Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 9

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\&: \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \mathbin{\&} \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \mathbin{\&} \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\vee: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\to: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \quad \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Все эти правила можно напрямую перенести в логику предикатов, сохранив их написание и смысл

Вступление

А как устроить правила преобразования формул, начинающихся с $\forall$ и $\exists$?

Пример: $\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$?

$$\langle\ |\ \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})\rangle$$

$\downarrow$ ← избавляемся от импликации ($R\!\to$)

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})\ |\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\rangle$$

$\downarrow ?$ ← **подставляем** константу **c** на место x

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{c})\ |\ \mathrm{P}(\mathbf{c})\rangle$$

Следует строго определить термин “**подставляем**”

Подстановки

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки θ: $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- $\theta(\mathtt{x}_\mathtt{i}) = t_i \qquad (1 \leq i \leq n)$

Пара $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ называется связкой

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathsf{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула),
и θ — подстановка.

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathbf{c}\theta = \mathbf{c} & (\mathbf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \dots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \,\&\, \psi)\theta = (\varphi\theta \,\&\, \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}),\ \text{если } \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

Подстановки

Пример применения подстановки к формуле

$\varphi = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$
$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathrm{x}, \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{z})\}$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в φ

$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Все выделенные вхождения заменяются согласно θ

$\varphi\theta = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(\mathrm{x}) = \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists y\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

“если у каждого есть дед, то у x тоже есть дед”

Очевидно, что $\models \varphi(\mathrm{x})$

$\varphi(\mathrm{x})\, \{\mathrm{x}/\mathrm{y}\} = \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$

“если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед”

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма t в формуле φ, если ни одно свободное вхождение переменной $\mathtt{x}$ не лежит в областях действия кванторов, связывающих переменные из Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ — правильная для формулы φ, если для каждой связки $\mathtt{x}_i/t_i$ переменная $\mathtt{x}_i$ свободна для терма t_i в формуле φ

Например, для формулы $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$ — правильная: все вхождения u и v в подставляемый терм свободны
- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ — неправильная: вхождение y в подставляемый терм оказывается связанным