

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 34

Машины Тьюринга (МТ)
Проблема останова МТ

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

Следствие из теоремы об m -сводимости:

Если неразрешимая задача \mathfrak{T}_1 m -сводима к задаче \mathfrak{T}_2 , то задача \mathfrak{T}_2 также неразрешима

Обоснование теоремы Чёрча будет основано на этом следствии:

- ▶ \mathfrak{T}_2 — проблема общезначимости формул логики предикатов
- ▶ \mathfrak{T}_1 — известная неразрешимая задача
- ▶ Достаточно обосновать m -сводимость выбранной задачи \mathfrak{T}_1 к \mathfrak{T}_2

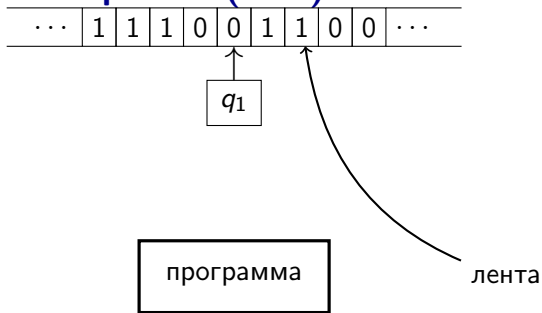
В качестве \mathfrak{T}_1 рассмотрим самую известную неразрешимую задачу:
проблему останова машин Тьюринга

Существуют разные, *хотя и в целом эквивалентные*, варианты определений понятия “машина Тьюринга”

Кроме того, *судя по всему*, не все проходящие этот курс достаточно хорошо знакомы с машинами Тьюринга

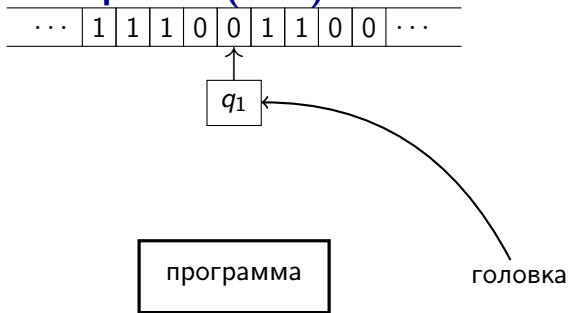
Поэтому перед обсуждением теоремы Чёрча подробно введём всё, что необходимо для определения проблемы останова

Машины Тьюринга (МТ)



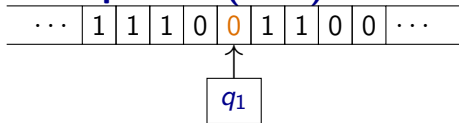
Определим всё это по порядку, детально и строго

Машины Тьюринга (МТ)

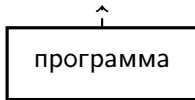


Определим всё это по порядку, детально и строго

Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$



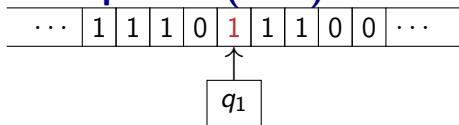
команда

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду

Определим всё это по порядку, детально и строго

Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

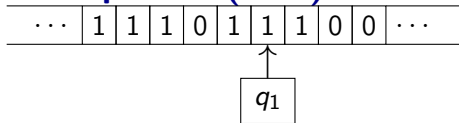
программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку **НОВЫЙ СИМВОЛ**

Определим всё это по порядку, детально и строго

Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

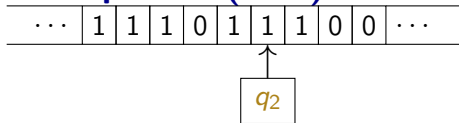
программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ **сдвигаем** головку

Определим всё это по порядку, детально и строго

Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ **меняем состояние**

Определим всё это по порядку, детально и строго

МТ: синтаксис

Алфавит — это непустое конечное множество символов (букв)

Машина Тьюринга¹ (МТ) — это система $(\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где

- ▶ \mathcal{A} — алфавит ленты
- ▶ $\Lambda \in \mathcal{A}$ — пустой символ
- ▶ \mathcal{Q} — алфавит состояний
- ▶ $q_0, q_f \in \mathcal{Q}$ — соответственно начальное состояние и заключительное состояние
- ▶ $\mathcal{P} : (\mathcal{Q} \setminus \{q_f\}) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \times \{L, R\} \times \mathcal{Q}$ — программа

Программа МТ также будет пониматься как множество команд:

$$(q, a, b, S, p) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}(q, a) = (b, S, p)$$

¹ Здесь обсуждается только один из вариантов определения машины Тьюринга — самый удобный для обоснования теоремы Чёрча

MT: семантика

$$M = (\mathcal{Q}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Слово в алфавите Σ — это конечная последовательность букв из Σ

В записи слов принято опускать разделители (запятые) между символами:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_1 x_2 \dots x_n$$

