем записать на языке логики предикатов определение предела последовательности действительных чисел

Это определение формулируется для двух предметов:

1. Последовательность действительных чисел (s)
2. Действительное число (x) ,
про которое говорится, что оно является пределом s

Вспомним, как определение записывается на естественном языке:

s — последовательность действительных чисел,
 x — действительное число, и
для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число n , такое что
все элементы последовательности s , начиная с n -го,
отстоят от x не более чем на ε

Попробуем записать на языке логики предикатов определение предела последовательности действительных чисел

Прежде чем начать записывать формулу, определимся с *сигатурой*

Для примера выберем такую:

- ▶ $0 \in \text{Const}$
- ▶ $\text{ad}^{(2)} \in \text{Func}$: $\text{ad}(x, y) = |x - y|$
- ▶ $R^{(1)}, N^{(1)}, S^{(1)}, E^{(3)}, <^{(2)}, \leq^{(2)} \in \text{Pred}$:
 - ▶ $R(x) = \text{“}x \text{ — действительное число”}$
 - ▶ $N(x) = \text{“}x \text{ — натуральное число”}$
 - ▶ $S(x) = \text{“}x \text{ — последовательность действительных чисел”}$
 - ▶ $E(x, n, s) = \text{“}x \text{ — } n\text{-й член последовательности } s\text{”}$
 - ▶ $x < y, x \leq y$ — отношения неравенства чисел x и y

Попробуем записать на языке логики предикатов определение предела последовательности действительных чисел

s — последовательность действительных чисел,
 x — действительное число, и
для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число n , такое что
все элементы последовательности s , начиная с n -го,
отстоят от x не более чем на ε

Здесь записаны три утверждения,
связанные (один раз явно, один раз неявно) союзом “и”

На языке логики предикатов это переписывается так (“и” = “&”):

$$S(s) \& R(x) \& \varphi_1$$

С формулой φ_1 разберёмся отдельно

Попробуем записать на языке логики предикатов определение предела последовательности действительных чисел

Для любого положительного действительного числа ε существует натуральное число n , такое что все элементы последовательности s , начиная с n -го, отстоят от x не более чем на ε

“Для любого” = “ \forall ”, и справа от \forall обязательно стоит переменная, обозначающая произвольный предмет

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Для любого предмета ε верно следующее:
если ε — положительное действительное число, то существует ...

$$\forall \varepsilon (R(\varepsilon) \ \& \ (0 < \varepsilon) \rightarrow \varphi_2)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_2

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Существует натуральное число n , такое что
все элементы последовательности s , начиная с n -го,
отстоят от x не более чем на ε

“Существует” = “хотя бы один” = “ \exists ”, и справа от \exists обязательно стоит
переменная, обозначающая произвольный предмет

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Существует предмет n , для которого верно следующее:
 n — натуральное число, и кроме того, все элементы ...

$$\exists n (N(n) \& \varphi_3)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_3

Попробуем записать на языке логики предикатов определение предела последовательности действительных чисел

Все элементы последовательности s , начиная с n -го, отстоят от x не более чем на ε

“Все” = “для любого” = “ \forall ”

Присвоим произвольному элементу, о котором говорится в предложении, имя (y), и переформулируем предложение:

Для любого предмета y верно следующее:
если y совпадает с каким-либо элементом последовательности s с номером, не меньшим n , то y отстоит от x не более чем на ε

$$\forall y (\varphi_4 \rightarrow \text{ad}(x, y) \leq \varepsilon)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_4

Попробуем записать на языке логики предикатов определение предела последовательности действительных чисел

y совпадает с каким-либо элементом последовательности s
с номером, не меньшим n

В формуле φ_4 “снаружи” располагается одна из операций
 $\&, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$

Чтобы понять, какая именно, переформулируем предложение так, чтобы
“снаружи” располагалось одно из словосочетаний
“и”, “или”, “если-то”, “не”, “для любого”, “существует”:

Существует предмет m , такой что m — натуральное число, и m не
меньше n , и y — m -й элемент последовательности s

$$\exists m (N(m) \& (n \leq m) \& E(y, m, s))$$

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Ответ:

$$\begin{aligned} & S(s) \ \& \ R(x) \ \& \\ & \forall \varepsilon (\\ & \quad R(\varepsilon) \ \& \ (0 < \varepsilon) \rightarrow \\ & \quad \exists n (\\ & \quad \quad N(n) \ \& \\ & \quad \quad \forall y (\\ & \quad \quad \quad \exists m (\\ & \quad \quad \quad \quad N(m) \ \& \ (n \leq m) \ \& \ E(y, m, s) \\ & \quad \quad \quad \quad) \rightarrow \\ & \quad \quad \quad \quad \mathbf{ad}(x, y) \leq \varepsilon \\ & \quad \quad \quad) \\ & \quad \quad) \\ & \quad) \end{aligned}$$