Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 1

Вступление:
- Что такое логика
- Несколько логических парадоксов
- Чего ожидать в лекциях

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Что такое логика

Логика[1] — это наука об общезначимых формах и средствах мысли, необходимых для рационального познания в любой области знания

Логика[2] — это нормативная наука о формах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка

Логика[3] — это наука, которая изучает, каким образом мы выражаем мысли, делаем умозаключения, и как всё это можно представить формально

Логика[4] — это наука о правильных способах рассуждения, то есть таких, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты

---

1 Философский энциклопедический словарь.
2 Бочаров, Маркин. Основы логики.
3 Метакидес, Нероуд. Принципы логики и логического программирования.
4 Успенский, Верещагин, Плиско. Вводный курс математической логики.

Что такое логика

Формальная логика[1] — это наука о законах знания,
полученного из ранее установленных и проверенных истин,
без обращения в каждом конкретном случае к опыту,
а только в результате применения законов и правил мышления

Формальная логика[2] — сейчас это синоним логики

Математическая логика[3] — это
1) логика, развиваемая с помощью математических методов,
2) логика, используемая в математике

1 Кондаков. Логический словарь-справочник.
2 Философский энциклопедический словарь.
3 Клини. Математическая логика.

Что такое логика

Формальная математическая логика изучает

- законы причинно-следственной связи в окружающем мире
- проявление этих законов в рациональном мышлении человека
- отражение этих законов в языках,
  - как естественных,
  - так и искусственных
- формы, в которых проявляются эти законы,
  вне зависимости от содержания (смысла)
  тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся

Что такое логика

Например:

Из того, что
все люди смертны
и
Сократ — человек
следует, что
Сократ смертен

Из того, что
у змей нет лап
и
уж — змея
следует, что
у ужа нет лап

Из того, что
каждый металл — проводник
и
ртуть — металл
следует, что
ртуть — проводник

Эти высказывания относятся к совершенно разным областям
и имеют совершенно разный смысл, но в целом одинаковую форму

Что такое логика

Например:

Вот эта форма:

Из того, что
каждый предмет, обладающий свойством A
обладает и свойством B
и
предмет c обладает свойством A
следует, что
предмет c обладает свойством B

Это один из законов логики, не зависящий от смысла A, B и **c**

Подходящим способом интерпретируя A, B и **c** в этом законе, можно получить из него упомянутые высказывания и многие другие

При этом сам закон не зависит от выбранной интерпретации

Что такое логика

Законами логики задаются универсальные способы преобразования информации из одной формы в другую

Например:

«**У змей нет лап, и уж — змея**»

Упомянутый закон логики позволяет извлечь информацию, «скрытую» в этой фразе (форме), и представить её в другой форме:

«**У ужа нет лап**»

Следует иметь в виду, что при помощи законов логики **нельзя** получить новую информацию, а **можно** только преобразовать форму имеющейся информации

Иллюстрация того, насколько полезным может быть умение изменять форму информации:

«x **— наибольший простой делитель числá** $23\,082\,745\,709$»

и

«$x = 3221$» —

это две формы задания одного и того же числá x

Сто́ит ли уделять этому столько внимания?

Логика скрыта в основе многих явлений, процессов и задач, связанных с языком, рациональным познанием и умозаключениями

В лекциях — там, где это будет наиболее наглядно — иногда будут приводиться общие рассуждения и конкретные примеры по этому поводу

Но уже сейчас можно задуматься о простых для восприятия проблемах, с которыми непросто справиться без должных знаний
из области логики:

логических парадоксах

Несколько логических парадоксов

Парадокс лжеца

(*думаю, что все знают этот парадокс; а кто не знает — запоминайте*)

Это утверждение ложно

Ложно ли утверждение выше?

Несколько логических парадоксов

Парадокс Рассела

(*а этот парадокс должны знать все математики*)

Пусть Ω — множество всех множеств,
не содержащих себя в качестве элемента:

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \notin \omega\}$$

Верно ли соотношение $\Omega \in \Omega$?

Несколько логических парадоксов

Парадокс утренней звезды

Венера видна ранним утром,
и поэтому её называют «утренней звездой»

Венера видна поздним вечером,
и поэтому её называют «вечерней звездой»

Означает ли это, что утренняя звезда
видна поздним вечером?

Несколько логических парадоксов

Парадокс лысого

(*он же «парадокс кучи»*)

Если у человека нет ни одного волоса, то он лыс

Если у лысого вырастет ещё один волосок, то он останется лысым

Значит, все люди лысые?

Несколько логических парадоксов

Парадокс пьяницы

Теорема. Все, кто здесь присутствует, пьют.

Доказательство.

Здесь присутствует человек, такой что если он пьёт, то все пьют. (*)

Я пью.

Значит, все пьют. ▼

Лемма. (*)

Доказательство.

Если все в этой комнате пьют,
то этот человек — любой из присутствующих (например, я).

Иначе один из присутствующих (**x**) — непьющий.

Пусть A — утверждение «**x** пьёт», и B — утверждение «все пьют».

Утверждение A ложно, а значит, утверждение «если A, то B» истинно. ▼

Где скрыта ошибка, и почему это ошибка?

Несколько логических парадоксов

Парадокс морской битвы

Флотоводец обратился к прорицателю с вопросом,
состоится ли завтра морская битва.
Прорицатель ответил: «Битва завтра состоится».

На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море.
Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя
вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным.

Прорицатель ответил:
«Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко.
Сегодня это молоко уже не свежее,
но они не просят вернуть им деньги обратно.
Мой прогноз тоже был верным вчера,
и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня».

Прав ли прорицатель?

Парадоксы неизбежны,
но их влияние можно ограничить

Чтобы это ограничение было возможно и неоспоримо, необходимо научиться

- анализировать форму и смысл высказываний, составляющих парадокс, и, более того
- делать это со всей (математической) строгостью

Для этого (*как и для многого другого*) и предназначена

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

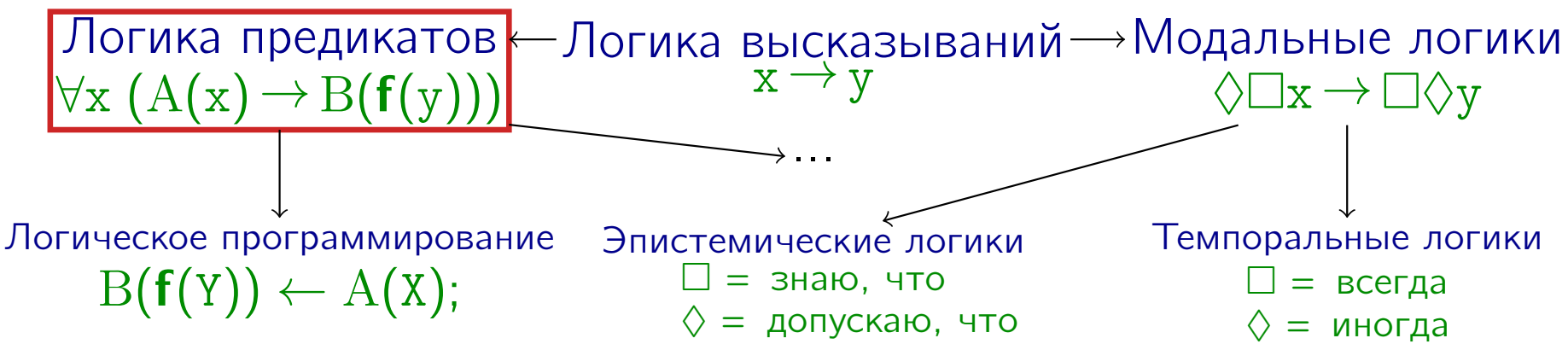
Чего ожидать в курсе

Использование логики, как правило, начинается с выбора языка записи интересующих высказываний

Таких языков существует великое множество, в зависимости от выбранного класса высказываний и целевых средств их анализа

В математической логике обычно используются искусственные формальные языки (языки формул)

В курсе встретятся следующие разделы логики с соответствующими формальными языками:



Чего ожидать в курсе

Основная задача логики, вокруг которой строится практически весь курс лекций — это задача проверки логического следования:

Правда ли, что высказывание A
обязательно следует из совокупности высказываний Γ?

$$\Gamma \models \mathrm{A}?$$

Эта задача возникает во многих областях разумной деятельности — например:

- Экспертные системы:
  - Γ — база знаний, A — запрос,
  - аппарат применения логических законов — ядро системы
- Средства автоматизации доказательства теорем:
  - Γ — аксиомы, леммы и т.п., A — формулировка теоремы
  - аппарат применения логических законов — ядро средства
- Логическое программирование:
  - Γ — подпрограмма, A — её вызов,
  - логические законы — это средство интерпретации программ

Чего ожидать в курсе

Отдельно будет показано, что
проверка логического следования — это практически то же самое, что и проверка общезначимости (тождественной истинности):

Правда ли, что высказывание A — абсолютная истина?

$$\models \mathrm{A}\textbf{?}$$

В курсе будут обсуждаться два известных логических метода проверки общезначимости формул, каждый из которых по-своему раскрывает некоторые разделы и особенности устройства логики:

- метод семантических таблиц,
  универсальный и идеологически простой
- метод резолюций,
  специальный для логики предикатов и эффективный,
  и лежащий в основе интерпретаторов логических программ

Чего ожидать в курсе

Метод резолюций, применяющийся для ответа на вопрос «$\Gamma \models A?$», лежит в основе логической парадигмы программирования:

- Совокупность высказываний Γ образует логическую программу
- Высказывание A представляет собой входные данные: запрос к программе
- Справедливость соотношения $\Gamma \models A$ отвечает успешности выполнения программы

Чтобы такой язык программирования был полезным, потребуется ограничить язык логических формул и способ применения метода резолюций так, чтобы обеспечить одновременно

- возможность пошаговой интерпретации формул,
- алгоритмическую полноту языка и
- удобство его использования

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\underbrace{\text{Если будете прогуливать лекции, то ничего хорошего из этого не выйдет}}_{A}$$

Можно ли сказать, что это «простое высказывание»?

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\rightarrow$$

Здесь есть причинно-следственная связь . . .

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\mathtt{A} \rightarrow \quad \mathtt{B}$$

. . . между двумя простыми высказываниями

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

А одно из высказываний можно сделать ещё проще

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \to \neg B$$

Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то
очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

Булева алгебра: значение формулы — это булева функция:

A	B	$A \to \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логика высказываний: **?**

Основные три составляющие формального языка,
которые дальше будут введены и для языка логики высказываний:

- алфавит: набор символов, используемых в языке
- синтаксис: правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)
- семантика: значение этих высказываний

Логика высказываний: алфавит

Алфавит логики высказываний состоит из следующих символов:

1. Пропозициональные переменные
   - Будем считать, что в алфавите содержится счётное число таких переменных
   - Var — множество всех пропозициональных переменных

2. Логические связки:

Конъюнкция	(логическое И):	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ):	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ):	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО):	$\rightarrow$

3. Скобки:

$$(\quad)$$

Синтаксис и БНФ

Синтаксис:

- *σύνταξις* (древнегреческий) — строй, организация, конструкция[1]
- система языковых категорий, относящихся к соединениям слов и строению предложений[2]

Для задания синтаксиса в курсе будут использоваться формы Бэкуса-Наура (БНФ):

что-то ::= *запись1* | *запись2* | ... | *записьN*

Прочтение такой БНФ:

- *Запись1* — это *что-то*
- *Запись2* — это *что-то*

  ...
- *ЗаписьN* — это *что-то*
- Других способов записи *чего-то* нет

1 Дворецкий. Древнегреческо-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Логика высказываний: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики высказываний:

$$\varphi \ ::= \ \mathtt{x} \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi),$$

где φ — формула и $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$

Формула вида $\mathtt{x}$, $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$, называется атомарной (атомом),
а остальные формулы $((\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi))$ — составными

$\varphi = \psi$ — так в курсе будет обозначаться
посимвольное (синтаксическое) совпадение формул φ и ψ

Приоритет связок по убыванию: $\neg$, затем $\&$, затем $\vee$, затем $\to$

Скобки в записи формул можно опускать согласно приоритету связок,
а также согласно ассоциативности связок $\&$ и $\vee$:

$$A \,\&\, \neg B \,\&\, C \to D \vee E = ((A \,\&\, ((\neg B) \,\&\, C)) \to (D \vee E))$$

Логика высказываний: семантика

Семантика:

- $\sigma\eta\mu\alpha\nu\tau\upsilon\kappa\acute{o}\varsigma$ (древнегреческий) — обозначающий, значимый[1]
- значение, смысл языковой единицы[2]

Основные логические значения, на которых основана семантика формул: $\mathbb{t}$ — истина; $\mathbb{f}$ — ложь

Значение формулы однозначно определяется значениями её атомов

Значение $\mathcal{I}(\mathtt{x})$ атома $\mathtt{x}$ задаётся интерпретацией $\mathcal{I} : \mathrm{Var} \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$

Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ задаётся так:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\varphi \,\&\, \psi) = \mathbb{t} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbb{t} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \to \psi) = \mathbb{t} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathbb{t} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f}
\end{aligned}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \quad (\text{формула } \varphi \text{ выполняется в } \mathcal{I}) \\
\mathcal{I} \not\models \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} \quad (\text{формула } \varphi \text{ не выполняется в } \mathcal{I})
\end{aligned}$$

1 Дворецкий. Древнегреческо-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Логика высказываний: семантика

Пример

$\mathrm{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\}$ $\qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$, $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание «Я прогуливаю лекции»

$\mathtt{B}$ — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда $\mathcal{I}$ — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал

«Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего», **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$\mathrm{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\}$ $\qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$, $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание «Я прогуливаю лекции»

$\mathtt{B}$ — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда $\mathcal{I}$ — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$: из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал

«Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего», **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$\mathrm{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\}$ $\qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t}$, $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$)

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t}$ *и* $\mathcal{I}(\neg\mathtt{B}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание «Я прогуливаю лекции»

$\mathtt{B}$ — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда $\mathcal{I}$ — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t}$: я прогуливаю лекции

$\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал

«Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего», **неправ**

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 3

Логика предикатов:
синтаксис, семантика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен он не сдаст

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен он не сдаст

логика высказываний:

$$\mathrm{Shirk} \rightarrow \neg \mathrm{Pass}$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен он не сдаст

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Pass}(x))$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен не сдаст его сосед

логика предикатов:

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Pass}(\mathbf{neighbour}(x)))$$

Логика предикатов изучает законы
причинно-следственной зависимости между утверждениями,
основанными на **отношениях** между произвольными предметами

Формальный язык логики предикатов
ориентирован на описание таких отношений

Немного о названии «логика предикатов»

Предикат:

- preadicatum (латинский) — сказанное (сказуемое), объявленное[1]
- понятие, определяющее предмет суждения (субъект)[2]

Кто-то прогуливает лекцию

(*субъект*) (*предикат*) (*объект*)

Чуть более общо и развёрнуто, предикат — это

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

1 Дворецкий. Латинско-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Немного о названии «логика предикатов»

классическая
логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

II

логика

предикатов

первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

III

логика
предикатов

Немного о названии «логика предикатов»

IV

логика

первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

Будем использовать такое название:

логика
предикатов

Логика предикатов: алфавит

Базовые символы

Предметные константы

Ими обозначаются конкретные (именованные, фиксированные) предметы

Например: **я**, **2**, $\boldsymbol{\pi}$, **Солнце**, $\mathbf{c_1}$, ...

Const — множество всех констант

Предметные переменные

Ими обозначаются безымянные (нефиксированные) предметы

Они будут записываться привычно: $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}'$, $\mathtt{z}_4$, ...

Var — множество всех переменных

Далее это множество полагается счётным и заданным однозначно

Логика предикатов: алфавит

Базовые символы

Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

Например: $+$, **сосед**, **lim**, ...

Каждому функциональному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathbf{f}^{(k)}$ — запись функционального символа $\mathbf{f}$ с обозначением местности k

Func — множество всех функциональных символов с сопоставленными им местностями

Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

Например: $<$, **является_соседом**, **красный**, ...

