

Лекция 4. Раскраски вершин графов.  
Хроматическое число графа. Критерий  
двухцветности графа. Верхние оценки  
хроматического числа графа. Существование  
графа без треугольников с произвольно  
большим хроматическим числом.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

# Раскраска вершин графа

Раскраска графа  $G = (V, E)$  в  $k$  цветов — отображение

$$\rho : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\},$$

в котором из  $(v, w) \in E$  следует  $\rho(v) \neq \rho(w)$ .

Т.е. любые смежные вершины обязаны быть окрашены в разные цвета.

**Хроматическое число**  $\chi(G)$  графа  $G$  — наименьшее возможное число цветов, в которое можно окрасить его вершины.

Для каждого графа  $G = (V, E)$  верно соотношение  $\chi(G) \leq |V|$ .

## Задача о работах

*Пусть найдутся  $p$  работ. При этом некоторые из них не могут выполняться одновременно (например, они требуют общее оборудование). За какое наименьшее время можно выполнить все работы?*

## Задача о размещении

*Пусть найдутся  $p$  узлов, которые надо разместить на некоторых участках. При этом некоторые пары узлов не могут размещаться на одном и том же участке (например, вместе они превысят энергопотребление). Какое наименьшее число участков требуется для размещения всех узлов?*

# Двухцветные графы

Граф  $G$  — двухцветный, если  $\chi(G) = 2$ .

**Теорема 1.** *Граф  $G = (V, E)$  — двухцветный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.*

**Доказательство.**

1. Если в графе  $G$  есть цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить.

# Двухцветные графы

## Доказательство.

2. Пусть теперь в графе  $G$  нет циклов нечетной длины.

Можно считать, что  $G$  — связный граф, иначе можно провести рассуждения для каждой его компоненты связности.

Построим в графе  $G$  его остовное дерево  $D$ .

В любом дереве для каждой пары вершин  $v, w \in V$  существует ровно одна простая  $(v, w)$ -цепь  $P_w$ .

Пусть  $v \in V$  — какая-то вершина.

Рассмотрим отображение  $\rho : V \rightarrow \{1, 2\}$ :

$\rho(w) = 1$ , если длина цепи  $P_w$  нечетна;

$\rho(w) = 2$ , если длина цепи  $P_w$  четна.

Покажем, что  $\rho$  является раскраской вершин, т.е. в графе  $G$  нет ребер, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет.

## Двухцветные графы

### Доказательство.

Предположим противное: пусть  $(u, w) \in E$  и  $\rho(u) = \rho(w)$ .

Рассмотрим в графе  $G$  замкнутый путь  $P = uP_u v P_w w(w, u)u$ .

Длина пути  $P$  нечетна, т.к. у длин цепей  $P_u, P_w$  в дереве  $D$  одинаковая четность.

Значит, из указанного замкнутого пути  $P$  можно выделить цикл нечетной длины. Противоречие.



# Двудольные графы

**Замечание 1.** Отметим, что граф — двухцветный тогда и только тогда, когда он — двудольный.



## Верхняя оценка хроматического числа

**Предложение 1.** Для каждого графа  $G = (V, E)$  верно неравенство  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $v_1 \in V$  — произвольная вершина графа  $G$ , и  $D$  — его остовное дерево с корнем в вершине  $v_1$ . Обойдем дерево  $D$  в глубину, начиная с корня  $v_1$ . При этом обходе припишем вершине  $v_1$  номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.

После такого обхода окажется, что каждая вершина  $v_1$  графа  $G$ , кроме вершины  $v_1$ , смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_p$  — занумерованные вершины множества  $V$ , где  $p = |V|$ .

## Верхняя оценка хроматического числа

**Доказательство.** Укажем раскраску  $\rho$  вершин графа  $G$  в  $\Delta(G) + 1$  цветов из множества  $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$ .

Вершины  $v_p, v_{p-1}, \dots, v_1$  окрасим индукцией по убыванию их номеров.

Если вершина  $v_i$  не совпадает с вершиной  $v_1$ , то она смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна с не более  $\Delta(G) - 1$  окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Вершина  $v_1$  смежна с не более  $\Delta(G)$  окрашенных вершин.

Припишем вершине  $v_1$  цвет, не встречающийся среди смежных с ней вершин, если он найдется, или новый цвет.

Получим раскраску графа  $G$  в  $\Delta(G) + 1$  цветов.



Достижимость оценки  $\Delta(G) + 1$ 

Если  $G = K_n$ , то  $\Delta(G) = n - 1$  и  $\chi(G) = n$ .

