Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы
$\rightarrow$ Математические модели последовательных вычислений

Блок 15

Подстановки
Системы переходов стандартных схем программ

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и сигнатура логики предикатов $\langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$

Тогда подстановкой называется отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки — это множество $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если конечна её область

Subst — так будем обозначать множество всех конечных подстановок

Подстановку θ, такую что $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n\}$, принято представлять следующим образом:

$$\theta = \{\mathtt{x}_1/\theta(\mathtt{x}_1), \dots, \mathtt{x}_n/\theta(\mathtt{x}_n)\}$$

Каждый элемент $\mathtt{x}_i/\theta(\mathtt{x}_i)$ этого множества называется связкой

Пустая (тождественная) подстановка ε — это подстановка с пустой областью

Подстановки

Композиция подстановок θ и η — это подстановка $\theta\eta$, которая задаётся равенством $(\theta\eta)(\mathrm{x}) = (x\theta)\eta$

Результат применения подстановки θ

- к выражению E, $E \in \mathrm{Term} \cup \mathrm{Atom}$ — это выражение $E\theta$, определяющееся так:
  1. Если $E = \mathrm{x} \in \mathrm{Var}$, то $E\theta = \theta(\mathrm{x})$
  2. Если $E = \mathbf{c} \in \mathrm{Const}$, то $E\theta = \mathbf{c}$
  3. Если $E = X(t_1, \dots, t_n)$, то $E\theta = X(t_1\theta, \dots, t_n\theta)$, $X \in \mathrm{Func} \cup \mathrm{Pred}$
- к оценке переменных $\xi : \mathrm{Var} \to D$ в интерпретации $\mathcal{I}$ — это оценка переменных $\theta[\xi]_{\mathcal{I}}$, которая задаётся равенством $(\theta[\xi]_{\mathcal{I}})(\mathrm{x}) = \theta(\mathrm{x})[\xi]_{\mathcal{I}}$
  - В частности, если $\xi = [\mathrm{x}_1/d_1, \dots, \mathrm{x}_n/d_n]$ и $\theta(\mathrm{x}_i) = t_i$, то $\theta[\xi]_{\mathcal{I}} = [\mathrm{x}_1/t_1[\xi]_{\mathcal{I}}, \dots, \mathrm{x}_n/t_n[\xi]_{\mathcal{I}}]$
  - **Например**, в «естественной арифметической» интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ верно $\{\mathrm{x}/\mathrm{x}+\mathrm{y}, \mathrm{y}/\mathrm{x}-\mathrm{y}\}[\mathrm{x}/2, \mathrm{y}/3, \mathrm{z}/1]_{\mathcal{I}_{ar}} = [\mathrm{x}/5, \mathrm{y}/-1, \mathrm{z}/1]$
  - Содержательно, если ξ представляет текущие значения переменных, а θ — одновременное (параллельное) присваивание значений соответствующих выражений во все переменные, то $\theta[\xi]_{\mathcal{I}}$ — это значения переменных после выполнения присваиваний

Подстановки

Утверждение 1. **Для любых переменной** x**, терма** t **над переменными** $x_1, \dots, x_n$**, интерпретации** $\mathcal{I}$ **и оценки переменных** ξ **верно**

$$\xi[\mathrm{x} \leftarrow t[\xi]_{\mathcal{I}}] = \{\mathrm{x}/t\}[\xi]_{\mathcal{I}}$$

Доказательство. Следует из соответствующих определений ▼

Иными словами, $\{\mathrm{x}/t\}[\xi]_{\mathcal{I}}$ — это оценка, получающаяся в результате выполнения присваивания $\mathrm{x}\ := \ t$ на оценке ξ

Например, если $\xi = [\mathrm{x}/2, \mathrm{y}/3, \mathrm{z}/1]$ и $t = (\mathrm{x} + \mathrm{y})$, то:

- $t[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}} = 2 + 3 = 5$
- $\xi[x \leftarrow t[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}}] = \xi[x \leftarrow 5] = [\mathrm{x}/5, \mathrm{y}/3, \mathrm{z}/1]$
- $\{\mathrm{x}/\mathrm{x} + \mathrm{y}\}[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}} = [\mathrm{x}/(\mathrm{x} + \mathrm{y})[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}}, \mathrm{y}/3, \mathrm{z}/1] = [\mathrm{x}/5, \mathrm{y}/3, \mathrm{z}/1]$

Подстановки

Утверждение 2. **Для любых конечных подстановок θ, η, интерпретации $\mathcal{I}$ и оценки переменных ξ верно**

$$(\theta\eta)[\xi]_{\mathcal{I}} = \theta[\eta[\xi]_{\mathcal{I}}]_{\mathcal{I}}$$

Доказательство. Следует из соответствующих определений ▼

Иными словами, если θ и η представляют два присваивания значений в переменные, то $(\theta\eta)[\xi]_{\mathcal{I}}$ — это оценка, получающаяся в результате последовательного выполнения η и θ

Например, если $\xi = [\mathrm{x}/2, \mathrm{y}/3, \mathrm{z}/1]$, $\theta = \{\mathrm{x}/\mathrm{x}+\mathrm{y}\}$ и $\eta = \{\mathrm{y}/\mathrm{x}-\mathrm{y}\}$, то:

- $\theta\eta = \{\mathrm{x}/\mathrm{x}+\mathrm{x}-\mathrm{y}, \mathrm{y}/\mathrm{x}-\mathrm{y}\}$
- $(\theta\eta)[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}} = [\mathrm{x}/(\mathrm{x}+\mathrm{x}-\mathrm{y})[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}}, \mathrm{y}/(\mathrm{x}-\mathrm{y})[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}}, \mathrm{z}/1] = [\mathrm{x}/1, \mathrm{y}/-1, \mathrm{z}/1]$
- $\xi' = \eta[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}} = [\mathrm{x}/2, \mathrm{y}/(\mathrm{x}-\mathrm{y})[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}}, \mathrm{z}/1] = [\mathrm{x}/2, \mathrm{y}/-1, \mathrm{z}/1]$
- $\theta[\eta[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}}]_{\mathcal{I}_{ar}} = \theta[\xi']_{\mathcal{I}_{ar}} = [\mathrm{x}/(\mathrm{x}+\mathrm{y})[\xi']_{\mathcal{I}_{ar}}, \mathrm{y}/-1, \mathrm{z}/1] = [\mathrm{x}/1, \mathrm{y}/-1, \mathrm{z}/1]$

Подстановки

Для интерпретации $\mathcal{I}$, оценки переменных ξ, переменной $\mathtt{x}$, терма t записью $\xi[\mathtt{x} \leftarrow t]_{\mathcal{I}}$ обозначим оценку $\xi[\mathtt{x} \leftarrow t[\xi]_{\mathcal{I}}]$

Утверждение 3. **Для любых интерпретации $\mathcal{I}$, оценки переменных ξ и последовательности присваиваний $\mathtt{x}_1\ := \ t_1$, ..., $\mathtt{x}_n\ := \ t_n$ верно**

$$\xi[\mathtt{x}_1 \leftarrow t_1]_{\mathcal{I}} \ldots [\mathtt{x}_n \leftarrow t_n]_{\mathcal{I}} = \{\mathtt{x}_n/t_n\} \ldots \{\mathtt{x}_1/t_1\}[\xi]_{\mathcal{I}_{ar}}$$

Доказательство. Следует из утверждений 1 и 2 ▼

Иными словами, выполнение последовательности присваиваний на оценке переменных можно переписать как

- последовательное применение соответствующих подстановок к этой оценке, или как
- применение к этой оценке композиции подстановок, взятых в обратном порядке

Системы переходов стандартных схем программ

Каждой стандартной схеме программ π сопоставим следующий размеченный ориентированный граф: разметенную систему переходов $LTS(\pi)$ этой программы

Вершины $LTS(\pi)$ — это все выходы и все распознаватели π с теми же метками (выражениями), что и в π

Вершина, достижимая в π из входа только по преобразователям, помечена как вход

Каждая дуга в $LTS(\pi)$ (переход) помечена парой $(b, \theta) \in \{0, 1\} \times \mathrm{Subst}$