При задании языка логики предикатов каждому предикатному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathrm{P}^{(k)}$ — запись предикатного символа P с обозначением местности k

Pred — множество всех предикатных символов с сопоставленными им местностями

Логика предикатов: алфавит

Логические операции

Логические связки $\quad \& \quad \vee \quad \neg \quad \rightarrow$

Кванторы

Квантор всеобщности («для любого предмета»): $\forall$

Квантор существования («существует предмет»): $\exists$

Знаки препинания $\quad (\quad) \quad ,$

Сигнатурой алфавита логики предикатов называется тройка

$$\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$$

Устройство языка логики предикатов
однозначно определяется выбором сигнатуры:
все символы, не обозначенные в сигнатуре, определены однозначно

Логика предикатов: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов:

$$
\begin{array}{rcl}
t & ::= & \mathrm{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
\varphi & ::= & \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \mid \\
 & & (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid \\
 & & (\forall \mathrm{x}\, \varphi) \mid (\exists \mathrm{x}\, \varphi),
\end{array}
$$

где:

- φ — формула
- $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы
- $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}$
- $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}$
- $\mathbf{f}^{(n)} \in \mathrm{Func}$
- $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathrm{Pred}$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

При помощи термов описываются предметы, получающиеся в результате применения заданных функций (операций) к заданным предметам

Например: ($\mathtt{z} \in$ Var; $\mathbf{1} \in$ Const; $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in$ Func)

1. Предмет, обозначенный переменной $\mathtt{z}$:
$$\mathtt{z}$$
2. Предмет, обозначенный константой $\mathbf{1}$:
$$\mathbf{1}$$
3. Предмет, получающийся применением операции $+$ к (1) и (2):
$$+(\mathbf{1}, \mathtt{z})$$
4. Предмет, получающийся применением операции $\cdot$ к (1) и (3):
$$\cdot(\mathtt{z}, +(\mathbf{1}, \mathtt{z}))$$
5. Более наглядная инфиксная форма записи терма (4):
$$\mathtt{z} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{z})$$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Term — множество всех термов

(*над заданными множествами* Var, Const, Func)

$\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращённая запись последовательности $\langle\!\langle \mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n} \rangle\!\rangle$

Если t — терм, то:

- Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t
- $t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним записи t, если $\mathrm{Var}_t \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$

Терм t — основной, если $\mathrm{Var}_t = \emptyset$

Пример: если $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$, $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in \mathrm{Const}$ и $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathrm{Func}$, то терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{3})$$

является основным, а терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{x})$$

не является

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

При помощи формул описываются отношения между предметами, строящиеся из «базовых» отношений при помощи логических операций
В некоторых случаях (*отношение местности 0*) формулой может описываться и высказывание, оцениваемое как истина или ложь

Например: $(\mathrm{P}^{(2)}, \mathrm{R}^{(1)} \in \mathsf{Pred};\ \mathbf{f}^{(2)} \in \mathsf{Func};\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathsf{Var})$

1. Предмет y и предмет, получающийся из предметов x и y применением операции $\mathbf{f}$, входят в отношение P:
$$\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$$
2. Для любого предмета x верно (1):
$$(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$
3. Если верно (2), то предмет y обладает свойством R:
$$((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y}))$$
4. Хотя бы для одного предмета y верно (3)
$$(\exists \mathrm{y}\ ((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y})))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Формула атомарна (является атомом), если имеет вид $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, где $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathrm{Pred}$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathrm{Term}$

Остальные формулы называются составными

Form — множество всех формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

Приоритет логических операций (в порядке убывания):

$\forall$, $\exists$, $\neg$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

Как работают приоритеты (пример)

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$
$$\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$
$$(\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$
$$((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$
$$(((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная y связана квантором $\exists$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная x связана квантором $\forall$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Область действия квантора $\exists$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Область действия квантора $\forall$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанные вхождения переменной y

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанное вхождение переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Свободное вхождение переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Если φ — формула, то:

- $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$ — синоним записи φ, если $\mathrm{Var}_\varphi \subseteq \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$
- если $\mathrm{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула, или предложение

CForm^1 — множество всех замкнутых формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

1 Closed Formulae

Логика предикатов: семантика

Как и в логике высказываний, смысл формуле логики предикатов придаёт интерпретация — «мир, в котором живёт формула»

Интерпретация состоит из

- предметов, населяющих мир
- операций над предметами
  - (это смысл **функциональных символов**)
- отношений, связывающих предметы
  - (это смысл **предикатных символов**)

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы[1]

---

1 не следует пугаться этого термина;
это и есть совокупность «предметы + операции + отношения»

Логика предикатов: семантика

Интерпретация (*сигнатуры* $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$) — это система $\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$, где:

- D — непустое множество предметов
  (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathrm{Const}} : \mathrm{Const} \to \mathrm{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathrm{Func}} : \mathrm{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \mathrm{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathrm{Pred}} : \mathrm{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathrm{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе $\mathbf{c}$

$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\mathrm{Func}}(\mathbf{f}) : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$

$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

Логика предикатов: семантика

Пример

Сигнатура: Const $= \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: D $= \{0, 1, 2\}$

оценка констант: $\overline{\mathbf{c_1}} = 0$, $\overline{\mathbf{c_2}} = 1$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

Логика предикатов: семантика термов

Значение $t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ терма $t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации — это предмет, задаваемый так:

- для терма-переменной $\mathtt{x}_i$:
$$\mathtt{x}_i[\widetilde{d}^n] = d_i$$
- для терма-константы $\mathbf{c}$:
$$\mathbf{c}[\widetilde{d}^n] = \overline{\mathbf{c}}$$
- для остальных термов:
$$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d}^n] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n])$$

Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- атомарная формула:
  $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  $\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}]) = \mathbb{t}$

- отрицание:
  $\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d^n}]$

Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{x}^n)$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{x}^n)[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- конъюнкция:
  $\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d}^n]$
  $\Leftrightarrow$
  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$ и $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$
- дизъюнкция:
  $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d}^n]$
  $\Leftrightarrow$
  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$
- импликация:
  $\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$
  $\Leftrightarrow$
  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$

Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- квантор всеобщности:

  $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}))[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow$

  для любого предмета d_0 из области интерпретации верно $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[d_0, \widetilde{d}^n]$

- квантор существования:

  $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}))[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow$

  хотя бы для одного предмета d_0 из области интерпретации верно

  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[d_0, \widetilde{d}^n]$

$\varphi[\mathrm{x}_1/d_1, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}}/d_n]$ — синоним записи $\varphi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}})[d_1, \ldots, d_n]$

В записи «$\mathcal{I} \models \varphi[]$» отношения выполнимости предложения φ на пустом наборе предметов будем, как правило, опускать «пустые» квадратные скобки и писать просто $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

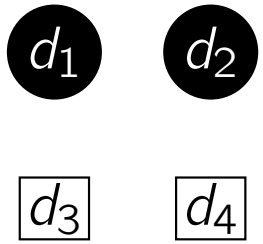
предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: «x — круг»
$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: «x — квадрат»
$\mathrm{B}(\mathrm{x})$: «x — чёрный предмет»
$\mathrm{W}(\mathrm{x})$: «x — белый предмет»
$\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$: «предмет x лежит под предметом y»

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Формула содержательно прочитывается так:

Для каждого предмета x: если он является белым и является квадратом, то существует предмет y, такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет x лежит под предметом y

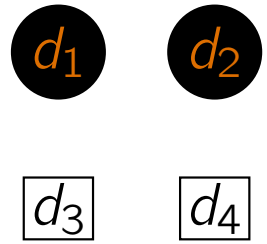
Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в $\mathcal{I}$, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

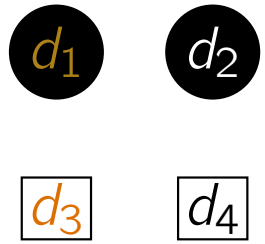
Переберём все предметы, подставляя их на место x

1. $\mathrm{x} \leftarrow d_1$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$

2. $\mathrm{x} \leftarrow d_2$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

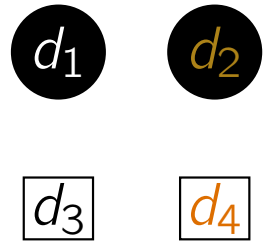
$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

3. $\mathrm{x} \leftarrow d_3$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

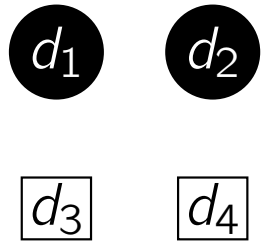
$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

4. $\mathrm{x} \leftarrow d_4$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$$

А значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))}$$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: $\mathrm{Const} = \emptyset$, $\mathrm{Func} = \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, $\mathrm{Pred} = \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

предметная область: $\mathrm{D} = \{0, 1, 2\}$

оценки функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

$_{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{y}}$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$_x{}^y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{x})[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y})))[\mathrm{y}/0, \mathrm{x}/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$_x{}^y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$_x{}^y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{x})[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \not\models \forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))}$$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 4

Как формализовать предложение на языке логики предикатов (пример)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Это определение формулируется для двух предметов:

1. Последовательность действительных чисел (`s`)
2. Действительное число (`x`),
   про которое говорится, что оно является пределом `s`

Вспомним, как определение записывается на естественном языке:

`s` — последовательность действительных чисел,
`x` — действительное число, и
для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число n, такое что
все элементы последовательности `s`, начиная с `n`-го,
отстоят от `x` не более чем на ε

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Прежде чем начать записывать формулу, определимся с сигнатурой

Для примера выберем такую:

- $\mathbf{0} \in$ Const
- $\mathbf{ad}^{(2)} \in$ Func: $\quad \mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \text{«}|x - y|\text{»}$
- $\mathrm{R}^{(1)}, \mathrm{N}^{(1)}, \mathrm{S}^{(1)}, \mathrm{E}^{(3)}, <^{(2)}, \leq^{(2)} \in$ Pred:
  - $\mathrm{R}(\mathtt{x}) = \text{«}\mathtt{x}$ — действительное число»
  - $\mathrm{N}(\mathtt{x}) = \text{«}\mathtt{x}$ — натуральное число»
  - $\mathrm{S}(\mathtt{x}) = \text{«}\mathtt{x}$ — последовательность действительных чисел»
  - $\mathrm{E}(\mathtt{x}, \mathtt{n}, \mathtt{s}) = \text{«}\mathtt{x}$ — $\mathtt{n}$-й член последовательности $\mathtt{s}$»
  - $\mathtt{x} < \mathtt{y}$, $\mathtt{x} \leq \mathtt{y}$ — отношения неравенства чисел $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

$\mathtt{s}$ — последовательность действительных чисел,
$\mathtt{x}$ — действительное число, и
для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число n, такое что
все элементы последовательности $\mathtt{s}$, начиная с $\mathtt{n}$-го,
отстоят от $\mathtt{x}$ не более чем на ε

Здесь записаны три утверждения,
связанные (один раз явно, один раз неявно) союзом «и»

На языке логики предикатов это переписывается так («и» = «&»):

$$\mathrm{S}(\mathtt{s}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathtt{x}) \,\&\, \varphi_1$$

С формулой φ_1 разберёмся отдельно

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число `n`, такое что
все элементы последовательности `s`, начиная с `n`-го,
отстоят от `x` не более чем на ε

«Для любого» = «$\forall$», и справа от $\forall$ обязательно стоит переменная, обозначающая **произвольный предмет**

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Для любого **предмета** ε верно следующее:
если ε — положительное действительное число, то существует ...

$$\forall\varepsilon\ (\mathrm{R}(\varepsilon)\,\&(\mathbf{0}<\varepsilon)\to\varphi_2)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_2

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Существует натуральное число $\mathtt{n}$, такое что
все элементы последовательности $\mathtt{s}$, начиная с $\mathtt{n}$-го,
отстоят от $\mathtt{x}$ не более чем на ε

«Существует» = «хотя бы один» = «$\exists$», и справа от $\exists$ обязательно стоит переменная, обозначающая **произвольный предмет**

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Существует **предмет** $\mathtt{n}$, для которого верно следующее:
$\mathtt{n}$ — натуральное число, и кроме того, все элементы ...

$$\exists \mathtt{n}\ (\mathrm{N}(\mathtt{n}) \& \varphi_3)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_3

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Все элементы последовательности $\mathtt{s}$, начиная с $\mathtt{n}$-го, отстоят от $\mathtt{x}$ не более чем на ε

«Все» = «для любого» = «$\forall$»

Присвоим произвольному элементу, о котором говорится в предложении, имя ($\mathtt{y}$), и переформулируем предложение:

Для любого предмета $\mathtt{y}$ верно следующее:
если $\mathtt{y}$ совпадает с каким-либо элементом последовательности $\mathtt{s}$
с номером, не меньшим $\mathtt{n}$, то $\mathtt{y}$ отстоит от $\mathtt{x}$ не более чем на ε

$$\forall \mathtt{y}\ (\varphi_4 \to \mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \leq \varepsilon)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_4

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

$\mathtt{y}$ **совпадает с каким-либо элементом последовательности** $\mathtt{s}$
с номером, не меньшим $\mathtt{n}$

В формуле φ_4 «снаружи» располагается одна из операций

$$\&,\ \vee,\ \to,\ \neg,\ \forall,\ \exists$$

Чтобы понять, какая именно, переформулируем предложение так, чтобы «снаружи» располагалось одно из словосочетаний

«и», «или», «если-то», «не», «для любого», «существует»:

Существует предмет m, такой что m — натуральное число, и m не меньше n, и y — m-й элемент последовательности s

$$\exists \mathtt{m}\ (\mathrm{N}(\mathtt{m})\&(\mathtt{n} \le \mathtt{m})\&\mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}))$$

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Ответ:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{S}(\mathtt{s}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathtt{x}) \,\& \\
\forall \varepsilon \ (\\
\quad \mathrm{R}(\varepsilon) \,\&\, (\mathbf{0} < \varepsilon) \rightarrow \\
\quad \exists \mathtt{n} \ (\\
\qquad \mathrm{N}(\mathtt{n}) \,\& \\
\qquad \forall \mathtt{y} \ (\\
\qquad\quad \exists \mathtt{m} \ (\\
\qquad\qquad \mathrm{N}(\mathtt{m}) \,\&\, (\mathtt{n} \leq \mathtt{m}) \,\&\, \mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}) \\
\qquad\quad) \rightarrow \\
\qquad\quad \mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \leq \varepsilon \\
\qquad) \\
\quad) \\
)
\end{array}
$$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 5

Логика высказываний (ЛВ):
выполнимые и общезначимые формулы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Основные свойства формул,
которые обычно исследуются в логике высказываний (ЛВ):

Формула φ выполнима ($||\!=\varphi$[1]), если
существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \models \varphi$

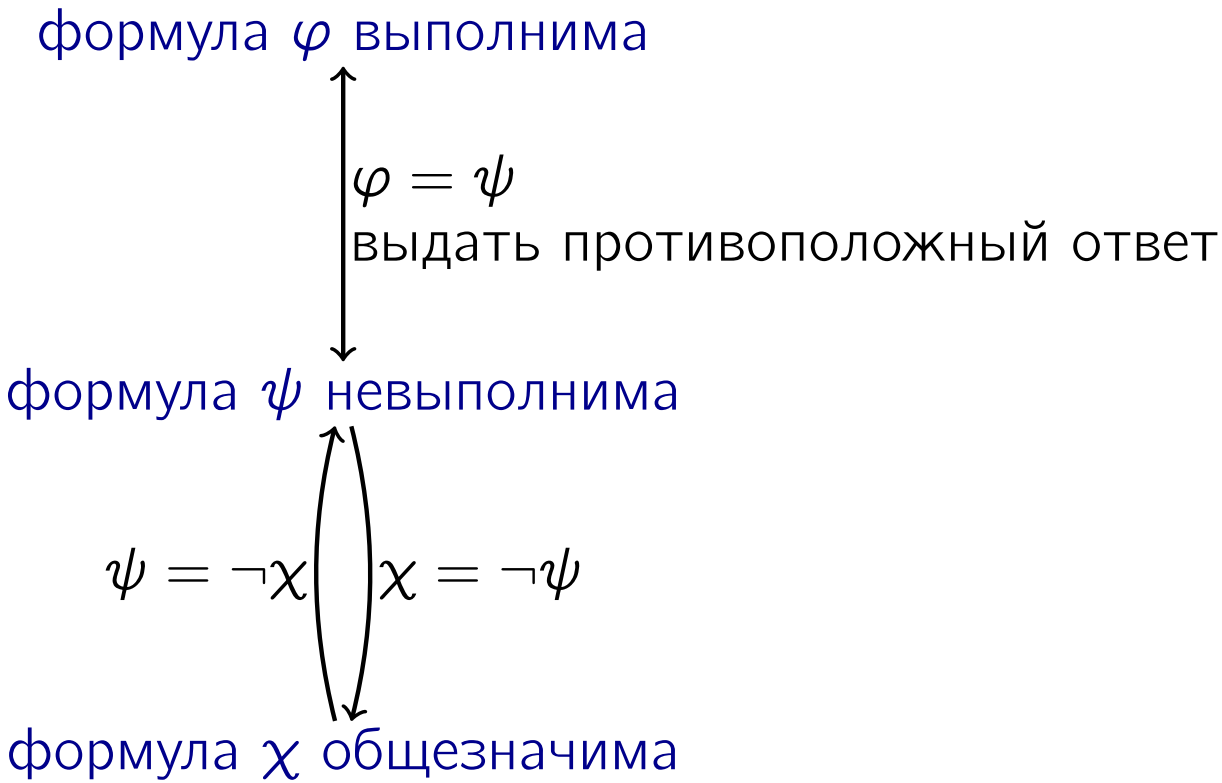
Формула φ общезначима ($\models \varphi$), если
для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Формула φ невыполнима ($|\!\not=\varphi$[1]), если она не является выполнимой,
и необщезначима ($\not\models \varphi$), если не является общезначимой

