Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 11

Машины Тьюринга
Теорема Чёрча
Как устроены математические доказательства
Логические исчисления

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Напоминание

Массовая задача (*проблема*) — это отображение $\mathfrak{T} : \mathfrak{I} \to \mathfrak{O}$ *входных данных* в *выходные* (*правильные ответы*)

Алгоритм — это особая совокупность действий, применяющаяся к входным данным для получения выходных данных

Алгоритмом $\mathcal{A}$ *реализуется* частично определённое отображение $\overline{\mathcal{A}}$ входных данных в выходные (*вычисляемые ответы*)

Алгоритм $\mathcal{A}$ *решает* задачу $\mathfrak{T}$, если $\overline{\mathcal{A}} = \mathfrak{T}$

Задача распознавания $\mathfrak{T}_1 : \mathfrak{I}_1 \to \{1, 0\}$
m-сводится к задаче распознавания $\mathfrak{T}_2 : \mathfrak{I}_2 \to \{1, 0\}$,
если существует алгоритм $\mathcal{A}$, такой что
$\overline{\mathcal{A}} : \mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ — всюду определённое отображение и $\mathfrak{T}_1(\mathfrak{i}) = \mathfrak{T}_2(\overline{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}))$

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов алгоритмически неразрешима

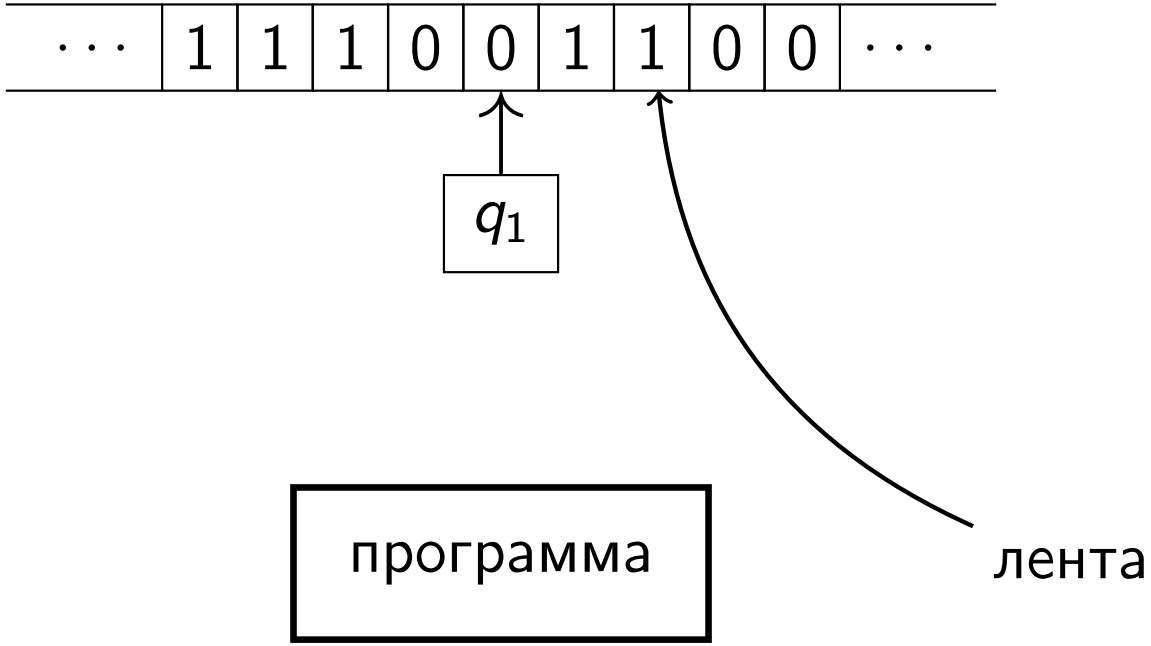
Согласно *теореме об m-сводимости*,
для обоснования теоремы Чёрча достаточно предложить

- неразрешимую задачу $\mathfrak{T}$ и
- алгоритм $\mathcal{A}$,
  m-сводящий $\mathfrak{T}$ к проблеме общезначимости формул

