Лекция 5. Графы. Раскраски вершин графов. Хроматическое число графа. Двуцветные графы. Оценки хроматического числа графа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Раскраска вершин графа

Раскраска (вершин) графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : V \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

в котором из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Т. е. любые смежные вершины обязаны получить разные цвета.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить его вершины.

Для любого графа $G = (V, E)$ верно неравенство $\chi(G) \leqslant |V|$.

Двуцветные графы

Теорема 1 (Кенига). *Граф $G = (V, E)$ можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют простые циклы нечетной длины.*

Доказательство. 1. Если в графе G найдется простой цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить.

Двуцветные графы

Доказательство. 2. Пусть теперь в графе G отсутствуют простые циклы нечетной длины.

Можно считать, что G — связный граф, иначе можно провести рассуждения для каждой его компоненты связности.

Построим в графе G его остовное дерево D. Выберем произвольную вершину $v_0 \in V$. В дереве D для каждой вершины $w \in V$ найдется ровно одна простая (v_0, w)-цепь P_w.

Определим отображение $\rho : V \to \{1, 2\}$: пусть $\rho(w) = 1$, если длина цепи P_w нечетна, и $\rho(w) = 2$, если длина цепи P_w четна.

Покажем, что ρ является раскраской вершин, т. е. в графе G не найдутся ребра, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет.

Двуцветные графы

Доказательство. Предположим обратное: пусть $(u, w) \in E$ и $\rho(u) = \rho(w)$.

Рассмотрим в графе G замкнутый путь $P = uP_u v_0 P_w w(w, u)u$. Длина пути P нечетна, т. к. у длин цепей P_u, P_w в дереве D одинаковая четность. Значит, из указанного замкнутого пути P можно выделить простой цикл нечетной длины. Противоречие.

Следовательно, ρ — раскраска вершин графа G в два цвета.

$\square$

Двудольные графы

Замечание 1. Отметим, что граф, содержащий хотя бы две вершины, можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда этот граф является двудольным.

Верхняя оценка хроматического числа

Предложение 1. *Для любого связного графа* $G = (V, E)$ *верно неравенство* $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Доказательство. Пусть $v_1 \in V$ — произвольная вершина графа G и D — его остовное дерево с корнем в вершине v_1.

Обойдем дерево D в глубину, начиная с корня v_1. При этом обходе припишем вершине v_1 номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.

После такого обхода окажется, что каждая вершина графа G, кроме вершины v_1, смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_p$ — занумерованные вершины множества V, где $p = |V|$.

Верхняя оценка хроматического числа

Доказательство. Укажем раскраску ρ вершин графа G в $\Delta(G)+1$ цветов из множества $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G)+1\}$.

Вершины $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_1$ раскрасим индукцией по убыванию их номеров.

Если вершина v_i не совпадает с вершиной v_1, то она смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна не более чем с $(\Delta(G)-1)$ окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Вершина v_1 смежна не более чем с $\Delta(G)$ окрашенных вершин. Припишем вершине v_1 цвет, не встречающийся среди смежных с ней вершин, если такой цвет найдется, или новый цвет.

Получим раскраску графа G в $(\Delta(G)+1)$ цветов.

$\square$

Достижимость оценки $\Delta(G)+1$

Если $G = K_n$ — полный граф, то $\Delta(G) = n-1$ и $\chi(G) = n$.

Если $G = C_{2m+1}$ — цикл нечетной длины, то $\Delta(G) = 2$ и $\chi(G) = 3$.

Верхняя оценка хроматического числа

Предложение 2. *Если в связном графе $G = (V, E)$ найдется вершина $v \in V$, для которой $d_G(v) < \Delta(G)$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Доказательство. Действительно, достаточно в доказательстве предложения 1 построить остовное дерево D графа G с корнем в такой вершине v_1, что $d_G(v_1) < \Delta(G)$.

Двусвязнные графы

Связный граф G называется **двусвязным**, если либо он содержит только одну вершину, либо он содержит не менее двух вершин и при удалениии из него любой вершины остается связный граф.

Двусвязный граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Компоненты двусвязности

Максимальный (по включению) двусвязный подграф связного графа G называется его **компонентой двусвязности**, или **блоком**.

Каждая компонента двусвязности связного графа либо содержит не менее трех вершин, либо совпадает с графом K_2, либо совпадает с графом K_1 (если исходный граф совпадает с K_1).

Если граф G — двусвязный, то он является своей единственной компонентой двусвязности.

Предложение 3. *Вершины графа G можно раскрасить в k цветов тогда и только тогда, когда в k цветов можно раскрасить каждую компоненту двусвязности графа G.*

Лемма о трех вершинах

Лемма 1 (о трех вершинах). *Если $G = (V, E)$ — двусвязный граф с $\Delta(G) \geqslant 3$, не являющийся полным графом, то найдутся такие три вершины $u, v, w \in V$, что $(u, w) \notin E$, $(u, v) \in E$, $(w, v) \in E$ и граф $G - \{u, w\}$ — связный.*

Теорема Брукса

Теорема 2 (Брукса). *Если G — связный граф с $\Delta(G) \geqslant 3$, не являющийся полным графом, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Доказательство. Можно считать, что $G = (V, E)$ — двусвязный граф, т. к. иначе рассуждения можно провести для каждой его компоненты двусвязности.

По лемме о трех вершинах найдем в двусвязном графе G такие вершины $u, v_1, w \in V$, что $(u, w) \notin E$, $(u, v_1) \in E$, $(w, v_1) \in E$ и граф $G_1 = G - \{u, w\}$ является связным.

Теорема Брукса

Доказательство. Пусть D_1 — остовное дерево графа G_1 с корнем в вершине v_1.

Обойдем дерево D_1 в глубину, начиная с корня v_1. При этом обходе припишем вершине v_1 номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.

После такого обхода окажется, что каждая вершина графа G_1, кроме вершины v_1, смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{p-2}$ — занумерованные вершины множества $V_1 = V \setminus \{u, w\}$, где $p = |V|$.

Теорема Брукса

Доказательство. Укажем раскраску ρ вершин графа G в $\Delta(G)$ цветов из множества $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$.

Сначала положим $\rho(u) = \rho(w) = 1$.

Вершины $v_{p-2}, v_{p-3}, \ldots, v_1$ раскрасим индукцией по убыванию их номеров.

Если вершина v_i не совпадает с вершиной v_1, то она смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна не более чем с $(\Delta(G) - 1)$ окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Вершина v_1 также смежна с вершинами, окрашенными не более чем в $(\Delta(G) - 1)$ цветов, т. к. смежные с ней вершины u, w окрашены в один цвет. Припишем вершине v_1 цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин. $\square$

Задачи

1. Найти хроматическое число графа $G = (V, E)$, если

1) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
2) $G = K_4 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_4 (рассмотреть все возможные случаи);
3) $G = K_5 - e$, где e — произвольное ребро графа K_5;
4) $G = K_5 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_5 (рассмотреть все возможные случаи).

2. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа $G = (V, E)$, чтобы оставшийся граф можно было раскрасить в k цветов, если

1) $G = K_4$, $k = 2$;
2) $G = K_5$, $k = 3$;
3) $G = K_6$, $k = 4$;
4) G содержит 7 вершин, занумерованных числами от 0 до 6, и ребра $(i, i + 1 (\mathrm{mod}\ 7))$, $(i, i + 2 (\mathrm{mod}\ 7))$, $i = 0, 1, \ldots, 6$, $k = 3$.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 235–243.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 152–153.

3. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 359–361