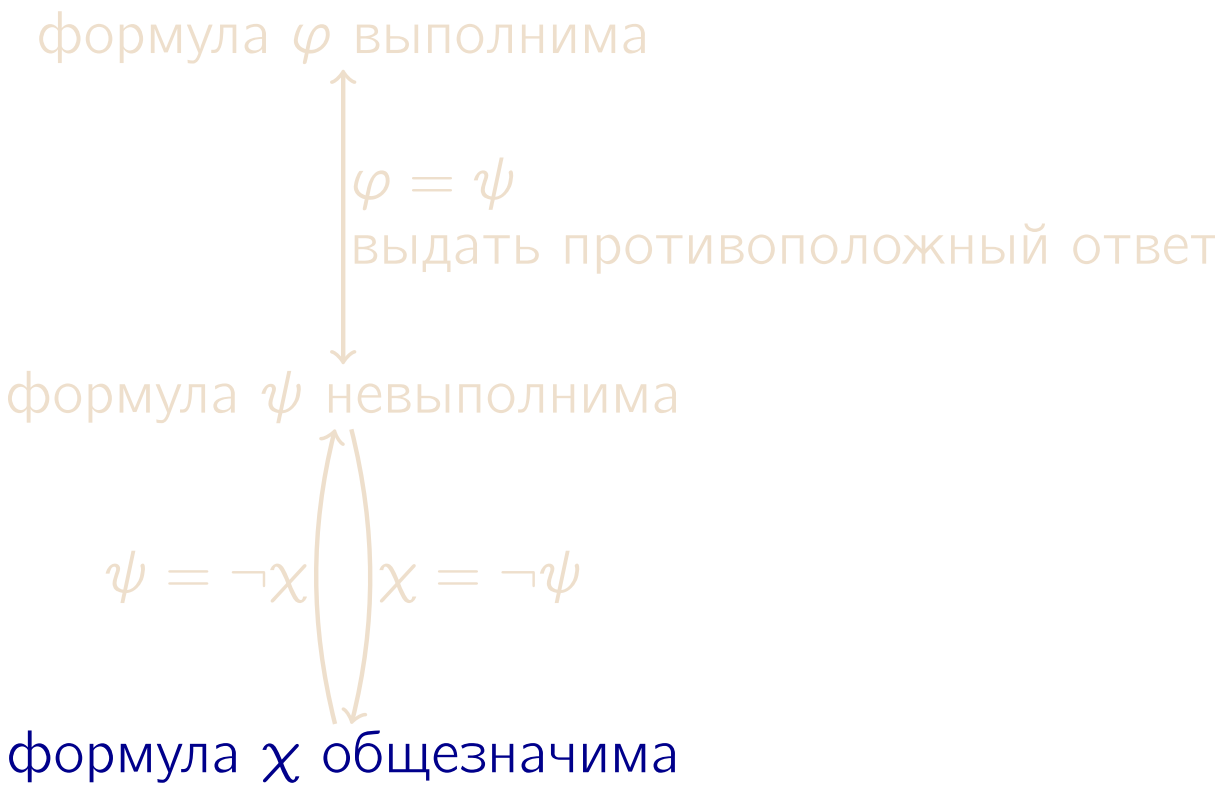
Логика высказываний		*Булева алгебра*
φ выполнима	$\Leftrightarrow$	φ выполнима
φ невыполнима	$\Leftrightarrow$	φ — тождественный ноль
φ общезначима	$\Leftrightarrow$	φ — тождественная единица

1 Это необщеупотребимое обозначение, которое придумал я
для использования в слайдах по этому курсу **и только здесь**.
Не используйте это обозначение, вас не поймут

Проверка каждого из этих свойств
(выполнимость, невыполнимость, общезначимость)
может быть легко **сведена** к проверке любого другого из них:



Проверка каждого из этих свойств
(выполнимость, невыполнимость, общезначимость)
может быть легко **сведена** к проверке любого другого из них:



Поэтому в логике нередко рассматривается только одно из этих свойств,
и обычно это свойство **общезначимости**

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 6

Логика предикатов (ЛП):
выполнимые и общезначимые формулы,
модели формул,
логическое следствие,
проблема общезначимости формул (постановка)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Продолжаем обсуждение логики предикатов (ЛП)

Вспомним на примере, что есть что

Сигнатура:

$$\langle \{\mathbf{c}\}, \{\mathbf{f}^{(1)}\}, \{\mathrm{P}^{(1)}\} \rangle$$

Формула:

$$\varphi = \mathrm{P}(\mathbf{c}) \to \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))$$

Интерпретация $\mathcal{I}$:

предметная область: $\{d_1, d_2\}$

$\overline{\mathbf{c}} = d_1 \qquad \overline{\mathbf{f}}(d_1) = \overline{\mathbf{f}}(d_2) = d_1 \qquad \overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t}, \quad \overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f}$

Отношение выполнимости:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \mid\!\models \varphi$[1]),
если **существует** набор предметов $\widetilde{d}^{n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$,
такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^{n}]$

Формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ истинна в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$),
если **для любого** набора предметов $\widetilde{d}^{n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$
верно $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^{n}]$

Формула φ выполнима ($\mid\!\models \varphi$[1]),
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима
(тождественно истинна; является тавтологией; $\models \varphi$),
если она истинна в любой интерпретации

Про невыполнимую формулу также часто говорят,
что она тождественно ложна

---

1 Как и раньше, это необщеупотребимое обозначение

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$\begin{aligned} \varphi\colon &\quad \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \psi\colon &\quad \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \chi\colon &\quad \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

Интерпретация $\mathcal{I}_1$: $\mathsf{D} = \{d\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbb{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_1 \models \psi \qquad \mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация $\mathcal{I}_2$: $\mathsf{D} = \{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \psi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что было показано, что

1. формулы φ, ψ выполнимы
2. формулы ψ, χ необщезначимы

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ?

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, в которых записана некоторая «нетривиальная» («полезная») информация

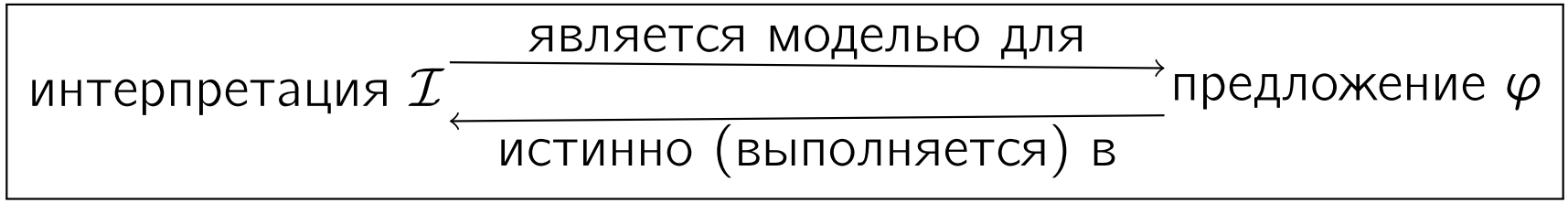
Общезначимые формулы — это (*казалось бы*) банальности, тавтологии, формы, не содержащие в себе никакой «полезной» информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

ЛП: модели

Интерпретация $\mathcal{I}$ называется моделью для **предложения** φ, если $\mathcal{I} \models \varphi$



Интерпретация $\mathcal{I}$ называется моделью для **множества предложений** Γ ($\mathcal{I} \models \Gamma$), если она является моделью для каждого предложения из Γ, и в этом случае говорят, что Γ выполняется в $\mathcal{I}$

Наряду с «модель для формулы/множества» будем также говорить «модель формулы/множества» (без «для»)

Относительно каждой интерпретации $\mathcal{I}$ все предложения делятся на

- выполнимые в $\mathcal{I}$ («верные») и
- невыполнимые в $\mathcal{I}$ («неверные»)

Относительно каждого предложения φ все интерпретации делятся на

- модели для φ (адекватно подходящие под устройство φ) и
- не являющиеся моделями для φ (неподходящие)

ЛП: модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: «x — круг» $\mathrm{B}(\mathrm{x})$: «x — чёрный предмет»

$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: «x — квадрат» $\mathrm{W}(\mathrm{x})$: «x — белый предмет»

$\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$: «предмет x лежит под предметом y»

Рассмотрим такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

«**любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом**»

и такие интерпретации:

$\mathcal{I}_1$: ● ● □ □ $\mathcal{I}_2$: □ ● □

Тогда $\mathcal{I}_1$ **является моделью** для φ, а $\mathcal{I}_2$ **не является**:

- $\mathcal{I}_1 \models \varphi$: оба белых квадрата лежат под чёрными кругами
- $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$: левый белый квадрат **не** лежит под чёрным кругом

ЛП: логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений Γ ($\Gamma \models \varphi$), если любая модель Γ является моделью φ

Другими словами — если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно

$$\mathcal{I} \models \Gamma \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Содержательно — если независимо от смысла символов сигнатуры из справедливости всех утверждений, записанных в Γ, **обязательно** следует справедливость утверждения φ

Отношение $\models$, используемое в таком смысле, будем называть отношением логического следования

Наряду с «$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$» будем также писать «$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$»

ЛП: логическое следствие

Небольшое пояснение:

- $\forall x\, P(x) \models P(\mathbf{c})$:
  если все предметы обладают свойством P, то **обязательно** предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P
- $P(\mathbf{c}) \not\models \forall x\, P(x)$:
  если предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P», то из этого **в общем случае не следует**, что все предеметы обладают свойством P

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это **извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей «разумной деятельности»: экспертные системы, (автоматическое и ручное) доказательство теорем, формальный анализ программ, . . . , . . .

ЛП: логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия,
на простом показательном примере

Известно, что:

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита: в неё войдут

- константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво** и
- предикатный символ $\mathrm{L}^{(2)}$: $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ «икс любит игрека»

ЛП: логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- Даша любит Сашу
$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$$
- Саша любит пиво
$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:
$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво}) \\ \varphi_4 &= \forall \mathrm{x}\, (\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x})) \end{aligned}$$
- Любит ли кто-нибудь дашу?

  Правда ли, что из знаний $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ необходимо следует знание
$$\varphi_0 = \exists x\, L(\mathrm{x}, \textbf{Даша})\ ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

проверить соотношение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_0$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что $\Gamma \models \varphi$

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$

Если $\mathcal{I} \not\models \Gamma$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \Gamma$

Так как $\Gamma \models \varphi$, верно и $\mathcal{I} \models \varphi$ —
а значит, снова верно $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Итог: для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

По определению общезначимости, это означает $\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Предположим, что $\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Рассмотрим **произвольную** модель $\mathcal{I}$ для множества Γ:

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$

Так как формула $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$ общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Согласно семантике $\to$, верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель $\mathcal{I}$ множества Γ является и моделью формулы φ, то есть $\Gamma \models \varphi$ ▼

ЛП: проблема общезначимости формул

Чтобы уметь извлекать логические следствия и в целом анализировать достоверность утверждений, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных утверждений

Общезначимые формулы представляют собой
один из способов записи таких законов — например, закон вида
«**если верны утверждения** $\psi_1, \ldots, \psi_n$**, то верно и** φ»
записывается в виде общезначимой формулы

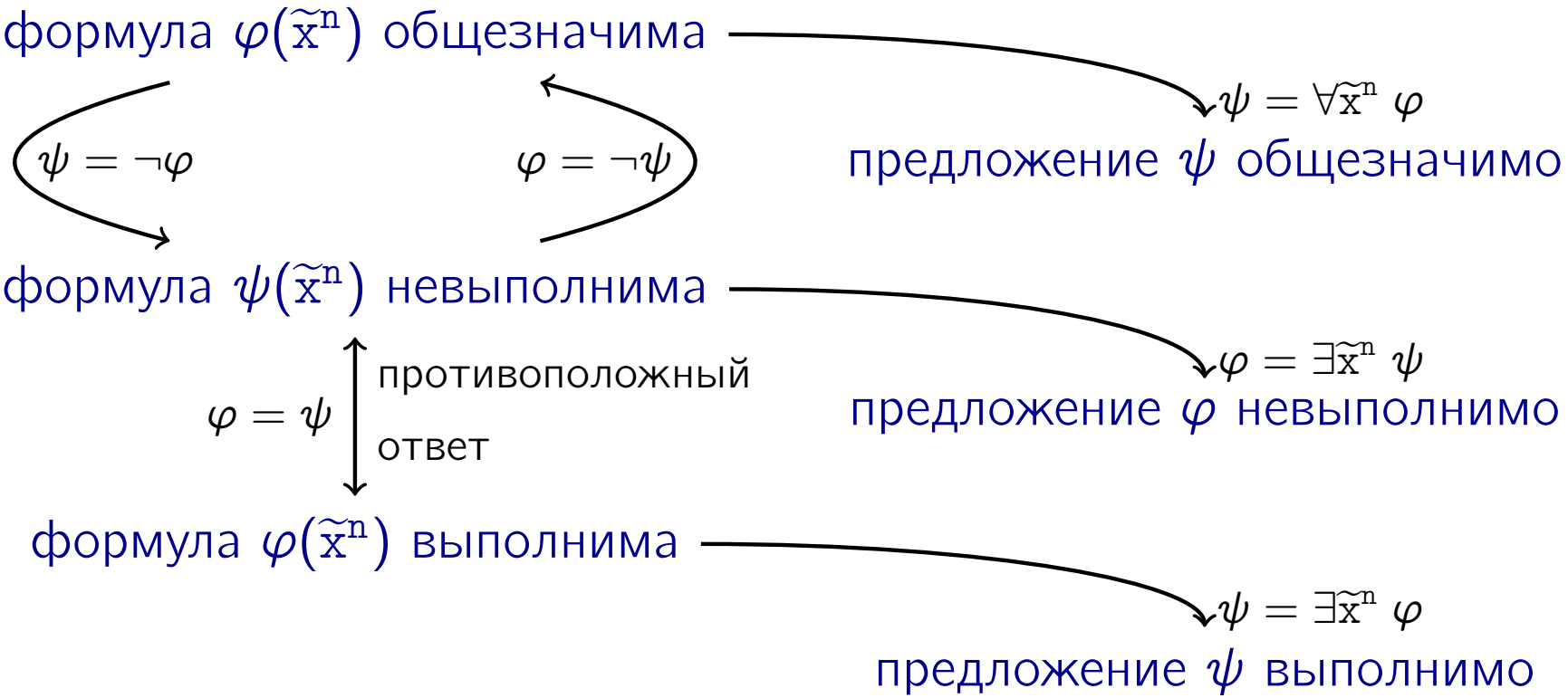
$$\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

В связи с этим оказывается важна проблема общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:
$\models \varphi$?

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:



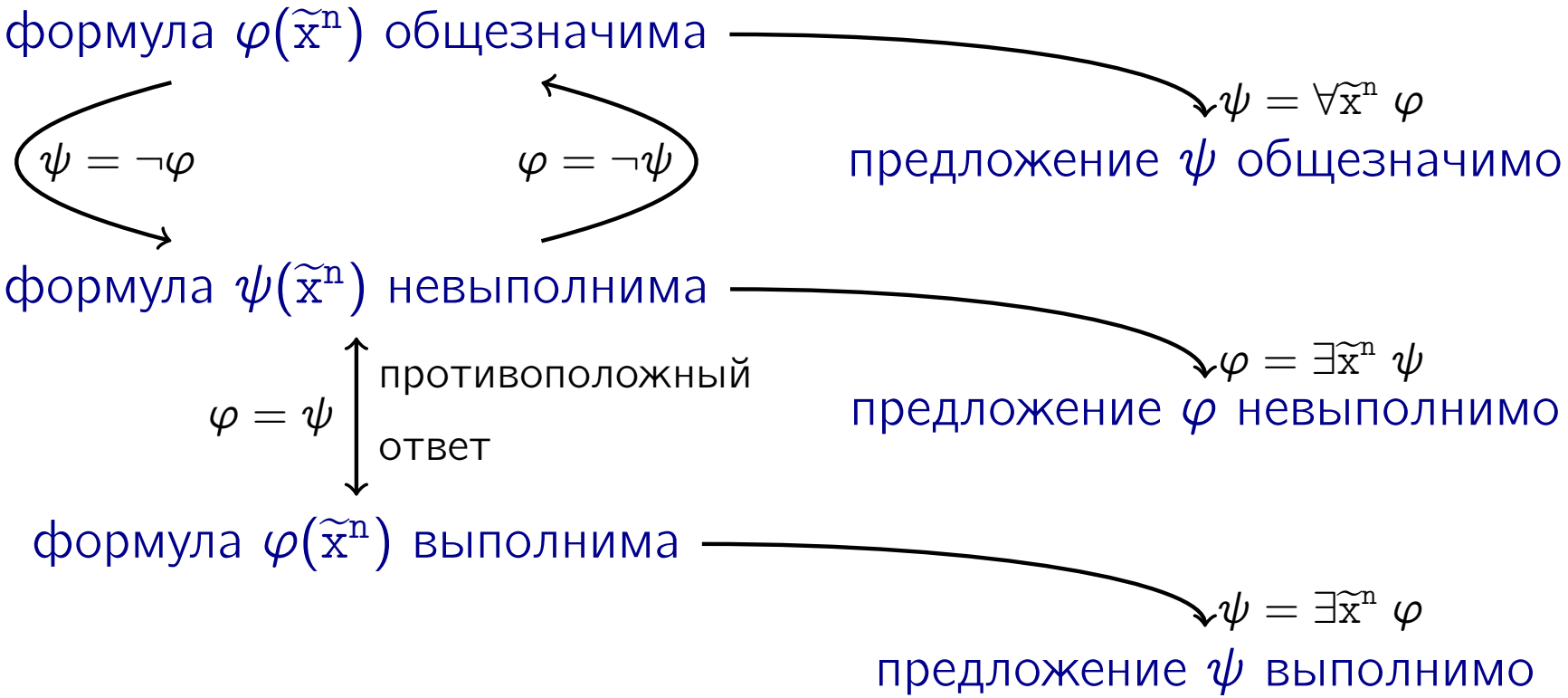
$\forall\widetilde{x}^n$ — сокращение для $\forall x_1 \ldots \forall x_n$

$\exists\widetilde{x}^n$ — сокращение для $\exists x_1 \ldots \exists x_n$

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

Утверждение



Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости ▼

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 7

Логика предикатов:
можно ли проверить
общезначимость формулы «в лоб»?