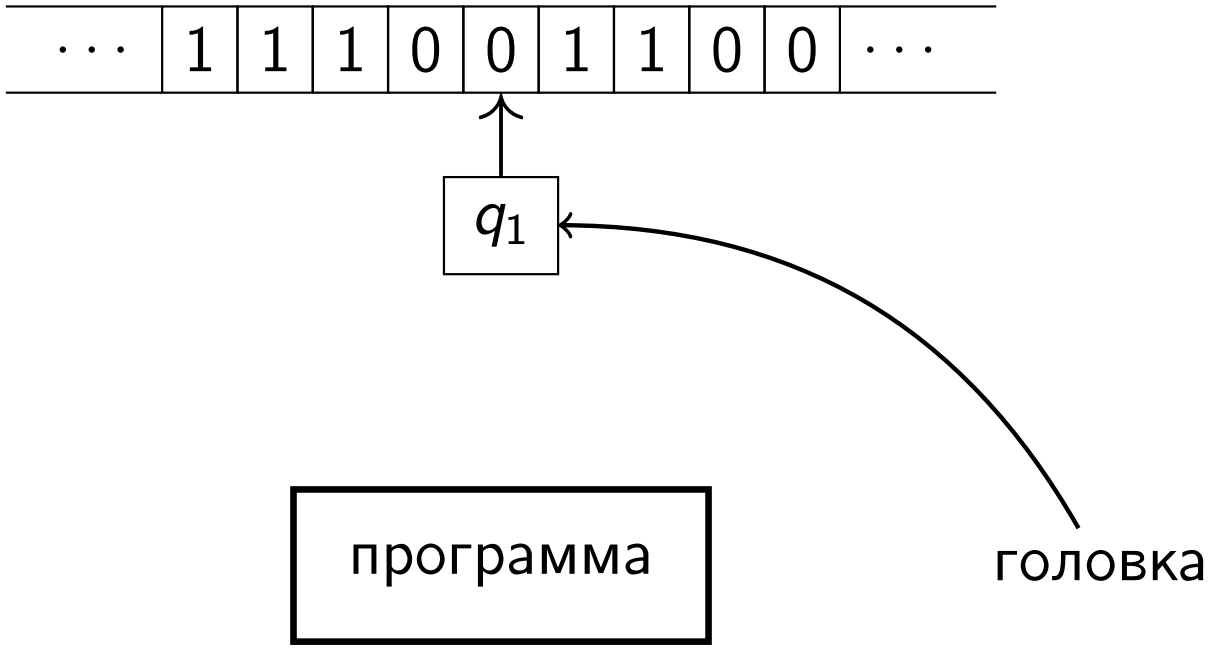
В качестве $\mathfrak{T}$ возьмём самую известную неразрешимую проблему:

проблему останова машин Тьюринга

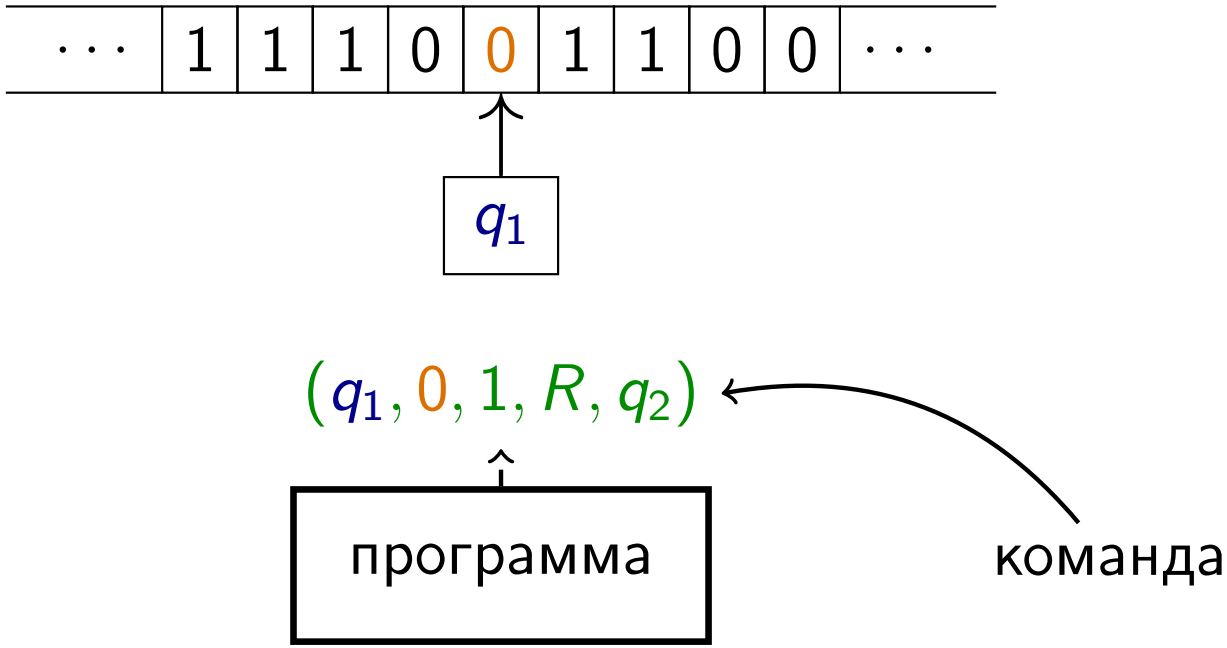
Машины Тьюринга



Машины Тьюринга



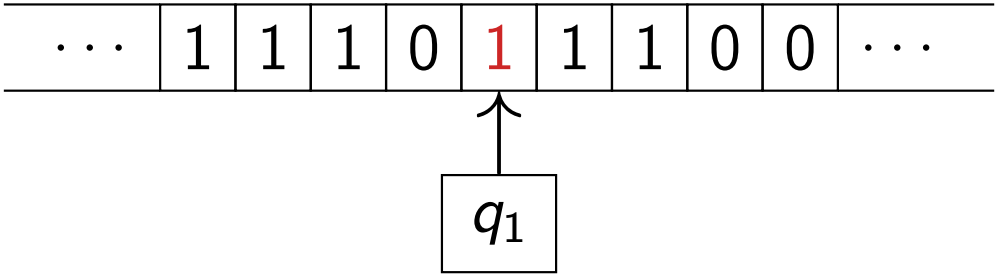
Машины Тьюринга



Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду

Машины Тьюринга

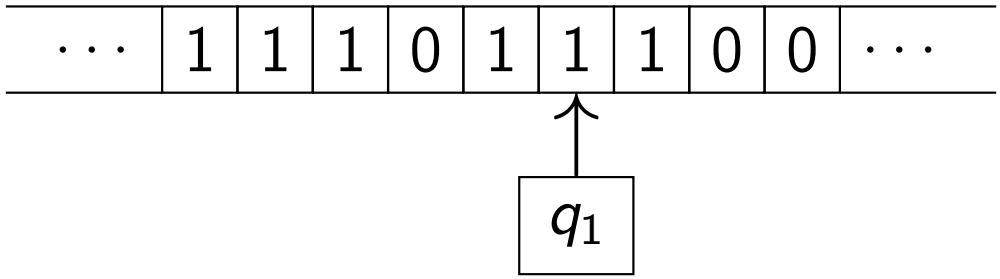


$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ

Машины Тьюринга

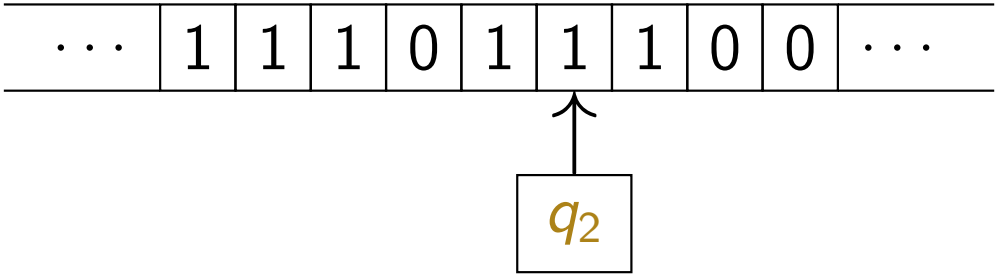


$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ
- сдвигаем головку

Машины Тьюринга



$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ
- сдвигаем головку
- меняем состояние

Машины Тьюринга

Определим всё с начала, по порядку и строго

Алфавит — это непустое конечное множество символов (букв)

Машина Тьюринга[1] (МТ) — это система $(\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где

- $\mathfrak{A}$ — алфавит ленты
- $\Lambda \in \mathfrak{A}$ — пустой символ
- $\mathcal{Q}$ — алфавит состояний
- $q_0, q_f \in \mathcal{Q}$ — соответственно начальное состояние и заключительное состояние
- $\mathcal{P} : (\mathcal{Q} \setminus \{q_f\}) \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \times \{L, R\} \times \mathcal{Q}$ — программа

Программа МТ также будет пониматься как множество команд:

$$(q, a, b, S, p) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}(q, a) = (b, S, p)$$

[1] "Машина Тьюринга" — это собирательный термин: придумано великое множество "примерно одинаковых" вариаций таких машин. В каждом конкретном случае принято выбирать вариацию, наиболее удобную для технических выкладок — что делается и здесь.

Машины Тьюринга

(МТ $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$)

Ленточное слово — это конечная последовательность букв из $\mathfrak{A}$

В записи слов принято опускать
разделители (запятые) между символами:

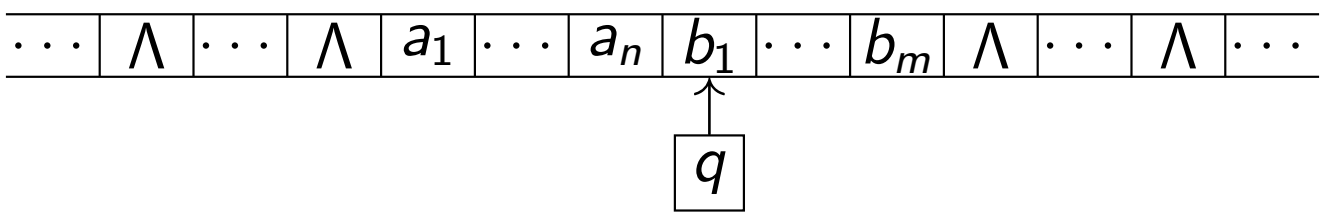
~~$x_1, x_2, \ldots, x_n$~~ $\qquad$ $x_1 x_2 \ldots x_n$

$\mathfrak{A}^*$ — множество всех ленточных слов

$\mathfrak{A}^+$ — множество всех непустых ленточных слов

Конфигурация машины Тьюринга — это набор (α, q, β),
где $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^+$ и $q \in \mathcal{Q}$

Пояснение: конфигурация $(a_1 \ldots a_n, q, b_1 \ldots b_m)$ означает, что МТ находится в состоянии q, на ленте записано слово $a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m$, окружённое пустыми символами, и обозревается символ b_1