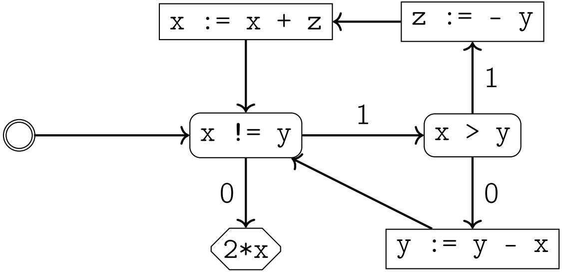
Дуга $q_1 \xrightarrow{b,\theta} q_2$ содержится в $LTS(\pi)$ тогда и только тогда, когда верно следующее:

- В π содержится фрагмент
$$q_1 \xrightarrow{b} \boxed{\mathtt{x}_1 \ := \ t_1} \to \boxed{\mathtt{x}_2 \ := \ t_2} \to \cdots \to \boxed{\mathtt{x}_n \ := \ t_n} \to q_2$$
(переменные присваиваний могут повторяться)
- $\theta = \{\mathtt{x}_n/t_n\} \ldots \{\mathtt{x}_2/t_2\}\{\mathtt{x}_1/t_1\}$

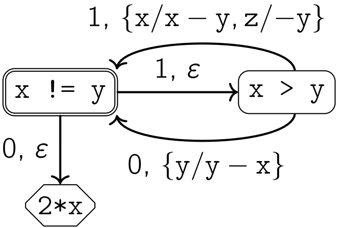
Системы переходов стандартных схем программ

Пример

Стандартная схема программ π:



Система переходов $LTS(\pi)$:



Системы переходов стандартных схем программ

Состоянием вычисления системы переходов назовём пару (v, ξ), где v — вершина этой системы и $\xi \in \Xi_{\mathcal{I}}$

Вычисление $comp(S, \mathcal{I}, \xi)$ системы переходов S в интерпретации $\mathcal{I}$ на оценке переменных ξ — это (конечная или бесконечная) последовательность состояний вычисления

$$(v_1, \xi_1), (v_2, \xi_2), (v_3, \xi_3), \dots,$$

устроенная так:

- $v_1 = \circledcirc$, $\xi_1 = \xi$
- Если $v_i = \boxed{\mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)}$, то $v_i \xrightarrow{\mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)[\xi_i]_{\mathcal{I}}, \theta} v_{i+1}$ и $\xi_{i+1} = \theta[\xi_i]_{\mathcal{I}}$
- Если $v_i = t_1, \dots, t_n$, то (v_i, ξ_i) — последний элемент последовательности

Системы переходов стандартных схем программ

Результат $val(S, \mathcal{I}, \xi)$ вычисления системы переходов S в интерпретации $\mathcal{I}$ на оценке переменных ξ определяется так:

1. Если вычисление $comp(S, \mathcal{I}, \xi)$ конечно и оканчивается парой $(t_1, \dots, t_n, \xi')$, то $val(S, \mathcal{I}, \xi) = (t_1[\xi']_\mathcal{I}, \dots, t_n[\xi']_\mathcal{I})$
2. Если вычисление $comp(S, \mathcal{I}, \xi)$ бесконечно, то $val(S, \mathcal{I}, \xi) = \bot$, где $\bot$ не является набором термов

Семантика системы переходов S в интерпретации $\mathcal{I}$ с предметной областью D описывается отображением $\overline{S}_\mathcal{I} : \Xi_\mathcal{I} \to (\mathrm{D}^* \cup \{\bot\})$, таким что $\overline{S}_\mathcal{I}(\xi) = val(S, \mathcal{I}, \xi)$

Теорема (о моделировании стандартных схем программ системами переходов). Для любых стандартной схемы программ π, интерпретации $\mathcal{I}$ и оценки переменных ξ верно $\overline{\pi}_\mathcal{I}(\xi) = \overline{LTS(\pi)}_\mathcal{I}(\xi)$

Доказательство. Можете попробовать это доказать, используя соответствующие определения и утверждение 3