Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

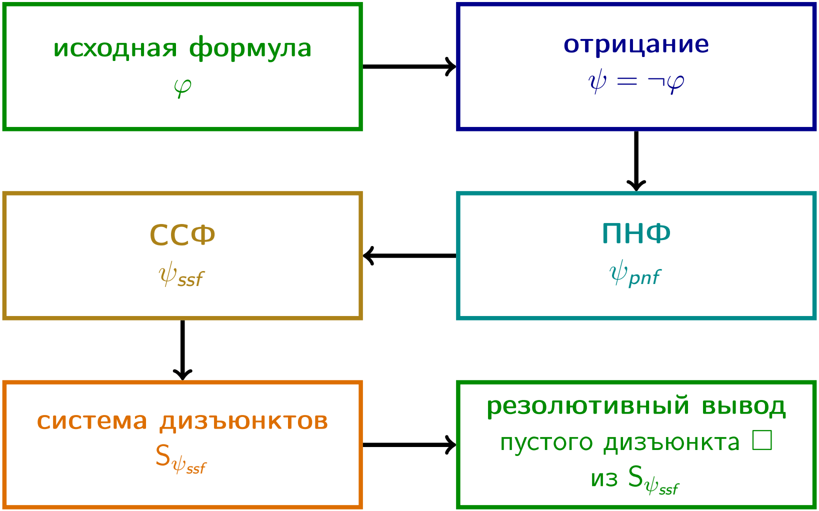
Блок 21

Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

исходная формула
φ

отрицание
$\psi = \neg\varphi$

ПНФ
ψ_{pnf}

ССФ
ψ_{ssf}

система дизъюнктов
$S_{\psi_{ssf}}$

резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\Box$
из $S_{\psi_{ssf}}$

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Если E — логическое выражение и θ — подстановка, то:

- $E\theta$ — пример выражения E
- если $\mathsf{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- если $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Var}$ — биекция, то
  - θ — переименование
  - $E\theta$ — вариант выражения E

Ещё немного определений

Пример

Рассмотрим выражение $E = \mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathbf{f}(\mathtt{y})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathtt{y}, \mathbf{c})$ и подстановки

$$\begin{aligned}
\theta &= \{\mathtt{x}/\mathtt{u}, \mathtt{y}/\mathtt{z}, \mathtt{u}/\mathtt{x}, \mathtt{z}/\mathtt{y}\} \\
\eta &= \{\mathtt{x}/\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathtt{y}/\mathtt{z}\} \\
\mu &= \{\mathtt{z}/\mathbf{c}\} \\
\varepsilon &= \{\}
\end{aligned}$$

Тогда:

- $E\eta = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathtt{z})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathtt{z}, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- $E\eta\mu = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- подстановки θ и ε — переименования
- $E\theta = \mathrm{P}(\mathtt{u}, \mathbf{f}(\mathtt{z})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathtt{z}, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Правило резолюции

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x},\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad\qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathrm{y}),\mathrm{z})}{\neg R(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}),\mathrm{y}),\mathbf{f}(\mathrm{y})),\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}),\mathrm{y})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}),\mathrm{y}))}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}),\mathrm{y}),\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{y})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathrm{y})),\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathrm{y}),\mathrm{z}))$$

резольвента: $(\neg\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x},\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{x}))\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{P(x, \mathbf{f}(y)) \lor \neg R(\mathbf{g}(x, z), \mathbf{f}(z)) \qquad Q(x) \lor R(y, x) \lor \neg P(\mathbf{g}(z, y), z)}{P(\mathbf{f}(z), \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(z), z))) \lor Q(\mathbf{f}(z)) \lor \neg P(\mathbf{g}(z, \mathbf{g}(\mathbf{f}(z), z)), z)}$$

резольвента

$$\theta = \{x/\mathbf{f}(z),\ y/\mathbf{g}(\mathbf{f}(z), z)\} \in \text{НОУ}(R(\mathbf{g}(x, z), \mathbf{f}(z)), R(y, x))$$

резольвента: $(P(x, \mathbf{f}(y)) \lor Q(x) \lor \neg P(\mathbf{g}(z, y), z))\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$P(\mathbf{f}(x), y)$ $\qquad$ $\neg P(u, \mathbf{g}(v))$

$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(???)\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{[\mathbb{f} \vee]\; P(\mathbf{f}(x), y) \qquad\qquad \neg P(u, \mathbf{g}(v))\; [\vee\, \mathbb{f}]}{\square}$$

резольвента

$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(\mathbb{f} \vee \mathbb{f})\theta$

Пара полезных вспомогательных утверждений

Утверждение(*монотонность логического следования*)
Для любых множеств предложений Γ, Δ
и любого предложения φ верно:

$$\Gamma \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \models \varphi$$

Доказательство. Пусть $\Gamma \models \varphi$. Тогда $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \Delta \;\Rightarrow\; \mathcal{I} \models \Gamma \;\Rightarrow\; \mathcal{I} \models \varphi$ ▼

Утверждение(*монотонность дизъюнкции*)
Для любого множества предложений Γ
и любых предложений $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})$, $\psi(\widetilde{\mathrm{x}^n})$ верно:

$$\Gamma \models \forall \widetilde{\mathrm{x}^n}\, \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \forall \widetilde{\mathrm{x}^n}\, (\varphi \vee \psi)$$

Доказательство. Пусть $\Gamma \models \forall \widetilde{\mathrm{x}^n}\, \varphi$. Тогда

$\mathcal{I} \models \Gamma \Rightarrow$

$\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathrm{x}^n}\, \varphi \Rightarrow$

для любого набора предметов $\widetilde{d^n}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}] \Rightarrow$

для любого набора предметов $\widetilde{d^n}$ верно $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d^n}] \Rightarrow$

$\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathrm{x}^n}\, (\varphi \vee \psi)$ ▼

Правило резолюции

Лемма(*о корректности правила резолюции*)
Если D **— резольвента дизъюнктов** D_1, D_2, **то** $D_1, D_2 \models D$

Доказательство. (кванторные приставки опущены)

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$,
$D = (D_1' \vee D_2')\theta$ и $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда будет верно следующее:

$$\begin{array}{llll}
D_1 \models D_1\theta & & D_2 \models D_2\theta \\
D_1 \models D_1'\theta \vee L_1\theta & & D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta \\
D_1 \models D_1'\theta \vee L & & D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L \\
D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L & & D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L \\
D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L & & D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L
\end{array}$$

Заметим, что если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$ (очевидно?)