Машины Тьюринга

(МТ $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$)

Способ преобразования конфигураций командой C можно задать как двуместное отношение $\to_C$ на множестве конфигураций

Если $C = (q, a, b, R, p)$, то $\to_C$ состоит из следующих пар:

$$(\alpha, q, ax\beta) \to_C (\alpha b, p, x\beta)$$
$$(\alpha, q, a) \to_C (\alpha b, p, \Lambda)$$

Если $C = (q, a, b, L, p)$, то $\to_C$ состоит из следующих пар:

$$(\alpha xy, q, a\beta) \to_C (\alpha x, p, yb\beta)$$
$$(y, q, a\beta) \to_C (\Lambda, p, yb\beta)$$

$(\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^*;\ x, y \in \mathfrak{A})$

Отношение переходов $\to_M$ МТ M — это объединение отношений $\to_C$, соответствующих всем командам M

Трасса МТ M — это последовательность конфигураций, в которой каждая пара соседних конфигураций σ_i, σ_{i+1} входит в отношение переходов: $\sigma_i \to_M \sigma_{i+1}$

Машины Тьюринга

(МТ $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$)

Конфигурация (α, q, β) — заключительная, если $q = q_f$

Вычисление МТ M на ленточном слове w — это трасса,

- начинающаяся в конфигурации $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ и
- либо бесконечная,
  либо оканчивающаяся в заключительной конфигурации

Утверждение. Для любой МТ M и любого ленточного слова w существует единственное вычисление M на w

Доказательство.

Достаточно заметить, что в соотношении $\sigma_i \to_M \sigma_{i+1}$

- σ_i может быть любой незаключительной конфигурацией и не может быть заключительной, и
- σ_{i+1} однозначно определяется конфигурацией σ_i ▼

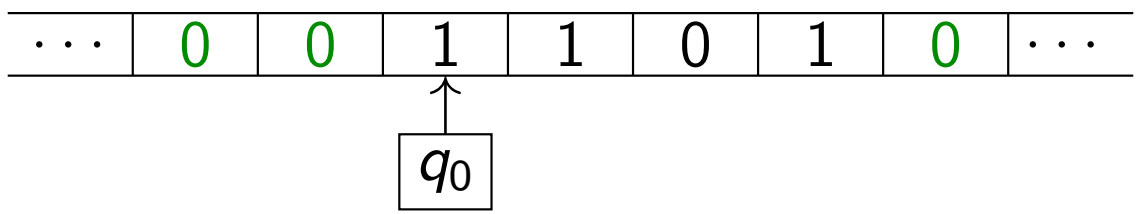
Машины Тьюринга

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$(0, \quad q_0, \quad 11010)$$



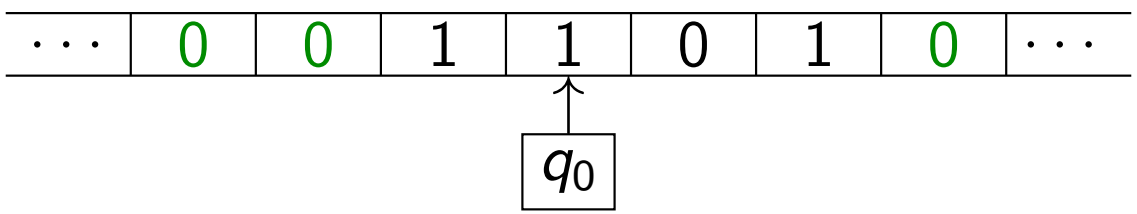
Машины Тьюринга

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, & q_0, & 11010) \\ (01, & q_0, & 1010) \end{array} \quad \rightarrow_M$$



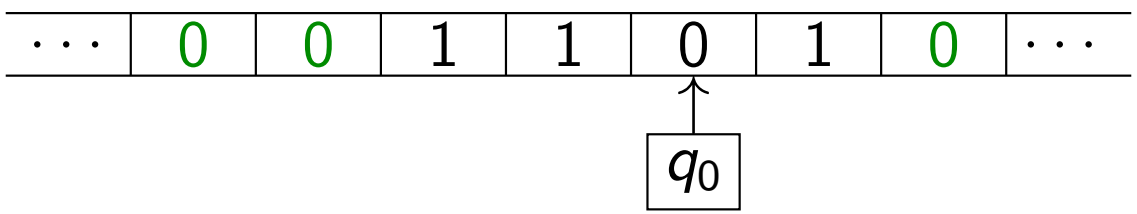
Машины Тьюринга

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{aligned} (0, &\ q_0, &\ 11010) &\quad \to_M \\ (01, &\ q_0, &\ 1010) &\quad \to_M \\ (011, &\ q_0, &\ 010) \end{aligned}$$