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Для логики высказываний существует очень простой способ проверки общезначимости формул «в лоб»:

- Вспомнить, что общезначимость формулы в этой логике — это то же самое, что равенство константе 1 в булевой алгебре
- **Перебрать** все наборы значений булевых переменных формулы и для каждого проверить, принимает ли реализуемая функция значение 0
- Если найден хотя бы один такой набор, то формула необщезначима; иначе формула общезначима

А можно ли адаптировать этот метод проверки общезначимости к логике предикатов?

«Перебрать все наборы значений булевых переменных формулы» — в ЛВ это «Перебрать все интерпретации формулы»

«Реализуемая функция принимает значение 0» — в ЛВ это «Формула не выполняется в интерпретации»

Значит, прямое обобщение «лобового» способа проверки общезначимости формулы φ на логику предикатов выглядит так:

- Перебрать всевозможные интерпретации
- Для каждой (очередной) интерпретации $\mathcal{I}$ проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$
- Если обнаружена интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \not\models \varphi$, то формула необщезначима
- Если все интерпретации перебраны и для каждой показано соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$, то формула общезначима

Но всё не так просто:

- Как задать интерпретацию с бесконечной предметной областью?
- Как проверить истинность формулы в такой интерпретации?
- Как перебрать «ужасно»-бесконечное число интерпретаций?

Если бы можно было ограничиться только **конечными** интерпретациями, то проблем бы было намного меньше, но ...

Утверждение. **Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью**

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

- Предметная область — множество всех натуральных чисел
- $\overline{R}(a, b) = \mathrm{t} \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

Тогда:

- $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, т.к. никакое число не меньше себя
- $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{z}))$,
  т.к. если $a < b$ и $b < c$, то обязательно $a < c$
- $\mathcal{I} \not\models \exists \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$,
  т.к. среди натуральных чисел не существует максимального

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \varphi$, и предложение φ **необщезначимо**

Утверждение. **Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью**

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x, x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x, y) \,\&\, R(y, z) \to R(x, z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x, y)$$

Общее истолкование этой формулы, не зависящее от оценки символа R, можно почерпнуть из теории порядков:

- $\forall x\, \neg R(x, x)$: отношение R антирефлексивно
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x, y) \,\&\, R(y, z) \to R(x, z))$: отношение R транзитивно
- $\exists x\, \forall y\, \neg R(x, y)$: существует предмет, максимальный относительно R

Если отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует предмет, максимальный относительно R

Иными словами,

Если R — отношение строгого частичного порядка, то существует предмет, максимальный относительно R

Утверждение. **Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью**

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Если R — отношение строгого частичного порядка, то существует предмет, максимальный относительно R

Как известно (?), в любом **конечном** частично упорядоченном множестве существует максимальный элемент

(А если не известно, то легко доказывается по индукции или получается из более общего утверждения — **леммы Цорна**) ▼

Утверждение. **Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью**

Проверить общезначимость формулы ЛП при помощи
полного перебора интерпретаций оказывается крайне затруднительно:

- Интерпретаций бесконечно много
- Перебирать бесконечные интерпретации проблематично
- Ограничить перебор только конечными интерпретациями невозможно

Чтобы научиться решать эту задачу,
придётся изучить более нетривиальные методы,
и прежде всего изучим самый *идеологически простой* и *универсальный*:

метод семантических таблиц

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 8

Метод семантичесских таблиц:
семантические таблицы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Чтобы избежать проблем, возникших при попытке адаптировать переборный метод проверки общезначимости формул, попробуем предложить другой метод решения этой задачи, опирающийся **только** на введённую ранее семантику операций

Начнём с примера (назовём его ООФП для отсылок): попробуем обосновать *от противного* общезначимость формулы $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$:

1. Предположим, что $\not\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$
2. Тогда существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \not\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$
3. Из $\mathcal{I} \not\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$ и семантики $\to$ следует $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$ и $\mathcal{I} \not\models \mathrm{P}(\mathbf{c})$
4. Из $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$ и семантики $\forall$ следует $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathbf{c})$
5. Получены соотношения $\mathcal{I} \not\models \mathrm{P}(\mathbf{c})$ и $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathbf{c})$ — такого быть не может, а значит, исходное предположение неверно ▼

Попробуем систематизировать ход таких рассуждений и избавиться от лишних слов в доказательстве

Определения

Семантическая таблица (*логики предикатов*) — это упорядоченная пара множеств формул (*логики предикатов*), такая что хотя бы одно из этих множеств непусто

Будем называть два множества семантической таблицы её левой частью (первое) и правой частью (второе)

Будем записывать семантическую таблицу так: $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$, где Γ — левая часть и Δ — правая часть

В записи множеств в семантических таблицах иногда будем опускать фигурные скобки и писать «,» вместо «$\cup$»

Например, $\langle \mathrm{P}(\mathbf{c}), \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \mid \exists \mathrm{x}\, \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \rangle$ — это семантическая таблица с левой частью $\{\mathrm{P}(\mathbf{c}), \mathrm{Q}(\mathrm{x})\}$ и правой частью $\{\exists \mathrm{x}\, \mathrm{Q}(\mathrm{x})\}$

Содержательно (согласно ООФП), формулу φ в левой части таблицы можно понимать как отвечающую соотношению $\mathcal{I} \models \varphi$, а в правой — как отвечающую соотношению $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Определения

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Например,

- таблица $\langle \mathrm{P}(\mathbf{c}), \underline{\forall \mathrm{x}\ \mathrm{Q}(\mathrm{x})} \mid \underline{\forall \mathrm{x}\ \mathrm{Q}(\mathrm{x})}, \mathrm{R}(\mathbf{c}) \rangle$ закрыта
- таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}), \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{y}), \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \rangle$ незакрыта

Содержательно (согласно ООФП), если $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$, то это означает, что получено *явное противоречие*: соотношения $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ атомарна, если все формулы из $\Gamma \cup \Delta$ атомарны

Например,

- таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{d}) \rangle$ атомарна
- таблицы $\langle \underline{\forall \mathrm{x}}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{d}) \rangle$ и $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \underline{\vee} \mathrm{P}(\mathbf{d}) \rangle$ неатомарны

Содержательно (согласно ООФП), атомарная таблица отвечает «окончательному» набору соотношений вида $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \psi$, из которого невозможно извлечь другие аналогичные соотношения, существенные для ООФП

Определения

Пусть $\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}$ — все свободные переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации, такие что

- $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для любой формулы φ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для любой формулы ψ из Δ

Содержательно (согласно ООФП), выполнимость таблицы означает, что в имеющихся соотношениях вида $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \psi$ нет противоречия

Определения

Например:

- Таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$ выполнима (*и незакрыта, и атомарна*)
  Интерпретация и предметы, подтверждающие выполнимость:
  - $\mathsf{D} = \{d\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbb{t}$, $\overline{\mathrm{Q}}(d, d) = \mathbb{f}$
  - $d_{\mathrm{x}} = d$

- Таблица $\langle \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \rangle$ выполнима
  (*и незакрыта, и неатомарна*)
  Интерпретация и предметы, подтверждающие выполнимость:
  - $\mathsf{D} = \{0, 1\}$, $\overline{\mathrm{P}}(0) = \mathbb{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(1) = \mathbb{f}$
  - $d_{\mathrm{x}} = d_{\mathrm{y}} = 1$

- Таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$ невыполнима
  (*и закрыта, и атомарна*)

- Таблица $\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \neg \exists \mathrm{x}\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \rangle$ невыполнима
  (*и незакрыта, и неатомарна*)

Основные утверждения

Теорема (о табличной проверке общезначимости)
Для любой формулы φ справедлива равносильность

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \textbf{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^{n}] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I}$$
$$\text{и любого набора предметов } \widetilde{d}^{n}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима } \blacktriangledown$$

Утверждение. **Любая закрытая таблица невыполнима**

Утверждение. **Любая незакрытая атомарная таблица выполнима**

Доказательства утверждений опустим для экономии времени

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 9

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима

Для проверки общезначимости формул
достаточно придумать правила преобразования таблиц,
позволяющие извлекать «явные противоречия» (закрытые таблицы)
из таблиц, содержащих «неявные противоречия» (невыполнимых)

Для примера рассмотрим такую невыполнимую таблицу:

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle$$

Чтобы преобразовать эту таблицу в закрытую, достаточно заметить,
что если утверждение $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ выполняется для любого предмета x, то оно
выполняется, в частности, и для предмета, обозначенного константой $\mathbf{c}$

Значит, можно подставить на место x константу $\mathbf{c}$
и получить выполнимость утверждения $\mathrm{P}(\mathbf{c})$

Добавив это утверждение в левую часть, получим закрытую таблицу:

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{c}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle$$

Чтобы строго сформулировать соответствующее правило,
следует строго определить, что такое «подставить»

Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и множество термов Term

Подстановка — это отображение $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Term}$

Область подстановки θ: $\mathrm{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathrm{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathrm{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n\}$
- $\theta(\mathtt{x}_i) = t_i, \qquad 1 \leq i \leq n$

Запись $\mathtt{x}/t$, где $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$ и $t \in \mathrm{Term}$, называется связкой

Содержательно, связка $\mathtt{x}/t$ означает, что при *применении* (*выполнении*) подстановки переменная $\mathtt{x}$ должна быть заменена на терм t

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathrm{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение логики предикатов (терм или формула) и θ — подстановка

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x})$	$(\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$
$\mathbf{c}\theta = \mathbf{c}$	$(\mathbf{c} \in \mathrm{Const})$
$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$	$(\mathbf{f} \in \mathrm{Func},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term})$
$\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$	$(\mathrm{P} \in \mathrm{Pred})$
$(\varphi \,\&\, \psi)\theta = (\varphi\theta \,\&\, \psi\theta)$	$(\varphi, \psi \in \mathrm{Form})$
$(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta)$	
$(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta)$	
$(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta)$	
$(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta')$	$(\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x};$
$(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta')$	$\theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y})$, если $\mathrm{y} \neq \mathrm{x})$

Иными словами, $E\theta$ получается из выражения E так:

- E — терм $\Rightarrow$ все вхождения переменных заменяются на их θ-образы
- E — формула $\Rightarrow$ все **свободные** вхождения переменных заменяются на их θ-образы

Подстановки

Пример применения подстановки к формуле

$\varphi = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$
$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathrm{x}, \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{z})\}$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Все выделенные вхождения заменяются согласно θ

$\varphi\theta = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Подстановки

При применении подстановок для выделения «частных случаев» следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(\mathrm{x}) = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то у x тоже есть дед»

Очевидно, что $\models \varphi(\mathrm{x})$

$\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\} = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед»

Очевидно, что $\not\models \varphi\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная x свободна для терма t в формуле φ, если
ни одно свободное вхождение переменной x не лежит
в областях действия кванторов, связывающих переменные из Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_n/t_n\}$ — правильная для формулы φ,
если для каждой связки x_i/t_i
переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ

Например, для формулы $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$ — правильная:
  все вхождения u и v в подставляемый терм свободны
- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ — неправильная:
  вхождение y в подставляемый терм оказывается связанным

Подстановки

Утверждение (о правильной подстановке)

Для любых формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{x})$, интерпретации $\mathcal{I}$, набора предметов $\widetilde{d}^n$ и подстановки $\{\mathrm{x}/t(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\}$, правильной для φ, верно:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n, t[\widetilde{d}^n]] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/t\}[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство опустим для экономии времени

и ограничимся небольшим **примером**:

Пусть $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in$ Const, $=^{(2)} \in$ Pred, $+^{(2)} \in$ Func

и все эти символы имеют «естественную» арифметическую оценку в $\mathcal{I}$: $\overline{\mathbf{1}} = 1$, $\overline{\mathbf{3}} = 3$, $\equiv$ и $\overline{+}$ — отношение равенства и операция сложения чисел

Тогда верно следующее:

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{x} = \mathbf{3})[\mathrm{y}/2, \mathrm{x}/3]$$

$$\Leftrightarrow \qquad (\overline{\mathbf{3}} = 3 = (\mathbf{1} + \mathrm{y})[\mathrm{y}/2])$$

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{x} = \mathbf{3})[\mathrm{y}/2, \mathrm{x}/((\mathbf{1} + \mathrm{y})[\mathrm{y}/2])]$$

$$\Leftrightarrow \qquad (\text{утверждение выше})$$

$$\mathcal{I} \models (\mathbf{1} + \mathrm{y} = \mathbf{3})[\mathrm{y}/2]$$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 10

Метод семантических таблиц:
табличный вывод

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима

Для доказательства общезначимости формул
(и более широко — невыполнимости таблиц)
будем применять правила заранее сформулированного списка

Доказательства такого вида:
преобразование записей согласно заданному своду правил —
принято называть логическим выводом

Логический вывод, в котором преобразуются семантические таблицы,
принято называть табличным выводом, и соответствующие
правила преобразования — правилами табличного вывода

Начнём с определения свода этих правил

Правила табличного вывода

Будем использовать правила табличного вывода двух видов:

$$(*)\colon \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**)\colon \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Согласно правилу, рассматриваемая таблица T_0 преобразуется

- $(*)$ в таблицу T_1 для последующего рассмотрения
- $(**)$ в таблицы T_1 и T_2 для поочерёдного рассмотрения

При этом правила будут подобраны так, чтобы

- $(*)$ таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и T_1
- $(**)$ таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и **хотя бы одна** из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют альтернативами

Правила табличного вывода

Включим в свод 12 правил табличного вывода:

- $12 = 2 \cdot 6$
  - 2 части таблицы: левая, правая
  - 6 логических операций: $\&$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\forall$, $\exists$
- согласно каждому правилу, в одной из частей таблицы выбирается одна формула, и эта формула преобразуется в одну или несколько в зависимости от её вида и расположения

В правилах будут использоваться следующие обозначения:

- Γ, Δ — произвольные множества формул
- φ, ψ — произвольные формулы
- x — произвольная предметная переменная
- t — произвольный терм, такой что подстановка $\{\mathrm{x}/t\}$ правильна для φ
- $\mathbf{c}$ — произвольная константа, не содержащаяся в формулах из $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$

Правила табличного вывода

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\to: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

$$L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\ \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\ \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \mid \Delta \rangle} \qquad R\forall: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \forall \mathrm{x}\ \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \rangle}$$

$$L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists \mathrm{x}\ \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta \rangle} \qquad R\exists: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathrm{x}\ \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathrm{x}\ \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \rangle}$$

Правила табличного вывода

Пара слов об ограничениях
на терм t и константу c в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

Если разрешить подставлять любые термы в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mid \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y}) \rangle}{\langle \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y}) \mid \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y}) \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять «использованные» константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle}{\langle \mathrm{P}(\mathbf{c}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle}$$

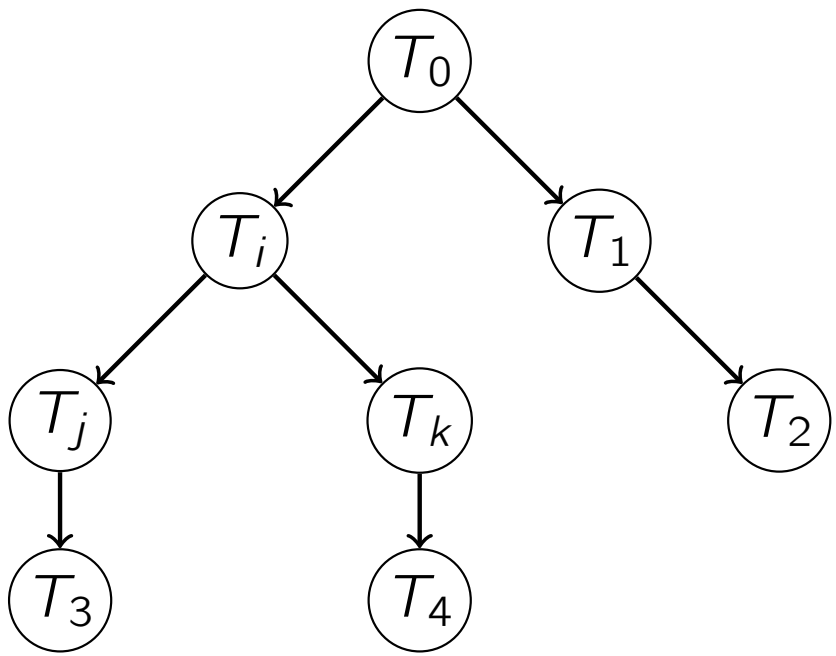
— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