Если  $G = C_{2m+1}$  — цикл нечетной длины, то  $\Delta(G) = 2$  и  $\chi(G) = 3$ .

# Верхняя оценка хроматического числа

**Следствие 1.1.** *Если в графе  $G = (V, E)$  с  $\Delta(G) \geq 3$  найдется вершина  $v \in V$ , для которой  $d_G(v) < \Delta(G)$ , то  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

В самом деле, достаточно в доказательстве предложения 1 построить остовное дерево  $D$  графа  $G$  с корнем в такой вершине  $v_1$ , что  $d_G(v_1) < \Delta(G)$ .

# Лемма о трех вершинах

**Лемма 1 (о трех вершинах).** Если  $G = (V, E)$  — двусвязный граф с  $\Delta(G) \geq 3$ , не являющийся полным графом, то найдутся такие три вершины  $u, v, w \in V$ , что  $(u, w) \notin E$ ,  $(u, v) \in E$ ,  $(w, v) \in E$  и граф  $G - \{u, w\}$  — связный.

**Доказательство.** Пусть  $v_0 \in V$  — такая вершина графа  $G$ , что  $d_G(v_0) = \Delta(G)$ . Граф  $G_0 = G - v_0$  является связным.

## Лемма о трех вершинах

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай, когда  $G_0$  — двусвязный граф.

Если найдется такая вершина  $v \in V$ , смежная с вершиной  $u = v_0$  и с некоторой такой вершиной  $w \in V$ ,  $w \neq u$ , что  $(u, w) \notin E$ , то вершины  $u, v, w$  — искомые.

Если все вершины, смежные с вершиной  $v_0$ , смежны только друг с другом, то, т.к.  $G$  не является полным графом и  $\Delta(G) \geq 3$ , искомые вершины  $v = v_0$ ,  $u, w \in V \setminus \{v\}$ ,  $u \neq w$ , найдутся.

## Лемма о трех вершинах

### Доказательство.

Пусть теперь граф  $G_0$  не является двусвязным, и  $B_1, B_2, \dots, B_m$  — его компоненты двусвязности,  $m \geq 2$ .

Тогда в графе  $G_0$  найдутся хотя бы два висячих блока, например,  $B_1, B_2$ , соответственно содержащих точки сочленения  $c_1, c_2$  (возможно совпадение  $c_1$  и  $c_2$ ).

Значит, вершина  $v = v_0$  смежна с некоторой вершиной  $u$  блока  $B_1$  и с некоторой вершиной  $w$  блока  $B_2$ .

В самом деле, если вершина  $v$  не смежна ни с одной вершиной, например, блока  $B_1$ , то граф  $G - c_1$  — не связный, что противоречит двусвязности графа  $G$ .

Граф  $G - \{u, w\}$  — связный, т.к. вершины  $u, v$  принадлежат разным концевым блокам графа  $G_0$  и  $d_G(v) \geq 3$ .

Поэтому вершины  $u, v, w$  — искомые.



# Теорема Брукса

**Теорема 2 (Брукса).** Если  $G$  — связный граф с  $\Delta(G) \geq 3$ , не являющийся полным графом, то  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

**Доказательство.** Можно считать, что  $G = (V, E)$  — двусвязный граф, т.к. иначе рассуждения можно провести для каждой его компоненты двусвязности.

По лемме о трех вершинах найдем в двусвязном графе  $G$  такие вершины  $u, v_1, w \in V$ , что  $(u, w) \notin E$ ,  $(u, v_1) \in E$ ,  $(w, v_1) \in E$  и граф  $G_1 = G - \{u, w\}$  является связным.



# Теорема Брукса

**Доказательство.** Пусть  $D_1$  — остовное дерево графа  $G_1$  с корнем в вершине  $v_1$ .

Обойдем дерево  $D_1$  в глубину, начиная с корня  $v_1$ . При этом обходе припишем вершине  $v_1$  номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.

После такого обхода окажется, что каждая вершина  $v$  графа  $G$ , кроме вершины  $v_1$ , смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_{p-2}$  — занумерованные вершины множества  $V_1 = V \setminus \{u, w\}$ , где  $p = |V|$ .

# Теорема Брукса

**Доказательство.** Укажем раскраску  $\rho$  вершин графа  $G$  в  $\Delta(G)$  цветов из множества  $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ .

Сначала положим  $\rho(u) = \rho(w) = 1$ .

Вершины  $v_{p-2}, v_{p-3}, \dots, v_1$  окрасим индукцией по убыванию их номеров.

