

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 12

Метод семантических таблиц:
полнота табличного вывода

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

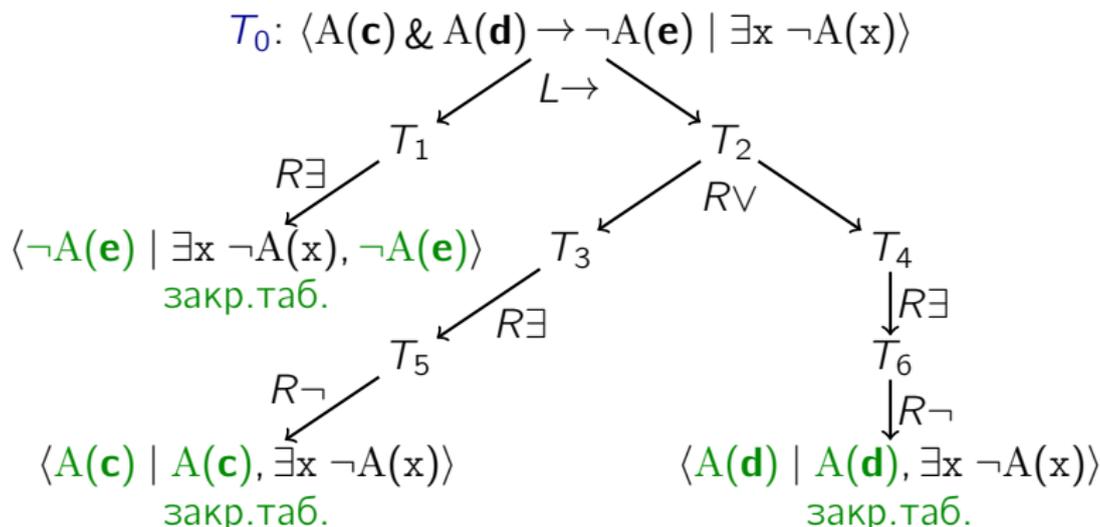
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Напоминание

Корректность табличного вывода:

если для таблицы T_0 существует успешный табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима



А верно ли утверждение в обратную сторону?

(если таблица невыполнима, то для неё существует успешный вывод)

Теорема (о полноте табличного вывода)

Для любой невыполнимой семантической таблицы существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую семантическую таблицу

$$T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$$

Покажем, как можно **построить** успешный вывод \mathfrak{D} для T_0

Для простоты обсудим частный случай с такими ограничениями:

- ▶ множества Γ_0 , Δ_0 конечны
- ▶ все формулы из Γ_0 , Δ_0 замкнуты
- ▶ в сигнатуре нет ни одного функционального символа

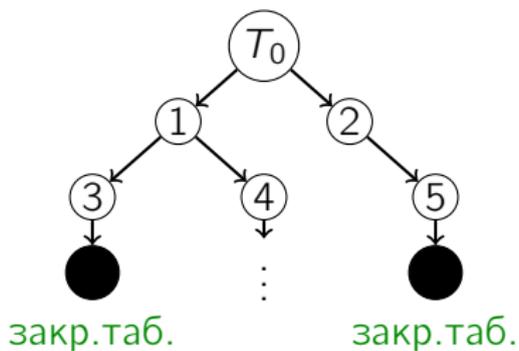
Сформулируем **стратегию** построения вывода, которой (как будет показано) достаточно придерживаться для построения требуемого вывода \mathfrak{D} , начиная с исходной таблицы T_0

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

1. Дерево вывода строится при помощи обхода в ширину

То есть правила применяются к незакрытым неатомарным таблицам в порядке их появления в построенном фрагменте дерева