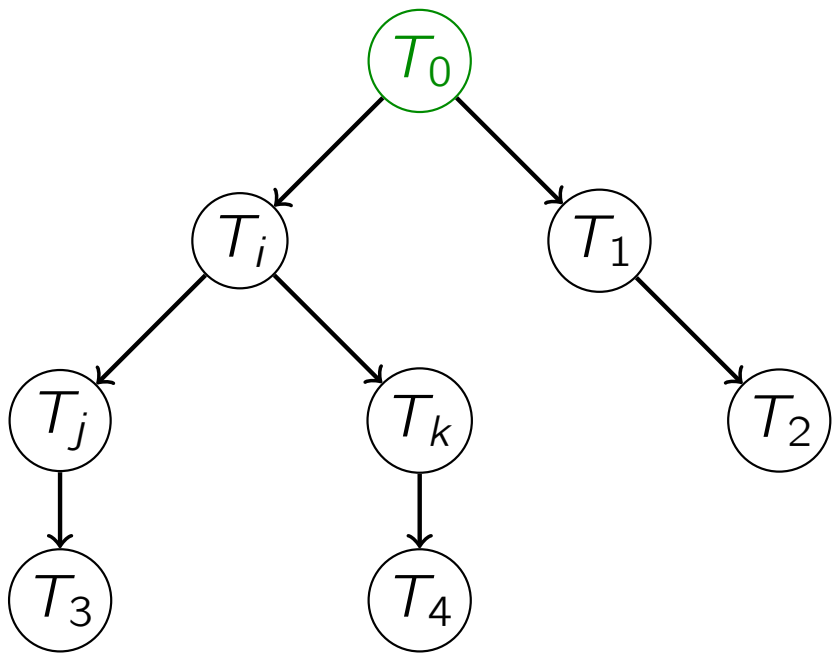
1. Всем вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

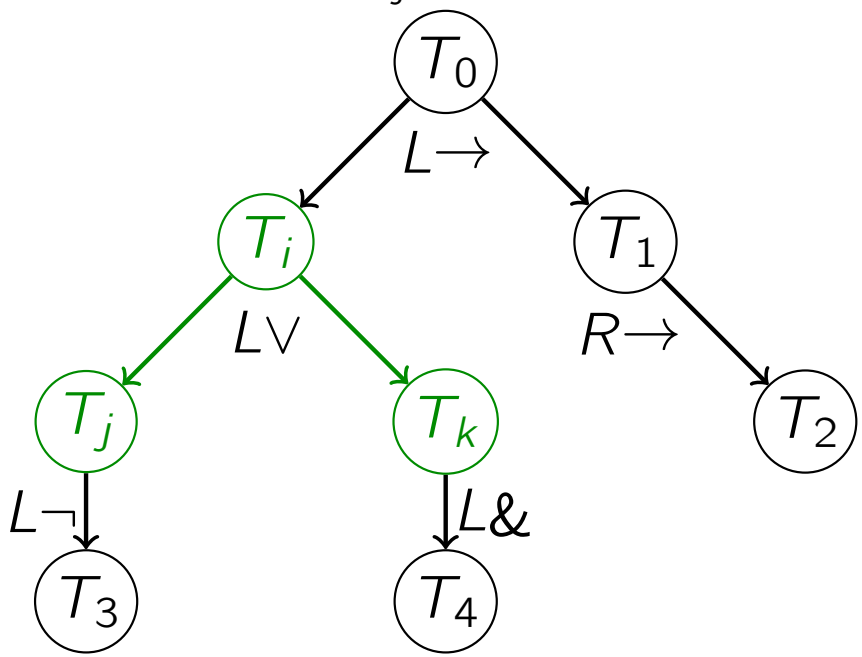
2. Корню приписана таблица T_0



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

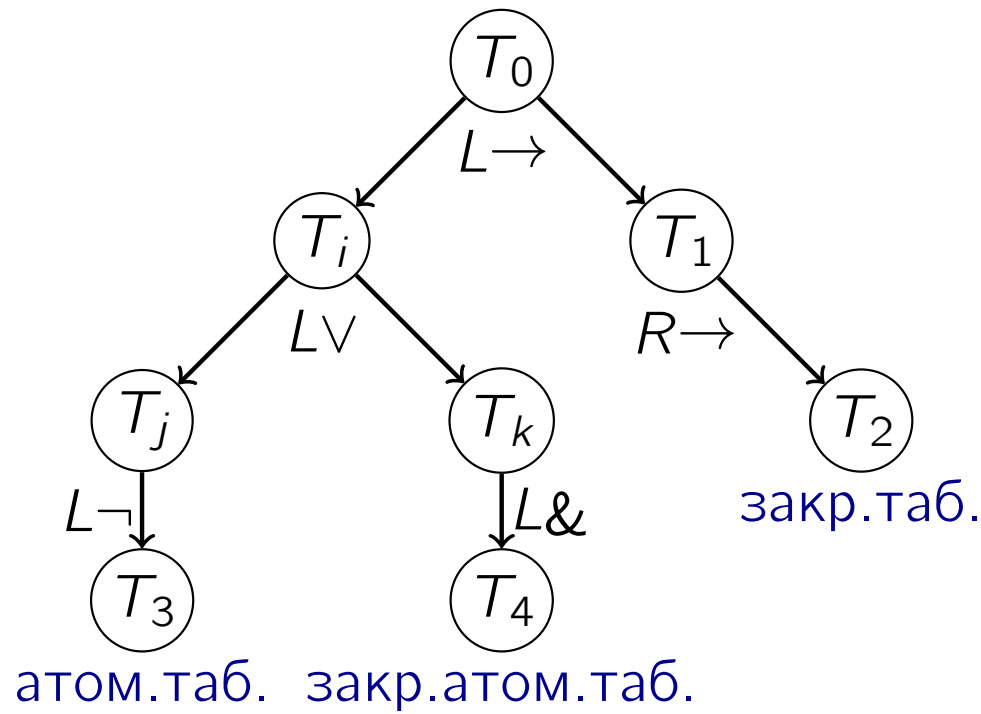
3. Из каждой вершины (T_i) исходит не более двух дуг, и если исходит
   - ровно одна дуга (в (T_j)), то $\dfrac{T_i}{T_j}$ — правило табличного вывода
   - две дуги (в (T_j), (T_k)), то $\dfrac{T_i}{T_j,\ T_k}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

4. все таблицы, приписанные листьям, закрыты или атомарны
   (в том числе могут быть одновременно закрытыми и атомарными)



Табличный вывод

Табличный вывод успешен, если
он конечен и всем его листьям приписаны закрытые таблицы

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица,
для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

В частности, согласно теореме о табличной проверке общезначимости,
если этот вывод построен для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$, то верно $\models \varphi$

Перед строгой формулировкой и обоснованием
свойств успешных выводов приведём несколько примеров

Примеры табличных выводов

Вывод успешен

При этом для любых формул φ, ψ верно $\models (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \forall x\,(A(x) \to B(x)) \to (\forall x\,A(x) \to \forall x\,B(x)) \rangle$$

$\downarrow R\to$

$$\langle \forall x\,(A(x) \to B(x)) \mid \forall x\,A(x) \to \forall x\,B(x) \rangle$$

$\downarrow R\to$

$$\langle \forall x\,(A(x) \to B(x)), \forall x\,A(x) \mid \forall x\,B(x) \rangle$$

$\downarrow R\forall$

$$\langle \forall x\,(A(x) \to B(x)), \forall x\,A(x) \mid B(\mathbf{c}) \rangle$$

$\downarrow L\forall$

$$\langle \forall x\,(A(x) \to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c}) \rangle$$

$\downarrow L\forall$

$$\langle \forall x\,(A(x) \to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \to B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c}) \rangle$$

$\swarrow \quad L\to \quad \searrow$

$$\langle \begin{matrix} \forall x\,(A(x) \to B(x)), \\ \forall x\,A(x), B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \end{matrix} \mid B(\mathbf{c}) \rangle \qquad \langle \begin{matrix} \forall x\,(A(x) \to B(x)), \\ \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \end{matrix} \mid B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \rangle$$

Закрытая таблица — Закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models \forall x\,(A(x) \to B(x)) \to (\forall x\,A(x) \to \forall x\,B(x))$

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow R\to$$
$$\langle \exists x\, P(x) \mid \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle P(\mathbf{c_1}) \mid \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle P(\mathbf{c_1}) \mid P(\mathbf{c_2}) \rangle$$

Незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

При этом $\not\models \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\to$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\exists$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists y\ \forall x\ P(x,y), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\infty$$

Вывод бесконечен (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\not\models \forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y)$

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\to$$
$$\langle \exists x\ \forall y\ P(x,y) \mid \forall y\ \exists x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \forall y\ \exists x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \exists x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow R\exists$$
$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists x\ P(x,\mathbf{c_2}), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\infty$$

Вывод бесконечен (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\not\models \exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 11

Метод семантических таблиц:
корректность табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Лемма (о корректности правил табличного вывода)
Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$**:**

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists$$ **—**

таблица T_0 **выполнима тогда и только тогда,**
когда выполнима таблица T_1 **(или выполнима таблица** T_2**)**

Доказательство

$L\to$: $\dfrac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$

($\Rightarrow$) Пусть верхняя таблица выполнима —
покажем, что тогда выполнима хотя бы одна из нижних таблиц

По определению выполнимости таблицы,
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- для любой формулы χ' из Γ верно $\mathcal{I} \models \chi'[\widetilde{d}^n]$
- для любой формулы χ'' из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi''[\widetilde{d}^n]$
- $\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода)
Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists$$ **—**

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство

$(L\to\ (\Rightarrow)$ $\quad \chi' \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \chi'[\widetilde{d}^n]$ $\quad \chi'' \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi''[\widetilde{d}^n]$ $\quad \mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n])$

Так как $\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$, то, согласно семантике $\to$,
верно хотя бы одно из двух:

- $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$
- $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$

Следовательно, хотя бы одна из таблиц $\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle$, $\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle$ выполнима

$(\Leftarrow)$ Рассуждения аналогичны

$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg$ — рассуждения аналогичны

Лемма (о корректности правил табличного вывода)
Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists$$ —

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\forall$: $\frac{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\, \varphi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\, \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \mid \Delta\rangle}$

($\Leftarrow$) *Очевидно, что* если вычеркнуть «$\varphi\{\mathrm{x}/t\}$» из выполнимой (нижней) таблицы, то она (станет верхней и) останется выполнимой

($\Rightarrow$) Пусть верхняя таблица выполнима,
и пусть $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы
Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\, \varphi)[\widetilde{d}^n]$

При этом $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\, \varphi)[\widetilde{d}^n] \ \Rightarrow\ \mathcal{I} \models \varphi[t[\widetilde{d}^n], \widetilde{d}^n] \ \Rightarrow\ \mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/t\}[\widetilde{d}^n]$
Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется **правильность** подстановки $\{\mathrm{x}/t\}$ для φ?

Лемма (о корректности правил табличного вывода)
Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists$$

— таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists \mathrm{x}\, \varphi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\rangle}$

($\Leftarrow$) *Очевидно*, т.к. если $\mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}[\widetilde{d}^n]$, то $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}\, \varphi)[\widetilde{d}^n]$

($\Rightarrow$) Пусть верхняя таблица выполнима,
и $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\, \varphi)[\widetilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0, такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода)
Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists$$ —

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists \mathrm{x}\, \varphi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\rangle}$

$(\Rightarrow)$ $\quad \psi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n] \quad \chi \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \psi[\widetilde{d}^n] \quad \mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{J}$,
отличающуюся от $\mathcal{I}$ только оценкой константы $\mathbf{c}$: $\overline{\mathbf{c}} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\})[\widetilde{d}^n]$

Кроме того,

- $\mathcal{J} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{J} \not\models \chi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что $\mathbf{c}$ — «новая» константа?

$R\forall$, $R\exists$ — рассуждения аналогичны ▼

Теорема (о корректности табличного вывода)
Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство.
Следует из определения успешного табличного вывода, утверждения о невыполнимости закрытых таблиц и леммы о корректности правил табличного вывода ▼

Следствие
Если для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А верно ли утверждение в обратную сторону?

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 12

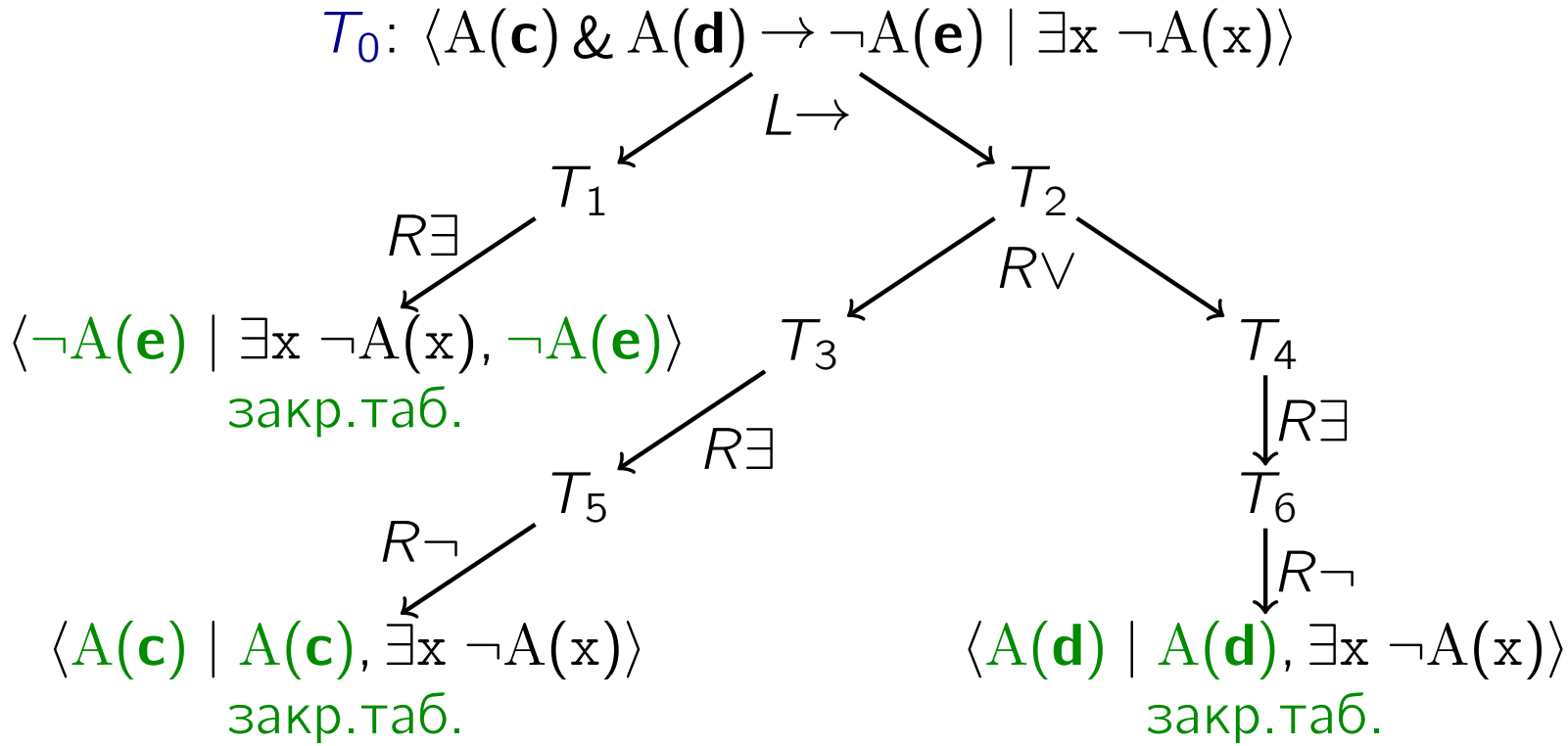
Метод семантических таблиц:
полнота табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Напоминание

Корректность табличного вывода:
если для таблицы T_0 существует успешный табличный вывод,
то таблица T_0 невыполнима



А верно ли утверждение в обратную сторону?
(*если таблица невыполнима, то для неё существует успешный вывод*)

Теорема (о полноте табличного вывода)
Для любой невыполнимой семантической таблицы существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую семантическую таблицу

$$T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$$

Покажем, как можно **построить** успешный вывод $\mathfrak{D}$ для T_0

Для простоты обсудим частный случай с такими ограничениями:

- множества Γ_0, Δ_0 конечны
- все формулы из Γ_0, Δ_0 замкнуты
- в сигнатуре нет ни одного функционального символа