Если вершина  $v_i$  не совпадает с вершиной  $v_1$ , то она смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна с не более  $\Delta(G) - 1$  окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Вершина  $v_1$  также смежна с вершинами с не более  $\Delta(G) - 1$  цветами, т.к. смежные с ней вершины  $u, w$  окрашены в один цвет. Припишем вершине  $v_1$  цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

# Теорема Зыкова

**Теорема 3 (Зыкова).** *Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.*

**Доказательство.** Построим по индукции такую последовательность графов  $G_2, G_3, \dots, G_i, \dots$ , что граф  $G_i$  не содержит треугольников и  $\chi(G_i) = i, i = 2, 3, \dots$

*Базис индукции:* положим  $G_2 = K_2$ .

*Индуктивный переход.* Если граф  $G_i$  уже построен,

$G_i = (V_i, E_i), V_i = \{v_1, \dots, v_n\}$ , то положим  $G_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1})$ , где

$$V_{i+1} = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, w\},$$

(откуда  $|V_{i+1}| = 2n + 1$ ), причем множество  $E_{i+1}$  содержит все ребра из множества  $E_i$  и дополнительно все ребра  $(w_j, v_k)$ , если  $(v_j, v_k) \in E_i$ , а также все ребра  $(w, w_j), j, k = 1, \dots, n$ .

# Теорема Зыкова

**Доказательство.** 1. Граф  $G_i$  не содержит треугольников.

В самом деле, граф  $G_2$  — без треугольников.

Если граф  $G_i$  — без треугольников, то покажем, что граф  $G_{i+1}$  — также без треугольников.

Вершина  $w$  не может входить ни в один треугольник, т.к. никакая пара вершин  $w_j, w_k$  не соединена ребром.

По той же причине никакие три вершины  $v_j, w_k, w_l$  и  $w_j, w_k, w_l$  не образуют треугольник.

Если какие-то вершины  $v_j, v_k, v_l$  образуют треугольник, то и вершины  $v_j, v_k, v_l$  в графе  $G_i$  образуют треугольник, чего не может быть.

# Теорема Зыкова

**Доказательство.** 2. Верно равенство  $\chi(G_i) = i$ .

В самом деле,  $\chi(G_2) = 2$ .

Если  $\chi(G_i) = i$ , то покажем, что  $\chi(G_{i+1}) = i + 1$ .

Пусть  $\rho$  — раскраска графа  $G_i$  в  $i$  цветов. Положим

$\rho(w_j) = \rho(v_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\rho(w) = i + 1$ . Поэтому

$\chi(G_{i+1}) \leq i + 1$ .

Если найдется раскраска  $\rho'$  графа  $G_{i+1}$  в  $i$  цветов, то на раскраску вершин  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , уйдет не более  $(i - 1)$  цветов (т.к. все вершины  $w_j$  смежны с вершиной  $w$ ).

Тогда  $\rho$ ,  $\rho(v_j) = \rho'(w_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — раскраска графа  $G_i$  в  $(i - 1)$  цветов, чего не может быть.

□

# Задачи

1. Найти хроматическое число графа  $G = (V, E)$ , если:

- 1)  $G = K_4 - e$ , где  $e$  — произвольное ребро графа  $K_4$ ;
- 2)  $G = K_4 - \{e_1, e_2\}$ , где  $e_1, e_2$  — произвольные различные ребра графа  $K_4$  (рассмотреть все возможные случаи);
- 3)  $G = K_5 - e$ , где  $e$  — произвольное ребро графа  $K_5$ ;
- 4)  $G = K_5 - \{e_1, e_2\}$ , где  $e_1, e_2$  — произвольные различные ребра графа  $K_5$  (рассмотреть все возможные случаи).

2. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа  $G = (V, E)$ , чтобы оставшийся граф можно было раскрасить в  $k$  цветов, если:

- 1)  $G = K_4, k = 2$ ;
- 2)  $G = K_5, k = 3$ ;
- 3)  $G = K_6, k = 4$ ;
- 4)  $G$  состоит из 7 вершин, занумерованных числами от 0 до 6, и ребер вида  $(i, i + 1 \pmod{7}), (i, i + 2 \pmod{7}), i = 0, 1, \dots, 6, k = 3$ .

# Задачи

3. Найти бесконечную последовательность графов  $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_i = (V_i, E_i)$ ,  $|V_{i+1}| > |V_i|$ , в каждом из которых степени вершин равны трем, при этом  $\chi(G_i) = 3$ ,  $i = 1, 2, \dots$

4.

## Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 235–243.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 152–153.
3. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 359–361



Конец лекции