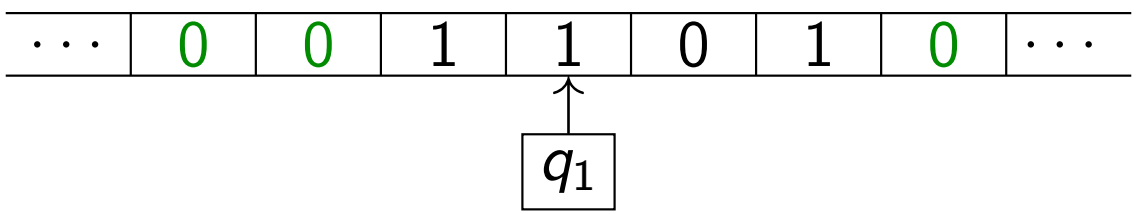
Машины Тьюринга

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{aligned}
(0, &\ q_0, &\ 11010) &\ \to_M \\
(01, &\ q_0, &\ 1010) &\ \to_M \\
(011, &\ q_0, &\ 010) &\ \to_M \\
(01, &\ q_1, &\ 1010)
\end{aligned}$$



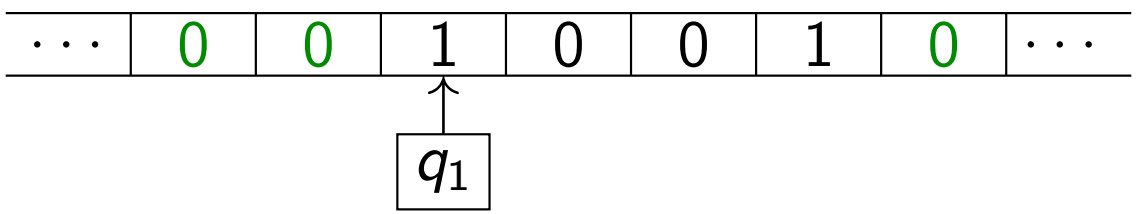
Машины Тьюринга

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{aligned}
(0, &\ q_0, &\ 11010) &\ \to_M \\
(01, &\ q_0, &\ 1010) &\ \to_M \\
(011, &\ q_0, &\ 010) &\ \to_M \\
(01, &\ q_1, &\ 1010) &\ \to_M \\
(0, &\ q_1, &\ 10010)
\end{aligned}$$



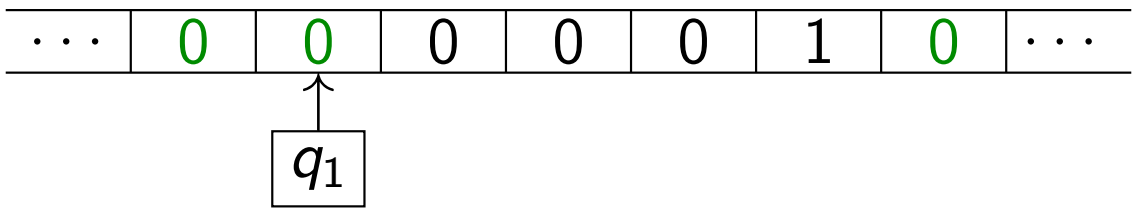
Машины Тьюринга

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{aligned}
(0, &\ q_0, &\ 11010) &\ \to_M \\
(01, &\ q_0, &\ 1010) &\ \to_M \\
(011, &\ q_0, &\ 010) &\ \to_M \\
(01, &\ q_1, &\ 1010) &\ \to_M \\
(0, &\ q_1, &\ 10010) &\ \to_M \\
(0, &\ q_1, &\ 000010)
\end{aligned}$$



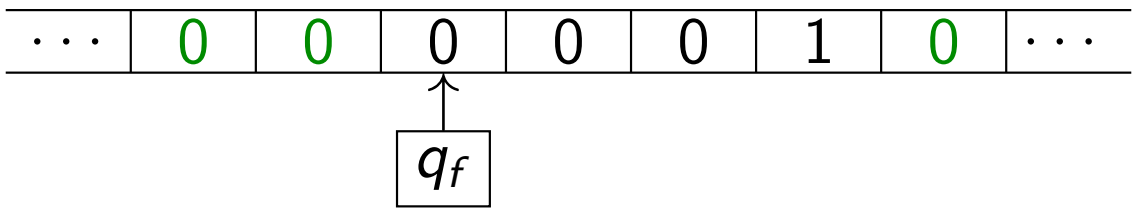
Машины Тьюринга

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{aligned}
(0, & \ q_0, & 11010) & \ \to_M \\
(01, & \ q_0, & 1010) & \ \to_M \\
(011, & \ q_0, & 010) & \ \to_M \\
(01, & \ q_1, & 1010) & \ \to_M \\
(0, & \ q_1, & 10010) & \ \to_M \\
(0, & \ q_1, & 000010) & \ \to_M \\
(00, & \ q_f, & 00010) &
\end{aligned}$$



Проблемы останова и общезначимости

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- на вход подаётся пара (M, w), где
  - M — произвольная машина Тьюринга и
  - w — произвольное ленточное слово (для M)
- $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ вычисление M на слове w конечно

Проблема общезначимости формул логики предикатов —[1] это задача распознавания **Valid** следующего вида:

- на вход подаётся пара (σ, φ), где
  - σ — произвольная сигнатура логики предикатов и
  - φ — произвольная формула сигнатуры σ
- $\mathbf{Valid}(\sigma, \varphi) = 1 \Leftrightarrow \models \varphi$

[1] Это та же проблема общезначимости, что обсуждалась в предыдущих лекциях, но определённая более строго

Проблемы останова и общезначимости

Лемма(*о сведéнии проблемы останова*)
Проблема останова машин Тьюринга m-сводима к проблеме общезначимости формул логики предикатов

Доказательство.