Тогда $D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D$ ▼

Правило склейки

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести $\square$ из невыполнимой системы

Например:

$$
\begin{gathered}
P(x) \vee P(\mathbf{c}) \\
\neg P(\mathbf{c}) \vee \neg P(y)
\end{gathered}
$$

Система из таких двух дизъюнктов невыполнима, но все резольвенты, резольвенты резольвент, ... этих дизъюнктов имеют ровно две литеры

Необходимо иметь правило, которое позволяет работать и с такими системами дизъюнктов

Правило склейки

Правило склейки

$$\frac{D \lor L_1 \lor L_2}{(D \lor L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \lor L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \lor L_1 \lor L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Правило склейки

Пример

$$\overset{\text{склеиваемая пара}}{}$$

$$\frac{P(x) \quad \vee \quad \neg R(y, z, \mathbf{f}(x)) \quad \vee \quad \neg R(x, \mathbf{f}(\mathbf{c}), z)}{P(\mathbf{c}) \vee \neg R(\mathbf{c}, \mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{f}(\mathbf{c}))}$$

склейка

$$\theta = \{x/\mathbf{c}, y/\mathbf{c}, z/\mathbf{f}(\mathbf{c})\} \in \text{НОУ}(\neg R(y, z, \mathbf{f}(x)), \neg R(x, \mathbf{f}(\mathbf{c}), z))$$

склейка: $(P(x) \vee \neg R(y, z, \mathbf{f}(x)))\theta$

Лемма(*о корректности правила склейки*)

Если D **— склейка дизъюнкта** D_1**, то** $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$\mathrm{D}_1, \ \ldots, \ \mathrm{D}_i, \ \ldots, \ \mathrm{D}_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводим из S, если существует
резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathtt{x}) \\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x})) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathbf{g}(\mathtt{x})) \\ \neg\mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u}) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

$$\begin{array}{rl} \text{вариант} & \mathrm{P}(\mathtt{x}_1) \\ \text{вариант} & \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}_2)) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}_2, \mathbf{g}(\mathtt{x}_2)) \\ \text{резольвента} & \mathrm{R}(\mathtt{x}_3, \mathbf{g}(\mathtt{x}_3)) \\ \text{вариант} & \neg\mathrm{R}(\mathtt{x}_4, \mathtt{u}_4) \\ \text{резольвента} & \square \end{array}$$

Следовательно, $\square$ резолютивно выводим из системы S

Резолютивный вывод

Другой пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \neg P(\mathsf{f}(x), z) \vee \neg P(y, y) \\ P(x, \mathsf{f}(y)) \vee R(y) \\ \neg R(y) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

вариант	$P(x_1, \mathsf{f}(y_1)) \vee R(y_1)$
вариант	$\neg R(y_2)$
резольвента	$P(x_3, \mathsf{f}(y_3))$
вариант	$\neg P(\mathsf{f}(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
склейка	$\neg P(\mathsf{f}(x_5), \mathsf{f}(x_5))$
резольвента	$\square$

Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например: $S = \{\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))\}$

НОУ$(\mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S невыполнима:

у формул $\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})$ и $\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))$ **нет общих моделей**

К **вариантам** дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{\mathrm{x}_1/\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}_1), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$\forall \mathrm{x}\ \varphi \sim \forall \mathrm{y}\ (\varphi\,\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\})$, если <...>

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод успешен,
если он оканчивается пустым дизъюнктом ($\Box$)

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением:

- предположим, что
  исходная система дизъюнктов выполнима
- тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода,
  также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов
  есть тождественно ложный ($\Box$), а значит,
  расширенная система дизъюнктов невыполнима
- полученное противоречие
  опровергает выполнимость исходной системы
  (*доказывает невыполнимость методом “от противного”*)

Ещё одно полезное вспомогательное утверждение

Утверждение(*транзитивность логического следования*)
Для любого множества предложений Γ и любых предложений $\psi_1, \dots, \psi_k, \varphi$ верно:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \models \psi_1 \\ \dots \\ \Gamma \models \psi_k \\ \psi_1, \dots, \psi_k \models \varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

Доказательство. Пусть верны все соотношения слева от “$\Rightarrow$”. Тогда

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \text{ и } \dots \text{ и } \mathcal{I} \models \psi_k$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \varphi \ \blacktriangledown$$

Корректность резолютивного вывода

Теорема(*о корректности резолютивного вывода*)
Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим $\square$, то система S невыполнима

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносилен D, а значит, $\mathrm{D} \models \mathrm{D}'$

По *корректности правила резолюции*:
если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2, то $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \models \mathrm{D}''$

По *корректности правила склейки*:
если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3, то $\mathrm{D}_3 \models \mathrm{D}'''$

Значит, по *транзитивности логического следования*,
любой дизъюнкт, выводимый из S,
является логическим следствием S, и в частности, $S \models \square$

При этом дизъюнкт $\square$ не имеет ни одной модели,
а значит, и система S не имеет ни одной модели ▼