Тогда каждая таблица каждой ветви вывода рано или поздно будет построена

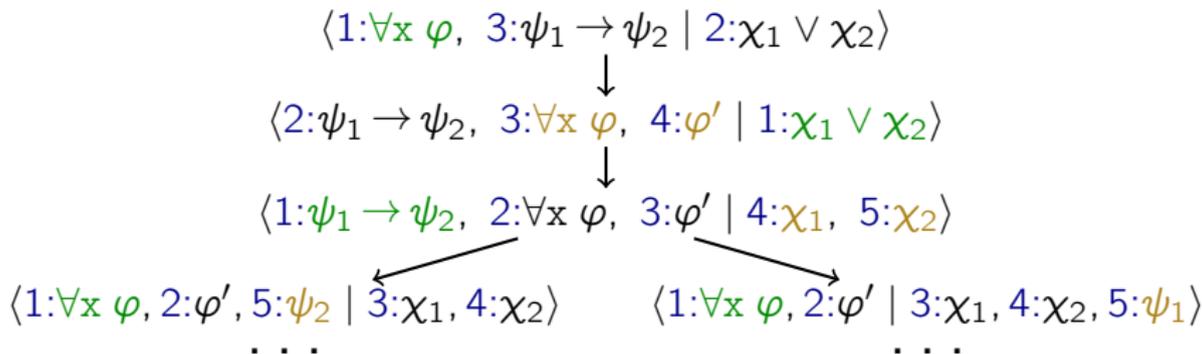
Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

2. Правила применяются к формулам в порядке очереди

То есть:

- ▶ неатомарные формулы таблицы пронумерованы
- ▶ правило вывода применяется к первой формуле
- ▶ результат применения правила записывается последним



Тогда в каждой ветви вывода к каждой неатомарной формуле рано или поздно будет применено правило табличного вывода

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

3. При применении правил $L\forall$, $R\exists$ подставляются **все** имеющиеся в таблице константы (**c**, если констант нет)

$$\begin{array}{c} \langle \forall x \varphi, \exists x \psi \mid \exists x \chi \rangle \\ \downarrow L\forall \\ \langle \forall x \varphi, \exists x \psi, \varphi\{x/\mathbf{c}\} \mid \exists x \chi \rangle \\ \downarrow E\exists \\ \langle \forall x \varphi, \psi\{x/\mathbf{d}\}, \varphi\{x/\mathbf{c}\} \mid \exists x \chi \rangle \\ \downarrow R\exists \times 2 \\ \langle \forall x \varphi, \psi\{x/\mathbf{d}\}, \varphi\{x/\mathbf{c}\} \mid \exists x \chi, \chi\{x/\mathbf{c}\}, \chi\{x/\mathbf{d}\} \rangle \\ \dots \end{array}$$

Тогда в каждой бесконечной ветви вывода для каждого квантора \forall слева и \exists справа каждая константа рано или поздно будет подставлена

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Покажем, что любой вывод \mathfrak{D} , построенный для $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$ согласно предложенной стратегии, успешен

Предположим, что это не так: вывод \mathfrak{D} неуспешен — получим из этого выполнимость таблицы T_0 , противоречащую выбору таблицы T_0

Заменим в \mathfrak{D} каждую незакрытую атомарную таблицу T_{atom} на бесконечную ветвь $T_{atom} \rightarrow T_{atom} \rightarrow T_{atom} \rightarrow \dots$

Тогда в полученном дереве обязательно найдётся бесконечная ветвь \mathcal{T} , состоящая только из незакрытых таблиц:

$$T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$$

По этой ветви построим интерпретацию \mathcal{I} , такую что:

- ▶ каждая формула из Γ_0 выполнима в \mathcal{I}
- ▶ каждая формула из Δ_0 невыполнима в \mathcal{I}

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \quad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, -, \overline{\text{Pred}} \rangle$, где

- ▶ предметная область — это все константы всех формул в \mathfrak{T} :

$$D = \bigcup_{i \geq 0} \text{Const}_i = \text{Const}_\omega, \text{ где } \text{Const}_i \text{ — все константы в } T_i$$

- ▶ значение каждой константы — это её изображение (*она сама*):

$$\overline{c} = c$$

- ▶ предикат истинен \Leftrightarrow он встречается в левых частях таблиц \mathfrak{T} :

$$\overline{P}(c_1, \dots, c_k) = \text{т} \quad \Leftrightarrow \quad P(c_1, \dots, c_k) \in \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i = \Gamma_\omega$$

Осталось показать *индукцией по структуре формулы*, что

- ▶ каждая формула из Γ_ω выполнима в \mathcal{I}

- ▶ каждая формула из $\Delta_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ невыполнима в \mathcal{I}

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{I}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \quad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$
$$\varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathfrak{I} \models \varphi \qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathfrak{I} \not\models \varphi$$

База индукции: φ — атом

Тогда $\varphi = P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$, где $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k \in \text{Const}_\omega$

(почему?)