По *определению m-сводимости*,
достаточно предложить алгоритм преобразования произвольных МТ M и ленточного слова w в сигнатуру $\sigma_{M,w}$ и формулу $\varphi_{M,w}$ этой сигнатуры, такие что $\mathbf{Halt}(M, w) = \mathbf{Valid}(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})$

Сигнатуру $\sigma_{M,w}$ устроим так:

- Константы: $\mathfrak{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\bot\}$, где $\bot \notin \mathfrak{A} \cup \mathcal{Q}$
- Единственный функциональный символ: $\cdot^{(2)}$
  - Считаем этот символ ассоциативным вправо: $\mathtt{x} \cdot \mathtt{y} \cdot \mathtt{z} = \mathtt{x} \cdot (\mathtt{y} \cdot \mathtt{z})$
- Единственный предикатный символ: $\mathrm{Re}^{(3)}$

Доказательство леммы о сведéнии проблемы останова

$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\rightsquigarrow$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

Назовём конфигурацию σ достижимой, если
она содержится в вычислении M на w:

- Конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима
- Если конфигурация σ достижима и $\sigma \to_M \sigma'$,
  то конфигурация σ' достижима
- Других достижимых конфигураций нет

Тогда $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$
существует достижимая заключительная конфигурация

Ленточному слову $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ сопоставим терм

$$\tau_\alpha = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot \bot$$

Конфигурации $\sigma = (\alpha, q, \beta)$ МТ M сопоставим тройку термов
$\tau_\sigma = (\tau_{\alpha^-}, q, \tau_\beta)$, где α^- — зеркальный образ слова α:
если $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$, то $\alpha^- = a_k \dots a_2 a_1$

Фразе “конфигурация σ достижима” сопоставим атом $\mathrm{Re}(\tau_\sigma)$

Доказательство леммы о сведéнии проблемы останова

$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

Каждому правилу C, $C \in \mathcal{P}$, сопоставим формулу ψ_C:

- Если $C = (q, a, b, R, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{R1} \,\&\, \psi_C^{R2}$, где
$$\psi_C^{R1} = \forall\alpha\, \forall\beta\, \forall\mathtt{x}(\mathrm{Re}(\alpha, q, a \cdot \mathtt{x} \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(b \cdot \alpha, p, \mathtt{x} \cdot \beta))$$
$$\psi_C^{R2} = \forall\alpha\, (\mathrm{Re}(\alpha, q, a \cdot \bot) \to \mathrm{Re}(b \cdot \alpha, p, \Lambda \cdot \bot))$$
- Если $C = (q, a, b, L, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{L1} \,\&\, \psi_C^{L2}$, где
$$\psi_C^{L1} = \forall\alpha\, \forall\mathtt{x}\, \forall\beta\, \forall\mathtt{y}(\mathrm{Re}(\mathtt{y} \cdot \mathtt{x} \cdot \alpha, q, a \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(\mathtt{x} \cdot \alpha, p, \mathtt{y} \cdot b \cdot \beta))$$
$$\psi_C^{L2} = \forall\beta\, \forall\mathtt{y}(\mathrm{Re}(\mathtt{y} \cdot \bot, q, a \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(\Lambda \cdot \bot, p, \mathtt{y} \cdot b \cdot \beta))$$

По *определению отношения* $\to_C$,
если $\sigma \to_C \sigma'$, то $\psi_C \models \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \to \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$,
а значит, и $\psi_C, \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \models \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$

Программе $\mathcal{P}$ сопоставим формулу $\psi_\mathcal{P} = \mathop{\&}\limits_{C \in \mathcal{P}} \psi_C$

По *определению отношения* $\to_M$,
если $\sigma \to_M \sigma'$, то $\psi_\mathcal{P}, \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \models \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$

Доказательство леммы о сведéнии проблемы останова

$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

Подходящая формула $\varphi_{M,w}$ устроена так: $\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$, где

- $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$ ("конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима")
- $\psi_f = \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$
  ("существует достижимая заключительная конфигурация")

Покажем, что $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{Valid}(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}) = 1$

($\Leftarrow$): $\models \varphi_{M,w}$, а значит,
формула $\varphi_{M,w}$ выполняется в такой интерпретации $\mathcal{I}$:

- предметная область — все конфигурации M
- $\overline{\mathrm{Re}}(t_\alpha, t_q, t_\beta) = \mathbf{t} \Leftrightarrow$
  тройка (t_α, t_q, t_β) соответствует достижимой конфигурации

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_0 \,\&\, \psi_M$
(*это формульная запись определения достижимости*)

Значит, верно и $\mathcal{I} \models \psi_f$:
существует достижимая заключительная конфигурация

Доказательство леммы о сведéнии проблемы останова

$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

$\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$; $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$; $\psi_f = \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

Halt$(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ **Valid**$(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})$?