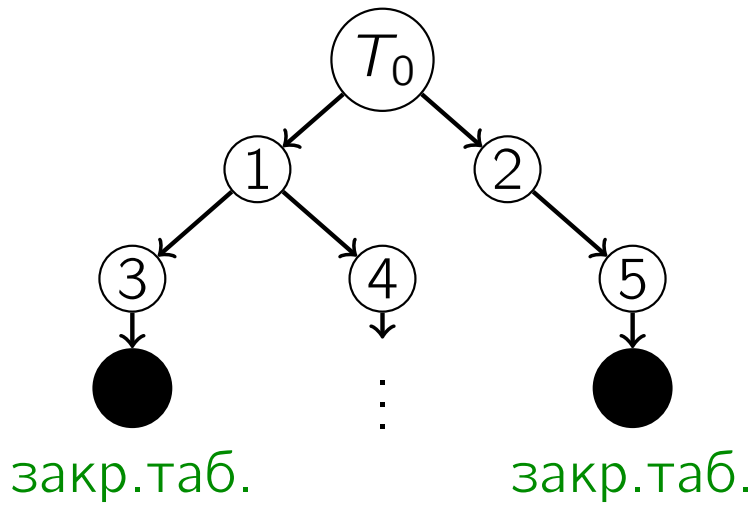
Сформулируем **стратегию** построения вывода,
которой (*как будет показано*) достаточно придерживаться
для построения требуемого вывода $\mathfrak{D}$, начиная с исходной таблицы T_0

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

1. Дерево вывода строится при помощи обхода в ширину

То есть правила применяются к незакрытым неатомарным таблицам в порядке появления этих таблиц в построенном фрагменте дерева



Тогда каждая таблица каждой ветви вывода рано или поздно будет построена

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

2. Правила применяются к формулам в порядке очереди

То есть:

- неатомарные формулы таблицы пронумерованы
- правило вывода применяется к первой формуле
- результат применения правила записывается последним

$$\langle 1{:}\forall \mathrm{x}\ \varphi,\ 3{:}\psi_1 \to \psi_2 \mid 2{:}\chi_1 \vee \chi_2 \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle 2{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 3{:}\forall \mathrm{x}\ \varphi,\ 4{:}\varphi' \mid 1{:}\chi_1 \vee \chi_2 \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle 1{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 2{:}\forall \mathrm{x}\ \varphi,\ 3{:}\varphi' \mid 4{:}\chi_1,\ 5{:}\chi_2 \rangle$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$
$$\langle 1{:}\forall \mathrm{x}\ \varphi, 2{:}\varphi', 5{:}\psi_2 \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2 \rangle \qquad \langle 1{:}\forall \mathrm{x}\ \varphi, 2{:}\varphi' \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2, 5{:}\psi_1 \rangle$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

Тогда в каждой ветви вывода к каждой неатомарной формуле рано или поздно будет применено правило табличного вывода

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

3. При применении правил $L\forall$, $R\exists$ подставляются **все** имеющиеся в таблице константы (**c**, если констант нет)

$$\langle \forall \mathrm{x}\ \varphi,\ \exists \mathrm{x}\ \psi \mid \exists \mathrm{x}\ \chi \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle \forall \mathrm{x}\ \varphi,\ \exists \mathrm{x}\ \psi,\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\ \chi \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle \forall \mathrm{x}\ \varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\ \chi \rangle$$
$$\downarrow R\exists \times 2$$
$$\langle \forall \mathrm{x}\ \varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\ \chi,\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\},\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\} \rangle$$
$$\ldots$$

Тогда в каждой бесконечной ветви вывода для каждого квантора $\forall$ слева и $\exists$ справа каждая константа рано или поздно будет подставлена

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Покажем, что любой вывод $\mathfrak{D}$, построенный для $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$ согласно предложенной стратегии, успешен

Предположим, что это не так: вывод $\mathfrak{D}$ неуспешен — получим из этого выполнимость таблицы T_0, *противоречащую выбору таблицы* T_0

Заменим в $\mathfrak{D}$ каждую незакрытую атомарную таблицу T_{atom} на бесконечную ветвь $T_{atom} \to T_{atom} \to T_{atom} \to \ldots$

Тогда в полученном дереве обязательно найдётся бесконечная ветвь $\mathcal{T}$, состоящая только из незакрытых таблиц:

$$T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots$$

По этой ветви построим интерпретацию $\mathcal{I}$, такую что:

- каждая формула из Γ_0 выполнима в $\mathcal{I}$
- каждая формула из Δ_0 невыполнима в $\mathcal{I}$

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon\ T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$\mathcal{I} = \langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, -, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$, где

- предметная область — это все константы всех формул в $\mathfrak{T}$:
$$\mathrm{D} = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{Const}_i = \mathrm{Const}_\omega, \text{ где } \mathrm{Const}_i \text{ — все константы в } T_i$$
- значение каждой константы — это её изображение (*она сама*):
$$\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$$
- предикат истинен $\Leftrightarrow$ он встречается в левых частях таблиц $\mathfrak{T}$:
$$\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) = \mathbb{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \in \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i = \Gamma_\omega$$

Осталось показать *индукцией по структуре формулы*, что

- каждая формула из Γ_ω выполнима в $\mathcal{I}$
- каждая формула из $\Delta_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ невыполнима в $\mathcal{I}$

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

База индукции: φ — атом

Тогда $\varphi = \mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k})$, где $\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k} \in \mathrm{Const}_\omega$ (почему?)

Подслучай 1: $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \in \Gamma_\omega$
Тогда $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) = \mathbb{t}$, а значит, $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \in \Delta_\omega$
Тогда $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \notin \Gamma_\omega$ (почему?)
Значит, $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) = \mathbb{f}$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Индуктивный переход
Предположение индукции: для каждой формулы, содержащей менее N логических операций, утверждение доказано
Рассматриваемый случай: формула φ содержит ровно N логических операций

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

Переход 1: $\varphi = \psi \to \chi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

В ветви $\mathfrak{T}$ существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к φ в левой части этой таблицы (почему?)

Значит, верно хотя бы одно из двух: (почему?)

- $\chi \in \Gamma_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \models \chi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$
- $\psi \in \Delta_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \not\models \psi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$ — рассуждения аналогичны

Переход 2/3/4: $\varphi = \psi \,\&\, \chi$ / $\psi \vee \chi$ / $\neg\psi$ — рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

Переход 5: $\varphi = \forall \mathrm{x}\, \psi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

Тогда $\psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \in \Gamma_\omega$ для любой константы $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_\omega$ (почему?)

Значит, для любой константы $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_\omega$ верно: $\mathcal{I} \models \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}$

Но это и означает $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\, \psi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$

В ветви $\mathfrak{T}$ существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к φ в правой части этой таблицы

Значит, $\psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \in \Delta_{i+1}$ для некоторой $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_{i+1} \subseteq \mathrm{Const}_\omega$

Тогда $\mathcal{I} \not\models \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}$, и следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \mathrm{x}\, \psi$

Переход 6: $\varphi = \exists \mathrm{x}\, \psi$ — рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

Итоги рассуждений

Существует (*и явно описана*) интерпретация $\mathcal{I}$, такая что

- все формулы в левых частях таблиц из $\mathfrak{T}$ выполнимы в $\mathcal{I}$
- все формулы в правых частях таблиц из $\mathfrak{T}$ невыполнимы в $\mathcal{I}$

В частности, все формулы из Γ_0 выполнимы в $\mathcal{I}$
и все формулы из Δ_0 невыполнимы в $\mathcal{I}$

Значит, таблица T_0 выполнима, *что противоречит невыполнимости этой таблицы, заявленной в начале доказательства*

Противоречие получено в предположении о том,
что вывод, построенный для T_0, неуспешен

Значит, предположение неверно:
любой вывод, построенный для невыполнимой таблицы T_0 согласно предложенным правилам, успешен ▼

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Интересующимся для самостоятельного размышления:
а как адаптировать доказательство к общему случаю?

То есть:

- Какой порядок обработки формул позволит «справедливо» обращаться со счётными множествами формул?
- Какие термы подставлять, если в сигнатуре алфавита есть функциональные символы?
- Как задать и использовать интерпретацию $\mathcal{I}$, если в таблицах встречаются незамкнутые формулы?

Следствие

Семантическая таблица T логики предикатов невыполнима $\Leftrightarrow$ для неё существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Вытекает из теорем о корректности и полноте табличного вывода ▼

Следствие. **Для любой формулы φ логики предикатов верно:**

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{для семантической таблицы } \langle \mid \varphi \rangle \text{ существует успешный табличный вывод}$$

Доказательство. Вытекает из первого следствия и теоремы о табличной проверке общезначимости формул ▼

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 13

Теорема Лёвенгейма-Сколема
Теорема компактности Мальцева
Автоматизация доказательства теорем

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Корректность и **полнота** метода семантических таблиц в ЛП:
$\models \varphi \Leftrightarrow$ **для таблицы** $\langle \mid \varphi \rangle$ **существует успешный табличный вывод**

Полнота метода семантических таблиц в ЛП (доказательство):
если $\models \varphi$**, то успешный табличный вывод можно построить, придерживаясь особой стратегии**

Свойства и «приёмы», обсуждавшиеся
для метода семантических таблиц, позволяют

- обосновать несколько нетривиальных утверждений,
  не имеющих прямого отношения к методу, и
- естественно поставить важные алгоритмические вопросы,
  касающиеся проблемы общезначимости формул логики предикатов

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Вспомним определение выполнимости формул логики предикатов:
Формула выполнима $\Leftrightarrow$ она выполняется хотя бы в одной интерпретации

Представим себе, что для проверки выполнимости формулы
разрешено перебрать **сколько угодно** интерпретаций
и в каждой проверить выполнимость формулы

Следует ли перебрать все существующие в природе интерпретации,
или же достаточно ограничиться только какими-нибудь «простыми»?

В таком переборе намного важнее природы предметов
оказывается их **количество** (как было отмечено, например, в блоке 7)

Хотелось бы в полноценных рассуждениях о выполнимости формулы
использовать только интерпретации с хотя и бесконечной,
но всё же как можно меньшей предметной областью

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Для любого предложения φ справедлива равносильность:

φ выполнимо $\Leftrightarrow$ φ имеет модель с не более чем счётной предметной областью

Доказательство.

Совместим знания о корректности и полноте вывода
и определение выполнимости таблицы:
$\not\models \varphi \Leftrightarrow$ для $T_0 = \langle \varphi \mid \rangle$ не существует успешного табличного вывода

Построив вывод согласно стратегии
из доказательства теоремы о полноте, получим

- бесконечную ветвь $T_0 \to T_1 \to \ldots$ вывода,
  состоящую только из незакрытых таблиц
- интерпретацию $\mathcal{I}$ с **не более чем счётной** предметной областью,
  в которой выполняются все таблицы этой ветви —
  в том числе и таблица T_0 ▼

Теорема компактности Мальцева

Вспомним теорему о логическом следствии:
методы проверки общезначимости формул можно применить
и для проверки логического следования одних формул из других

$$\psi_1, \ldots, \psi_k \models \varphi \Leftrightarrow \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \varphi$$

Здесь $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ — это **конечная** база знаний, относительно которой требуется проверить достоверность извлечённого следствия

А можно ли предложить что-нибудь аналогичное
для **бесконечных** баз знаний?

Оказывается, что, независимо от размера набора знаний,
в достоверности логического следствия можно убедиться,
выбрав для рассмотрения только некоторый **конечный** поднабор

Теорема компактности Мальцева

Для любого предложения φ и любого множества предложений Γ справедлива равносильность:

$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow$ **существует конечное подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$**

Доказательство.

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ таблица $T = \langle \Gamma \mid \varphi \rangle$ невыполнима (почему?)
$\Leftrightarrow$ существует успешный табличный вывод $\mathfrak{D}$ для T

Подмножество Γ_1 всех формул множества Γ, к которым применяются правила вывода в $\mathfrak{D}$, конечно, как и минимальное подмножество Γ_2, такое что для каждого листа $\mathfrak{D}$ существует формула из Γ_2, содержащаяся в обеих частях таблицы этого листа (почему?)

Тогда для таблицы $\langle \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \mid \varphi \rangle$,
также существует успешный табличный вывод (почему?)

Значит, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi$ ▼

Теорема компактности Мальцева

Множество предложений Γ называется выполнимым ($\|\!=\Gamma$[1]), если у этого множества есть хотя бы одна модель

Следствие. Для любого множества предложений Γ верно:

$$\not\models \Gamma$$

$$\Leftrightarrow$$

существует конечное подмножество Γ' множества Γ, такое что $\not\models \Gamma'$

Доказательство.

$\not\models \Gamma$

$\Leftrightarrow$ (определения логического следования и невыполнимости)

$\Gamma \models \varphi$ для произвольно взятого невыполнимого предложения φ

$\Leftrightarrow$ (теорема компатности Мальцева)

существует подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$ (для произвольно взятого невыполнимого предложения φ)

$\Leftrightarrow$ (определения логического следования и невыполнимости)

существует подмножество Γ' множества Γ, такое что $\not\models \Gamma'$ ▼

1 Снова то же необщеупотребимое обозначение

Автоматизация доказательства теорем

В свете того, что есть стратегия построения успешного табличного вывода для произвольной невыполнимой таблицы, естественно возникает вопрос:

А можно ли поручить проверку общезначимости формул ЛП компьютеру, чтобы он делал всю работу за нас?

Если формула общезначима, то это можно обосновать, придерживаясь упомянутой стратегии

А если необщезначима ... (?)
... то на этот счёт пока есть только теорема о корректности:
успешного вывода для соответствующей таблицы не существует

Познакомившись получше с логикой предикатов и логическими программами, обсудим и то, что целиком переложить такую работу на компьютер **невозможно**[1]

Но если всё же попытаться, то ...

1 То есть о том, что проблема общезначимости формул *алгоритмически неразрешима*

Автоматизация доказательства теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода[1], то в результате получится прувер: средство доказательства теорем логики предикатов

First-order theorem prover

К пруверу разумно было бы предъявить такие требования:

- корректность: выдаются только правильные ответы — обязательно
- полнота: ответы выдаются всегда — желательно как можно лучше к этому приблизиться
- эффективность: ответы выдаются за разумное время — очень желательно

1 Не обязательно стратегию из доказательства теоремы полноты. Не обязательно полную стратегию. Не обязательно табличного вывода

Автоматизация доказательства теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода[1], то в результате получится прувер: средство доказательства теорем логики предикатов

First-order theorem prover

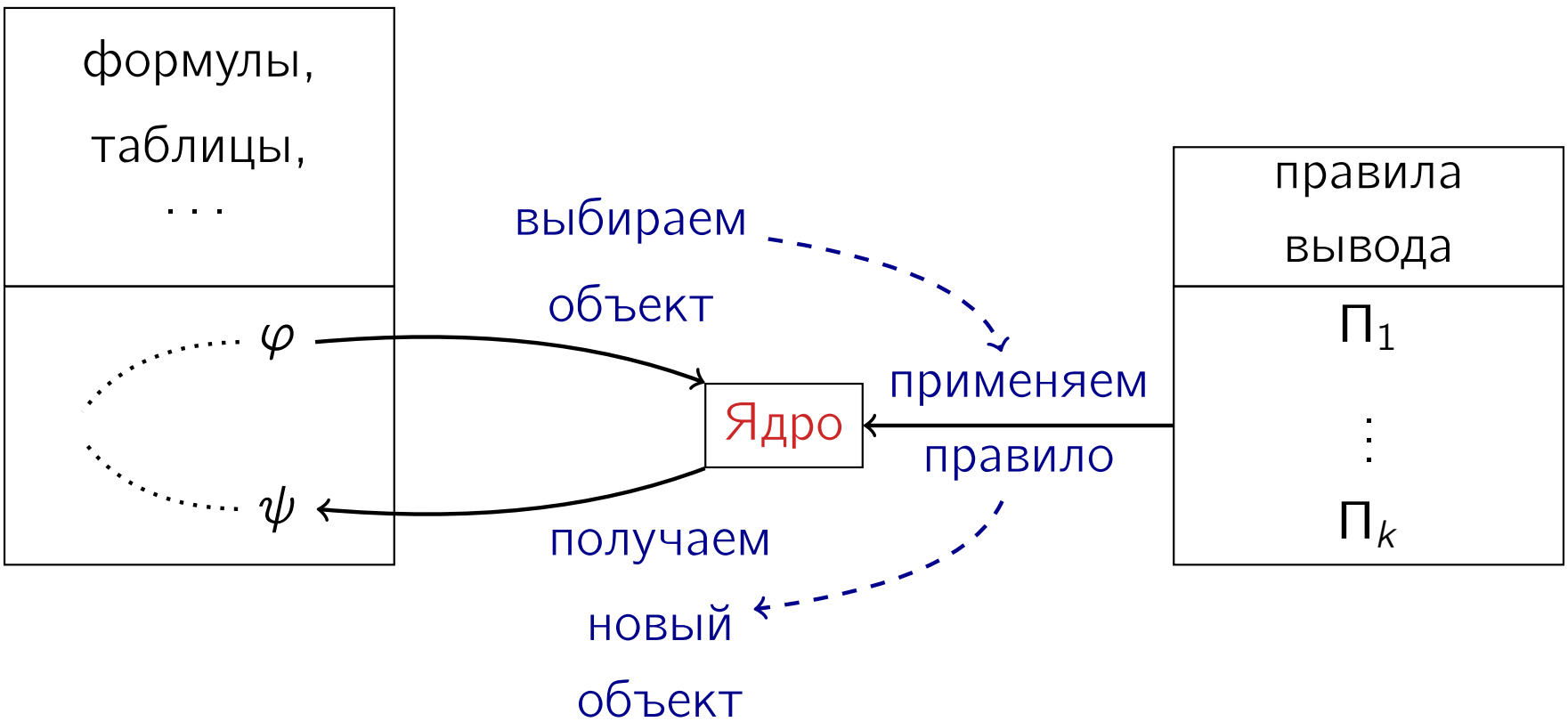
Один из **очень многих** примеров того, чего позволило добиться использование пруверов:[2]
строго доказана корректность *nix-микроядра L4,
и в процессе доказательства найдены и исправлены сотни ошибок в коде

1 Не обязательно стратегию из доказательства теоремы полноты. Не обязательно полную стратегию. Не обязательно табличного вывода

2 Klein et al. seL4: formal verification of an OS kernel. 2009. Конкретно этот пример выбран только из-за наглядности, понятности и при этом «неоспоримой полезности» формулировки результата

Автоматизация доказательства теорем

Как устроены пруверы:



Автоматизация доказательства теорем

Представим себе прувер, способный проверять общезначимость формул логики предикатов **методом семантических таблиц**:

- корректный
- выдающий ответ «да» для **всех** общезначимых формул

Насколько эффективен может быть такой прувер?