Подслучай 1: $P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) \in \Gamma_\omega$

Тогда $\bar{P}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) = \top$, а значит, $\mathfrak{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) \in \Delta_\omega$

Тогда $P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) \notin \Gamma_\omega$

(почему?)

Значит, $\bar{P}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) = \text{f}$ и $\mathfrak{I} \not\models \varphi$

Индуктивный переход

Предположение индукции: для каждой формулы, содержащей менее N логических операций, утверждение доказано

Рассматриваемый случай: формула φ содержит ровно N логических операций

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \quad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$
$$\varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

Переход 1: $\varphi = \psi \rightarrow \chi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

В ветви \mathfrak{T} существует таблица T_i , такая что правило вывода применяется к φ в левой части этой таблицы (почему?)

Значит, верно хотя бы одно из двух: (почему?)

- ▶ $\chi \in \Gamma_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \models \chi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$
- ▶ $\psi \in \Delta_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \not\models \psi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$ — рассуждения аналогичны

Переход 2/3/4: $\varphi = \psi \& \chi / \psi \vee \chi / \neg \psi$ — рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\begin{array}{l} \mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \quad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle \\ \varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi \end{array}$$

Переход 5: $\varphi = \forall x \psi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

Тогда $\psi\{x/\mathbf{c}\} \in \Gamma_\omega$ для любой константы $\mathbf{c} \in \text{Const}_\omega$

(почему?)

Значит, для любой константы $\mathbf{c} \in \text{Const}_\omega$ верно: $\mathcal{I} \models \psi\{x/\mathbf{c}\}$

Но это и означает $\mathcal{I} \models \forall x \psi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$

В ветви \mathfrak{T} существует таблица T_i , такая что правило вывода применяется к φ в правой части этой таблицы

Значит, $\psi\{x/\mathbf{c}\} \in \Delta_{i+1}$ для некоторой $\mathbf{c} \in \text{Const}_{i+1} \subseteq \text{Const}_\omega$

Тогда $\mathcal{I} \not\models \psi\{x/\mathbf{c}\}$, и следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall x \psi$

Переход 6: $\varphi = \exists x \psi$ — рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \quad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

Итоги рассуждений

Существует (и явно описана) интерпретация \mathcal{I} , такая что

- ▶ все формулы в левых частях таблиц из \mathfrak{T} выполнимы в \mathcal{I}
- ▶ все формулы в правых частях таблиц из \mathfrak{T} невыполнимы в \mathcal{I}

В частности, все формулы из Γ_0 выполнимы в \mathcal{I}
и все формулы из Δ_0 невыполнимы в \mathcal{I}

Значит, таблица T_0 выполнима, что противоречит невыполнимости этой таблицы, заявленной в начале доказательства

Противоречие получено в предположении о том, что вывод, построенный для T_0 , неуспешен

Значит, предположение неверно:

любой вывод, построенный для невыполнимой таблицы T_0 согласно предложенным правилам, успешен ▼

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Для самостоятельного размышления:

а как адаптировать доказательство к общему случаю?

То есть:

- ▶ Какой порядок обработки формул позволит «справедливо» обращаться со счётными множествами формул?
- ▶ Какие термы подставлять, если в сигнатуре алфавита есть функциональные символы?
- ▶ Как задать и использовать интерпретацию \mathcal{I} , если в таблицах встречаются незамкнутые формулы?

Следствие

Семантическая таблица T логики предикатов невыполнима \Leftrightarrow для неё существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Вытекает из теорем о **корректности** и **полноте** табличного вывода ▼

Следствие. Для любой формулы φ логики предикатов верно:

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ для семантической таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$
существует успешный табличный вывод

Доказательство. Вытекает из первого следствия и теоремы о **табличной проверке общезначимости формул** ▼