($\Rightarrow$): Рассмотрим (конечное) вычисление M на w:

$$(\Lambda, q_0, w\Lambda) \to_M (\alpha_1, q_1, \beta_1) \to_M \cdots \to_M (\alpha_n, q_n, \beta_n);\ q_n = q_f$$

Справедливы следующие соотношения:

- $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)})$
- $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)}), \psi_{\mathcal{P}} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_2, q_2, \beta_2)})$
- $\ldots$
- $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_{n-1}, q_{n-1}, \beta_{n-1})}), \psi_{\mathcal{P}} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)})$

При этом $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)}) \models \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

Следовательно, $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \psi_f$

По *теореме о логическом следствии*, верно и $\models \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$ ▼

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов алгоритмически неразрешима

Доказательство.

По *лемме о сведéнии проблемы останова*,
эта проблема (**Halt**) m-сводима
к проблеме общезначимости формул логики предикатов (**Valid**)

Известно, что проблема **Halt** алгоритмически неразрешима

Значит, по *теореме об m-сводимости*,
неразрешима и проблема **Valid** ▼

Интерлюдия

Утверждение. $\models A \,\&\, B \to A \vee B$

Попробуем обосновать это утверждение так,
как это принято в “обычных” математических доказательствах,
не используя особые методы
(семантических таблиц, резолюций, ...)

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно

Тогда верно $A \,\&\, B$ и неверно $A \vee B$

Так как верно $A \,\&\, B$, верно и A

Так как верно A, верно и $A \vee B$
что противоречит полученному выше

Значит, предположение неверно ▼

Действительно ли этим “доказательством”
доказывается утверждение?

Интерлюдия

Утверждение. $\models A \,\&\, B \to A \vee B$

Доказательство. Предположим, что верно $A \,\&\, B$

Тогда, в частности, верно A

Значит, верно и $A \vee B$

Так как в предположении о верности $A \,\&\, B$
обоснована верность $A \vee B$, то верно и $A \,\&\, B \to A \vee B$ ▼

Доказательство. Это очевидно ▼

Доказательство. Достаточно заметить, что
из $A \,\&\, B$ всегда следует $A \vee B$ ▼

Доказательство. В лекциях под словом “утверждение”
записываются только верные утверждения,
а значит, это утверждение верно ▼

Как отличить “правильные” доказательства от “неправильных”?

Что такое “доказательство”?

Как устроены доказательства

Прежде всего, **доказательство** — это текст,
(*явно или неявно*) начинающийся словом “Доказательство”
и оканчивающийся фразой “Что и требовалось доказать”

Основная часть доказательства — это
последовательность **высказываний**,
каждое из которых допускает ровно одну из двух оценок:
высказывание верно, или **высказывание неверно** — например,

- $2 \times 2 = 4$: *всем известно, что* это верно
- рассматриваемая последовательность чисел s монотонна:
  читатель может и не понимать, монотонна ли s,
  но каждая последовательность чисел либо монотонна, либо нет
- $P \neq NP$: никто не знает, совпадают ли классы сложности
  P и NP, но в любом случае они либо совпадают, либо нет

Как устроены доказательства

Высказывания доказательства особым образом
связаны между собой

Некоторые высказывания считаются
верными без доказательства,
и их можно записать в любом месте доказательства — например,

- аксиомы и определения:
  “отношение эквивалентности транзитивно, а значит ...”
- некоторые логические законы:
  “A либо верно, либо неверно, и третьего не дано”
- теоремы, доказанные ранее:
  “по теореме компактности Мальцева, ...”
- текущие предположения:
  “предположим, что формула φ необщезначима”

Как устроены доказательства

Высказывания доказательства особым образом связаны между собой

Остальные высказывания должны следовать друг за другом согласно особым **правилам** (*логическим законам*) — например,

- правило отделения, оно же modus ponens:
  если A верно и из A следует B, то B верно
- переход к частному:
  если A верно для **всех** предметов,
  то A верно и для **этого** предмета x
- приведение к абсурду, оно же рассуждение от противного:
  если из верности A следует, что B и верно, и неверно,
  то A неверно

В конце доказательства утверждения должна быть *так или иначе* записана фраза “Утверждение верно”, и эта фраза должна быть признана верной согласно используемым правилам (“Утверждение доказано”, “Что и требовалось доказать”, “Ч.т.д.”, “▼”, “■”, ...)