Эффективность построения вывода определяется тем,

- как на каждом шаге выбираются формулы для применения к ним правил и
- какие термы подставляются при применении правил $L\forall$ и $R\exists$

Если прувером осуществляется полный перебор всех формул, возникающих в таблицах, или перебор слишком большого числа термов, то такой прувер, вероятно, окажется неэффективным

Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина	В Киеве дядька
Растёт(**бузина**, **огород**)	$\exists$у (Дядька(у) & Живёт(у, **Киев**))

Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина Растёт(**бузина**, **огород**) Всё в огороде посадил дядька $\forall$x ($\text{Растёт}(\text{x}, \textbf{огород}) \rightarrow$ $\exists$y ($\text{Посадил}(\text{y}, \text{x}) \,\&\, \text{Дядька}(\text{y})$))	В Киеве дядька $\exists$y ($\text{Дядька}(\text{y})$ $\,\&\, \text{Живёт}(\text{y}, \textbf{Киев})$)

Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина Растёт(**бузина**, **огород**)	В Киеве дядька $\exists y\ (\text{Дядька}(y)$ $\quad \& \text{Живёт}(y, \textbf{Киев}))$
Всё в огороде посадил дядька $\forall x\ (\text{Растёт}(x, \textbf{огород}) \rightarrow$ $\quad \exists y\ (\text{Посадил}(y, x) \& \text{Дядька}(y)))$	
Бузину сажают только Киевляне $\forall x\ (\text{Посадил}(x, \textbf{бузина})$ $\quad \rightarrow \text{Живёт}(x, \textbf{Киев}))$	

Автоматизация доказательства теорем

$$L\forall\ \frac{\langle \Gamma,\ \forall x\ \varphi(x) \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma,\ \forall x\ \varphi(x),\ \varphi(x)\{x/t\} \mid \Delta\rangle} \qquad R\exists\ \frac{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists x\ \varphi(x)\rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists x\ \varphi(x),\ \varphi(x)\{x/t\}\rangle}$$

Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Для примера представим себе, что при построении вывода придётся перебрать все термы, составленные из **одного** функционального символа $\mathbf{f}^{(2)}$, используемого не более 10 раз, и **двух** различных констант (*вроде бы это не очень большие термы?*)

Можно легко посчитать, что существует **более** 10^{300} различных термов такого вида

Число 10^{100} (на 200 нолей меньше) имеет особое название — гугол: это бессмысленно большое число, превосходящее число атомов в наблюдаемой вселенной

Автоматизация доказательства теорем

$$L\forall\ \frac{\langle \Gamma,\ \forall x\ \varphi(x) \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma,\ \forall x\ \varphi(x),\ \varphi(x)\{x/t\} \mid \Delta\rangle} \qquad R\exists\ \frac{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists x\ \varphi(x)\rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists x\ \varphi(x),\ \varphi(x)\{x/t\}\rangle}$$

Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Существуют способы повышения эффективности
перебора термов при построении логического вывода
для доказательства общезначимости формул[1]

Далее обсудим один из таких способов и основанный на нём метод:
метод резолюций

Заодно в процессе обсуждения познакомимся
и с другими важными понятиями и задачами и методами,
касающимися логики предикатов, и подготовим основу
для обсуждения логического программирования

1 J.A. Robinson: метод резолюций. С.Ю. Маслов: обратный вывод

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 14

Общая схема метода резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Проблему общезначимости формул логики предикатов

$$\models \varphi?$$

можно *до некоторой степени* решить с помощью
метода семантических таблиц

Но этот метод оказался **неэффективным**:
в «плохих» случаях может потребоваться

- перебирать много формул и
- подставлять много термов

На ближайших лекциях будет обсуждаться более эффективный метод проверки общезначимости формул логики предикатов:

метод резолюций

Без ограничения общности далее полагаем, что формула φ, общезначимость которой проверяется методом резолюций, замкнута

Общая схема метода резолюций

Сквозной пример: обоснование общезначимости формулы

$$\models \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, (\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Этап 1: перейти к проверке невыполнимости отрицания формулы

$$\cdots \rightsquigarrow \neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, (\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Этап 2: упростить формулу, сохранив её смысл (привести к ПНФ)

$$\cdots \rightsquigarrow \forall \mathrm{x}\,\exists \mathrm{z}\,\exists \mathrm{y}\,\forall \mathrm{u}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, (\neg \mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Этап 3: сделать формулу ещё проще *с изменением смысла*, сохранив её выполнимость/невыполнимость (привести к ССФ)

$$\cdots \rightsquigarrow \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{u}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, (\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x}))) \,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

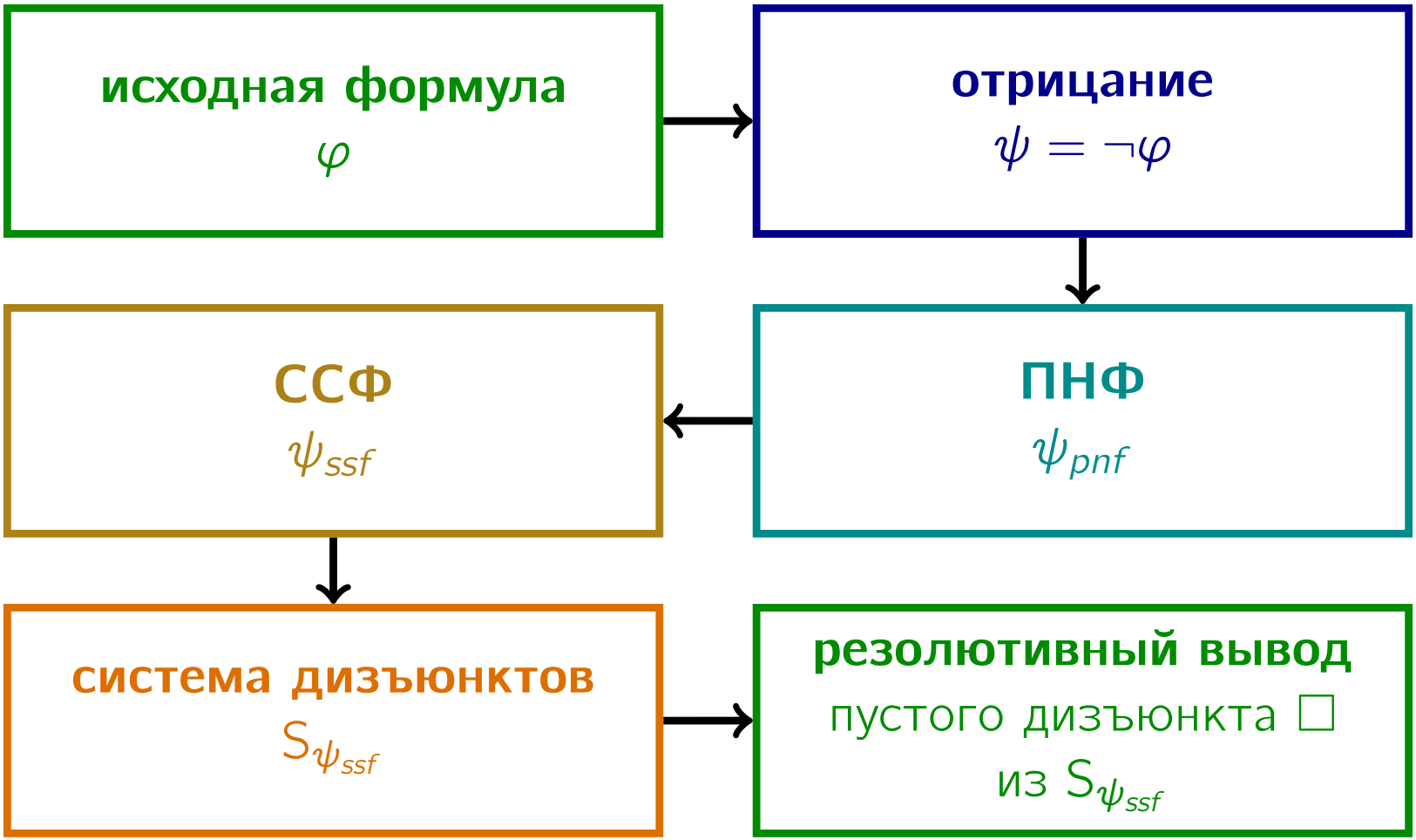
Этап 4: перейти к проверке невыполнимости системы *очень* простых формул — дизъюнктов

$$\cdots \rightsquigarrow \{\mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x})),\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u})\}$$

Этап 5: построить логический вывод особого дизъюнкта ($\square$), обозначающего невыполнимость системы

$$\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x})) \quad \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{x}') \to \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x}))}_{\{\mathrm{x}'/\mathbf{f}(\mathrm{x})\}} \quad \underbrace{\neg \mathrm{R}(\mathrm{x}',\mathrm{u}') \to \square}_{\{\mathrm{x}'/\mathrm{x},\,\mathrm{u}'/\mathbf{f}(\mathrm{x})\}}$$

Общая схема метода резолюций



Отдельно будет показана справедливость цепочки равносильностей:

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 15

Равносильность формул

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Из булевой алгебры:

$$A \vee B \to (C \,\&\, D \to E)$$
$$\mapsto \qquad (x \to y \mapsto \neg x \vee y)$$
$$\neg(A \vee B) \vee \neg(C \,\&\, D) \vee E$$
$$\mapsto \qquad (\neg(x \,\&\, y) \mapsto \neg x \vee \neg y;\ \ldots \mapsto \ldots)$$
$$\neg A \,\&\, \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E$$
$$\mapsto \qquad (\ldots \mapsto \ldots)$$
$$(\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee E) \,\&\, (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E)$$

Нижняя формула получена из верхней
при помощи основных тождеств булевой алгебры

Значит, можно быть уверенным в том,
что эти формулы имеют одинаковый смысл

Неплохо было бы (*и для метода резолюций, и в целом*)
уметь преобразовывать формулы **логики предикатов**
с гарантированным сохранением их смысла

Равносильность формул

Эквивалентность (логическая связка):

$\varphi \leftrightarrow \psi$ — это сокращение для формулы $(\varphi \to \psi)\,\&\,(\psi \to \varphi)$

Формулы φ, ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима

Утверждение. Для любых равносильных формул $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ ЛП, интерпретации $\mathcal{I}$ и набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно следующее:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$. Тогда:

$\models (\varphi \to \psi)\,\&\,(\psi \to \varphi)$ (по определению равносильности)

$\mathcal{I} \models ((\varphi \to \psi)\,\&\,(\psi \to \varphi))[\widetilde{d}^n]$ (по определению общезначимости)

$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$ (по семантике «&»)

$\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ (по семантике «$\to$» и соотношению $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$)

($\Leftarrow$) Аналогично ▼

Равносильность формул

Утверждение. **$\sim$ — отношение эквивалентности**

Утверждение. **Если формула φ общезначима, то любая равносильная ей формула ψ также общезначима**

Утверждение. **Если формула φ выполнима, то любая равносильная ей формула ψ также выполнима**

Доказательства опустим для экономии времени

Основные равносильности

Законы булевой алгебры

Коммутативность $\&$ и $\vee$:

$$\varphi \,\&\, \psi \sim \psi \,\&\, \varphi \qquad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$$

Ассоциативность $\&$ и $\vee$:

$$(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi \sim \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi) \qquad (\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

Дистрибутивность $\vee$ относительно $\&$ и $\&$ относительно $\vee$:

$$\varphi \,\&\, (\psi \vee \chi) \sim \varphi \,\&\, \psi \vee \varphi \,\&\, \chi \qquad \varphi \vee (\psi \,\&\, \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \,\&\, (\varphi \vee \chi)$$

Идемпотентность $\&$ и $\vee$:

$$\varphi \,\&\, \varphi \sim \varphi \qquad \varphi \vee \varphi \sim \varphi$$

Инволютивность $\neg$:

$$\neg\neg\varphi \sim \varphi$$

Законы де Моргана для $\&$ и для $\vee$:

$$\neg(\varphi \,\&\, \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \,\&\, \neg\psi$$

Закон удаления импликации:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

... ...

Основные равносильности

Правила работы с кванторами

Переименование связанной переменной:

$$\forall \mathrm{x}\ \varphi \sim \forall \mathrm{y}\ (\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}) \qquad \exists \mathrm{x}\ \varphi \sim \exists \mathrm{y}\ (\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\})$$

(*если* $\mathrm{y} \notin \mathrm{Var}_\varphi$ *и подстановка* $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ *правильна для* φ)

Продвижение отрицания под квантор:

$$\neg\forall \mathrm{x}\ \varphi \sim \exists \mathrm{x}\ \neg\varphi \qquad \neg\exists \mathrm{x}\ \varphi \sim \forall \mathrm{x}\ \neg\varphi$$

Вынесение квантора за скобки:

$$\forall \mathrm{x}\ \varphi \,\&\, \psi \sim \forall \mathrm{x}\ (\varphi \,\&\, \psi) \qquad \exists \mathrm{x}\ \varphi \,\&\, \psi \sim \exists \mathrm{x}\ (\varphi \,\&\, \psi)$$

$$\forall \mathrm{x}\ \varphi \vee \psi \sim \forall \mathrm{x}\ (\varphi \vee \psi) \qquad \exists \mathrm{x}\ \varphi \vee \psi \sim \exists \mathrm{x}\ (\varphi \vee \psi)$$

(*если* $\mathrm{x} \notin \mathrm{Var}_\psi$)

Строго говоря, справедливость каждой упомянутой равносильности следует **обосновать**

Но эти обоснования устроены очень просто и однотипно, и потому здесь не приводятся: достаточно применить метод семантических таблиц

Теорема о равносильной замене

$\varphi[\![\psi]\!]$ — обозначение формулы φ, содержащей подформулу ψ

$\varphi[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся из φ заменой некоторого вхождения подформулы ψ на χ

Теорема (о равносильной замене в ЛП)
Для любых формул φ, ψ, χ логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\![\psi]\!] \sim \varphi[\![\psi/\chi]\!]$$

Доказательство (индукцией по структуре формулы φ).

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно $(\psi \sim \chi \Rightarrow \varphi = \psi \sim \chi)$

Индуктивный переход. Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}) = \forall \mathrm{x}\, (\varphi'[\![\psi]\!])$$

Остальные случаи аналогичны

Теорема о равносильной замене

Доказательство (индуктивный переход).