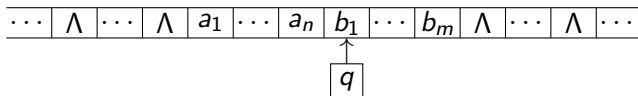
Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ

Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ

Ленточное слово — это слово в алфавите \mathcal{A}

Конфигурация машины Тьюринга — это набор (α, q, β) , где $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^+$ и $q \in \mathcal{Q}$

Пояснение: конфигурация $(a_1 \dots a_n, q, b_1 \dots b_m)$ означает, что MT находится в состоянии q , на ленте записано слово $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$, окружённое пустыми символами, и обозревается символ b_1



МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Способ преобразования конфигураций командой C можно задать как двуместное отношение \rightarrow_C на множестве конфигураций

Если $C = (q, a, b, R, p)$, то \rightarrow_C состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha, q, a x \beta) &\rightarrow_C (\alpha b, p, x \beta) \\ (\alpha, q, a) &\rightarrow_C (\alpha b, p, \Lambda)\end{aligned}$$

Если $C = (q, a, b, L, p)$, то \rightarrow_C состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha x y, q, a \beta) &\rightarrow_C (\alpha x, p, y b \beta) \\ (y, q, a \beta) &\rightarrow_C (\Lambda, p, y b \beta)\end{aligned}$$

$$(\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^*; x, y \in \mathfrak{A})$$

Отношение переходов \rightarrow_M МТ M — это объединение отношений \rightarrow_C по всем командам C МТ M

Трасса МТ M — это последовательность конфигураций, в которой каждая пара соседних конфигураций σ_i, σ_{i+1} входит в отношение переходов: $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

МТ: семантика

$$M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Конфигурация (α, q, β) — **заключительная**, если $q = q_f$

Вычисление МТ M на ленточном слове w — это трасса,

- ▶ начинающаяся в конфигурации $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ и
- ▶ либо бесконечная,
либо оканчивающаяся в заключительной конфигурации

Утверждение. Для любой МТ M и любого ленточного слова w существует единственное вычисление M на w

Доказательство.

Достаточно заметить, что в соотношении $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

- ▶ σ_i может быть любой незаключительной конфигурацией и не может быть заключительной, и
- ▶ σ_{i+1} однозначно определяется конфигурацией σ_i ▼

MT: пример

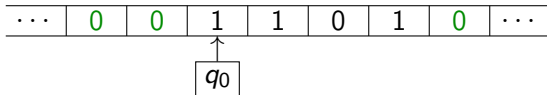
Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$(0, q_0, 11010)$$



MT: пример

Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

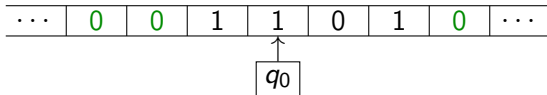
$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$(0, q_0, 11010) \rightarrow_M$$

$$(01, q_0, 1010)$$



MT: пример

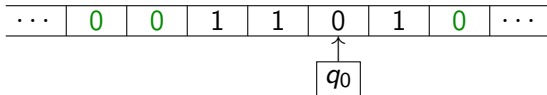
Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M & \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M & \\ (011, q_0, 010) & & \end{array}$$



MT: пример

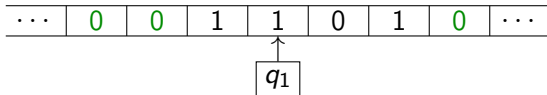
Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \end{array}$$



MT: пример

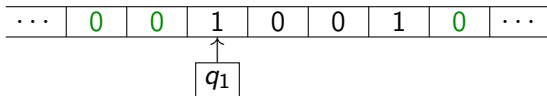
Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{llll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) & \end{array}$$



MT: пример

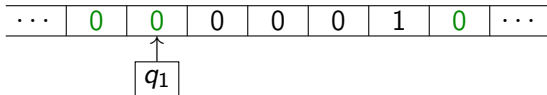
Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{aligned} (0, q_0, 11010) &\rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) &\rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) &\rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) &\rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) &\rightarrow_M \\ (0, q_1, 000010) &\end{aligned}$$



MT: пример

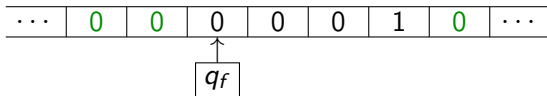
Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{llll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 000010) & \rightarrow_M \\ (00, q_f, 00010) & \end{array}$$



МТ: проблема останова

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- ▶ На вход подаётся пара (M, w) , где
 - ▶ M — произвольная машина Тьюринга и
 - ▶ w — произвольное ленточное слово (для M)
- ▶ $\text{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ вычисление M на слове w конечно

Теорема. Проблема останова машин Тьюринга неразрешима

Доказательство этой теоремы здесь не приводится, так как оно

- ▶ слишком известно,
- ▶ не относится к логике и
- ▶ так или иначе рассказывалось вам хотя бы раз в других курсах