Как устроены доказательства

Вернёмся к примеру:

Утверждение. Формула $A \,\&\, B \to A \vee B$ обязательно верна

Доказательство. Предположим, что верно $A \,\&\, B$

Тогда, в частности, верно A

Значит, верно и $A \vee B$

Так как в предположении о верности $A \,\&\, B$
обоснована верность $A \vee B$, верно и $A \,\&\, B \to A \vee B$ ▼

Зелёный текст и знак "▼" — основная часть доказательства:
последовательность (*верных*) высказываний,
оканчивающаяся формулировкой утверждения

Остальной текст доказательства обозначает то,
как одни высказывания получаются из других
согласно правилам построения доказательства

Как устроены доказательства

Чтобы научиться отличать “правильные” доказательства от “неправильных”, следует определиться с тем,

- что такое **высказывание**
- по каким **правилам** из одних верных выскаызваний получаются другие верные высказывания
- какие высказывания **верны без доказательства**

Если определить эти понятия и свойства **математически строго**, то в результате получится система, в рамках которой можно строго определить понятие доказательства:

логическое исчисление

Логические исчисления

Логическое исчисление включает в себя

- алфавит: множество символов,
  используемых для записи высказываний
- синтаксис формул: правила,
  по которым из символов строятся высказывания (формулы)
- множество аксиом: формул, верных без доказательства
- множество правил вывода,
  согласно которым можно получать одни формулы из других

В исчислениях встречаются формулы
самых разнообразных и причудливых видов

В исчислениях высказываний формулами являются
формулы логики высказываний (или наборы таких формул)

В исчислениях предикатов формулами являются
формулы логики предикатов (или наборы таких формул)

Логические исчисления

Схема формулы — это запись, отличающаяся от формулы тем, что в произвольных местах вместо элементов формулы могут записываться параметры

Схемой Φ с параметрами $\widetilde{p}^k$ порождается любая формула

$$\Phi\,[\![p_1/v_1, \ldots, p_k/v_k]\!],$$

в которой на месте каждого вхождения каждого параметра p_i, $1 \leq i \leq k$, записано соответствующее значение v_i

Пример: $A \to (B \to A)$ — схема формулы с параметрами A и B, и если значения параметров — формулы логики высказываний, то

- схемой порождаются, например, формулы

$$\mathtt{x} \to (\mathtt{x} \to \mathtt{x}) \quad \text{и} \quad \mathtt{x} \vee \mathtt{y} \to (\mathtt{z} \,\&\, \mathtt{u} \to \mathtt{x} \vee \mathtt{y})$$

- схемой **не** порождаются, например, формулы

$$\mathtt{x} \,\&\, \mathtt{y} \quad \text{и} \quad \mathtt{x} \to (\mathtt{x} \to \mathtt{y})$$

Бесконечное множество **аксиом** исчисления нередко задаётся в виде конечного набора схем формул

Логические исчисления

Правило вывода местности n — это
$(n+1)$-местное отношение на множестве формул исчисления

Формула φ выводится из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$
по n-местному правилу R, если $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi) \in R$

Правило вывода местности n обычно записывается так:

$$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_n}{\Phi}, \qquad (*)$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ — схемы формул
с общим набором параметров $(p_1, \ldots, p_k)$

Правило, записанное в виде (*), — это множество наборов
$(\Phi_1 [\![p_1/v_1, \ldots, p_k/v_k]\!], \ldots, \Phi_n [\![p_1/v_1, \ldots, p_k/v_k]\!], \Phi [\![p_1/v_1, \ldots, p_k/v_k]\!])$
для всевозможных значений $v_1, \ldots, v_k$ параметров $p_1, \ldots, p_k$

Логические исчисления

Вывод формулы φ_k из множества формул Γ (в исчислении $\mathfrak{C}$) — это последовательность формул

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k,$$

в которой для каждой формулы φ_i, $1 \leq i \leq k$,
выполнено хотя бы одно из трёх условий:

1. $\varphi_i \in \Gamma$
2. φ_i — аксиома исчисления $\mathfrak{C}$
3. Существуют формулы $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_n}$ и n-местное правило вывода R исчисления $\mathfrak{C}$, такие что
   - $j_1 < i, \ldots, j_n < i$ и
   - φ_i получается из $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_n}$ по правилу R

Если существует вывод формулы φ из множества формул Γ,
то формула φ выводима из Γ
Если существует вывод $\mathcal{D}$ формулы φ из множества $\emptyset$,
то такой вывод называется **доказательством** формулы φ,
и сама формула называется доказуемой

Логические исчисления

Пример: резолютивное исчисление дизъюнктов

Формулы исчисления — дизъюнкты логики предикатов

Множество аксиом исчисления пусто

Два правила исчисления — *правило резолюции*, *правило склейки* и правило, позволяющее выписывать варианты дизъюнктов:

$$\frac{D_1, D_2}{D_r} \qquad \frac{D_1}{D_s} \qquad \frac{D_1}{D_v}$$

Параметры этих правил — D_1, D_2, D_r, D_s, D_v, значения — соответственно два дизъюнкта, *резольвента* этих дизъюнктов, *склейка* первого дизъюнкта и *вариант* первого дизъюнкта

Понятия вывода и выводимости *почти* совпадают с понятиями *резолютивного вывода* и *резолютивной выводимости*

Для самостоятельного размышления: а как устроено исчисление, соответствующее табличному выводу так же, как это исчисление дизъюнктов соответствует резолютивному выводу?