Утверждение: $\forall \mathrm{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!]) \sim \forall \mathrm{x}\ (\varphi'[\![\psi/\chi]\!])$

Индуктивное предположение: $\varphi'[\![\psi]\!] \sim \varphi'[\![\psi/\chi]\!]$, то есть
для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любых предметов d, $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\![\psi]\!] \to \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\mathrm{x}/d, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\![\psi/\chi]\!] \to \varphi'[\![\psi]\!])[\mathrm{x}/d, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!] \to \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ (\varphi'[\![\psi/\chi]\!] \to \varphi'[\![\psi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Из блока 10: $\models \forall \mathrm{x}\ (A \to B) \to (\forall \mathrm{x}\ A \to \forall \mathrm{x}\ B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\ \varphi'[\![\psi]\!] \to \forall \mathrm{x}\ \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\ \varphi'[\![\psi/\chi]\!] \to \forall \mathrm{x}\ \varphi'[\![\psi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall \mathrm{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!]) \sim \forall \mathrm{x}\ (\varphi'[\![\psi/\chi]\!])$ ▼

Пример напоследок

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, сохранив его смысл — (не)выполнимость в каждой интерпретации на каждом наборе предметов

Например,

$$\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$$

$$\sim \qquad (\exists \mathrm{x}\, \varphi \sim \exists \mathrm{y}\, (\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}))$$

$$\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y})$$

$$\sim \qquad (\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y})$$

$$\sim \qquad (\neg\forall \mathrm{x}\, \varphi \sim \exists \mathrm{x}\, \neg\varphi)$$

$$\exists \mathrm{x}\, \neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y})$$

$$\sim \qquad (\exists \mathrm{x}\, \varphi \vee \psi \sim \exists \mathrm{x}\, (\varphi \vee \psi);\ \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi)$$

$$\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$\sim \qquad (\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi)$$

$$\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

Математическая логика и логическое программирование

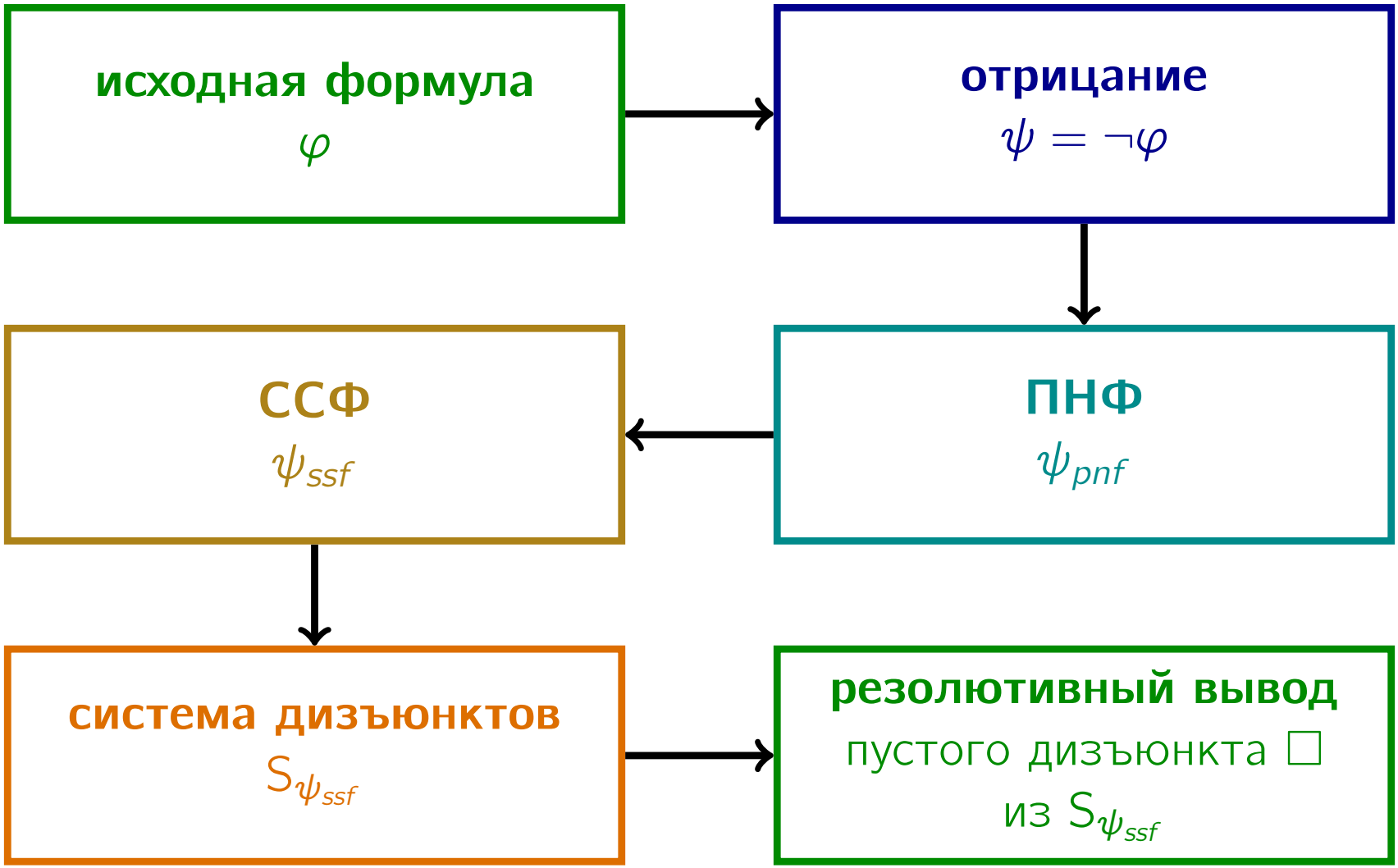
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 16

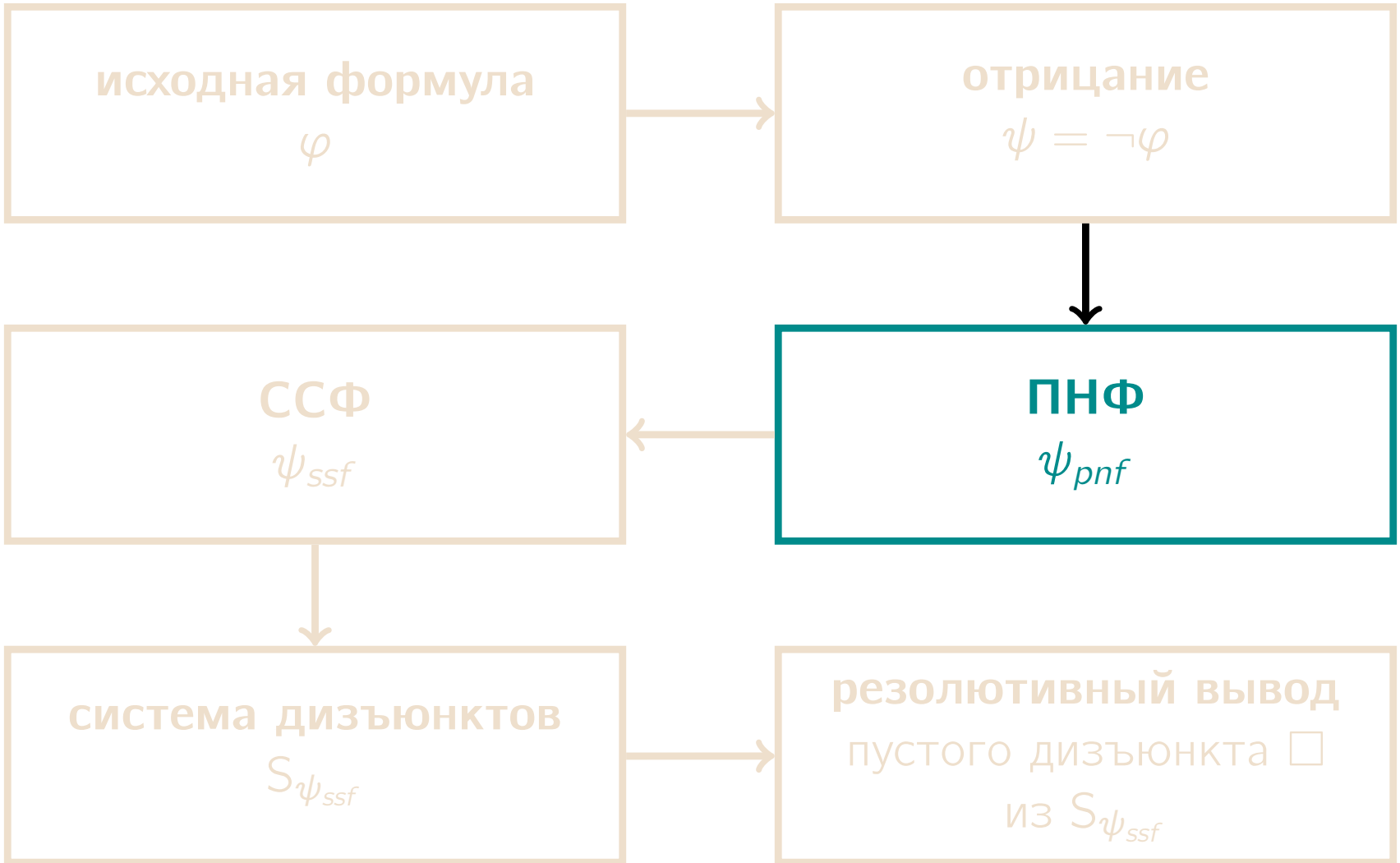
Предварённая нормальная форма (ПНФ)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi$$

Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула логики предикатов находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 \mathtt{x}_1 \ \ldots \ Q_n \mathtt{x}_n}_{\text{кванторная приставка}} \ \underbrace{(\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k)}_{\text{матрица}} \ , \text{ где}$$

- $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- матрица — это формула без кванторов в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
  - $\mathsf{D}_i = \mathsf{L}_1^i \vee \cdots \vee \mathsf{L}_{m_i}^i$ — множитель
  - L_j^i — литера: атом или его отрицание

Наряду с «находится в ПНФ» будем говорить «является ПНФ»

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u\ (P(x)\ \&\ \neg R(x,u)\ \&(\neg P(y)\vee R(x,z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- кванторная приставка:

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u$$

- матрица:

$$P(x)\ \&\ \neg R(x,u)\ \&(\neg P(y)\vee R(x,z))$$

  - множители: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y)\vee R(x,z)$
  - литеры: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y)$, $R(x,z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство

Согласно теореме о равносильной замене
и тому, что равносильность является отношением эквивалентности,
достаточно описать способ приведения произвольной формулы к ПНФ
при помощи применения основных равносильностей логики предикатов

Шаги приведения сгруппируем в несколько (5) этапов

Проиллюстрируем устройство этапов на конкретном примере:

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$

1. *Переименование переменных*

Переименуем связанные переменные так,
чтобы кванторами связывались попарно различные переменные

Для этого приме́ним основные равносильности

$$\forall \mathrm{x}\,\varphi \sim \forall \mathrm{y}\,(\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}) \qquad \exists \mathrm{x}\,\varphi \sim \exists \mathrm{y}\,(\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}),$$

каждый раз выбирая «новую» переменную y

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$

2. *Удаление импликаций*

Удалим из формулы все импликации
при помощи основной равносильности

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})))\vee\exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\neg\exists \mathrm{x}\,(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z})\vee\exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})))\vee\exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$

3. *Продвижение отрицаний*

Преобразуем формулу так,
чтобы отрицания располагались только непосредственно над атомами

Для этого приме́ним основные равносильности

$$\neg(\varphi\,\&\,\psi)\sim\neg\varphi\vee\neg\psi \qquad \neg(\varphi\vee\psi)\sim\neg\varphi\,\&\,\neg\psi \qquad \neg\neg\varphi\sim\varphi$$

$$\neg\forall \mathrm{x}\,\varphi\sim\exists \mathrm{x}\,\neg\varphi \qquad \neg\exists \mathrm{x}\,\varphi\sim\forall \mathrm{x}\,\neg\varphi$$

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z})\vee\exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})))\vee\exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim$$

$$\forall \mathrm{x}\,\neg(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z})\vee\exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})))\vee\exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim$$

$$\forall \mathrm{x}\,(\neg\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z})\vee\exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})))\&\neg\exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim$$

$$\forall \mathrm{x}\,(_\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\exists \mathrm{z}\,\neg\mathrm{P}(\mathrm{z})\vee\exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))\,\&\,\forall \mathrm{u}\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$

4. *Вынесение кванторов*

Вынесем все кванторы «наружу», собрав их в кванторную приставку

Для этого приме́ним основные равносильности

$\forall x\,\varphi\,\&\,\psi\sim\forall x\,(\varphi\,\&\,\psi)$ $\quad\exists x\,\varphi\,\&\,\psi\sim\exists x\,(\varphi\,\&\,\psi)$ $\quad\chi_1\,\&\,\chi_2\sim\chi_2\,\&\,\chi_1$

$\forall x\,\varphi\vee\psi\sim\forall x\,(\varphi\vee\psi)$ $\quad\exists x\,\varphi\vee\psi\sim\exists x\,(\varphi\vee\psi)$ $\quad\chi_1\vee\chi_2\sim\chi_2\vee\chi_1$

После этапов 2, 3 «над» кванторами могут располагаться только $\&$ и $\vee$

После этапа 1 при вынесении квантора за скобки в ψ не встречается x

$$\forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\,(P(x)\,\&\,_\exists z\,(\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\,(\exists z\,(P(x)\,\&\,_(\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y)))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$
$$\sim\ldots\sim$$
$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z)\vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{z}\, \exists \mathrm{y}\, \forall \mathrm{u}\, (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, (\neg \mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}))$

5. *Получение КНФ*

С использованием законов булевой алгебры

$$\psi \vee (\chi_1 \,\&\, \chi_2) \sim (\psi \vee \chi_1) \,\&\, (\psi \vee \chi_2) \qquad\qquad \psi \vee \chi \sim \chi \vee \psi$$

булеву часть формулы можно легко преобразовать в КНФ

В рассматриваемом примере никакие преобразования не нужны, а методы приведения произвольной булевой формулы к КНФ (*вроде бы*) должны быть вам уже́ известны

Итог:

после этапа 4 в формуле появляется **кванторная приставка**,
а после этапа 5 «под» приставкой располагается **КНФ**,
то есть получается ПНФ ▼

Теорема о предварённой нормальной форме

Напоследок — сквозной пример из доказательства от начала до конца

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists u\,R(x,u))$$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\to\exists u\,R(x,u))$$

$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z)\vee\exists y\,R(x,y)))\vee\exists u\,R(x,u))$$

$$\forall x\,\neg(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z)\vee\exists y\,R(x,y)))\vee\exists u\,R(x,u))$$

$$\forall x\,(\neg\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z)\vee\exists y\,R(x,y)))\&\neg\exists u\,R(x,u))$$

$$\forall x\,(_P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

$$\forall x\,(P(x)\,\&\,_\exists z\,(\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

$$\forall x\,(\exists z\,(P(x)\,\&\,_(\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y)))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

...

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z)\vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Математическая логика и логическое программирование

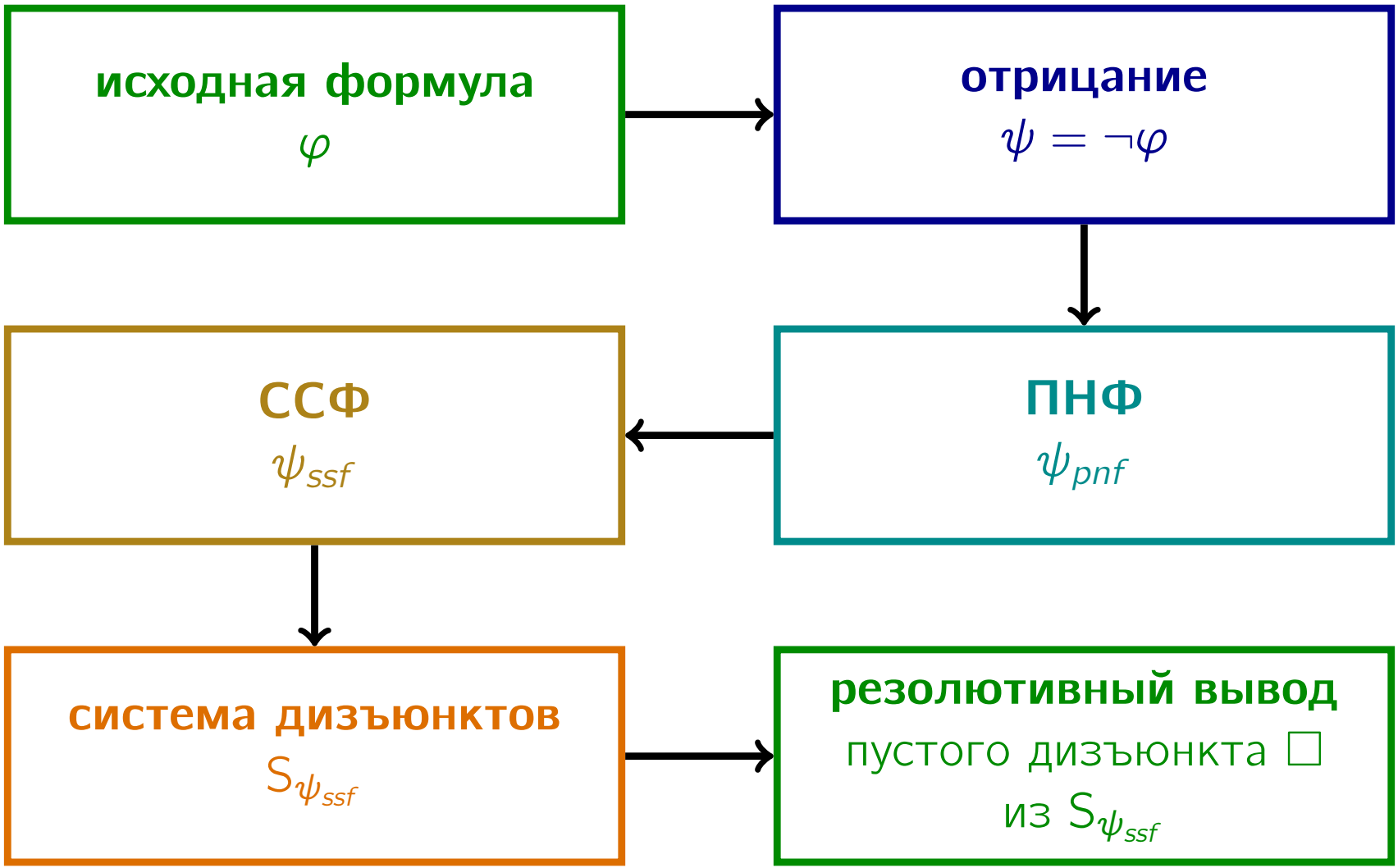
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 17

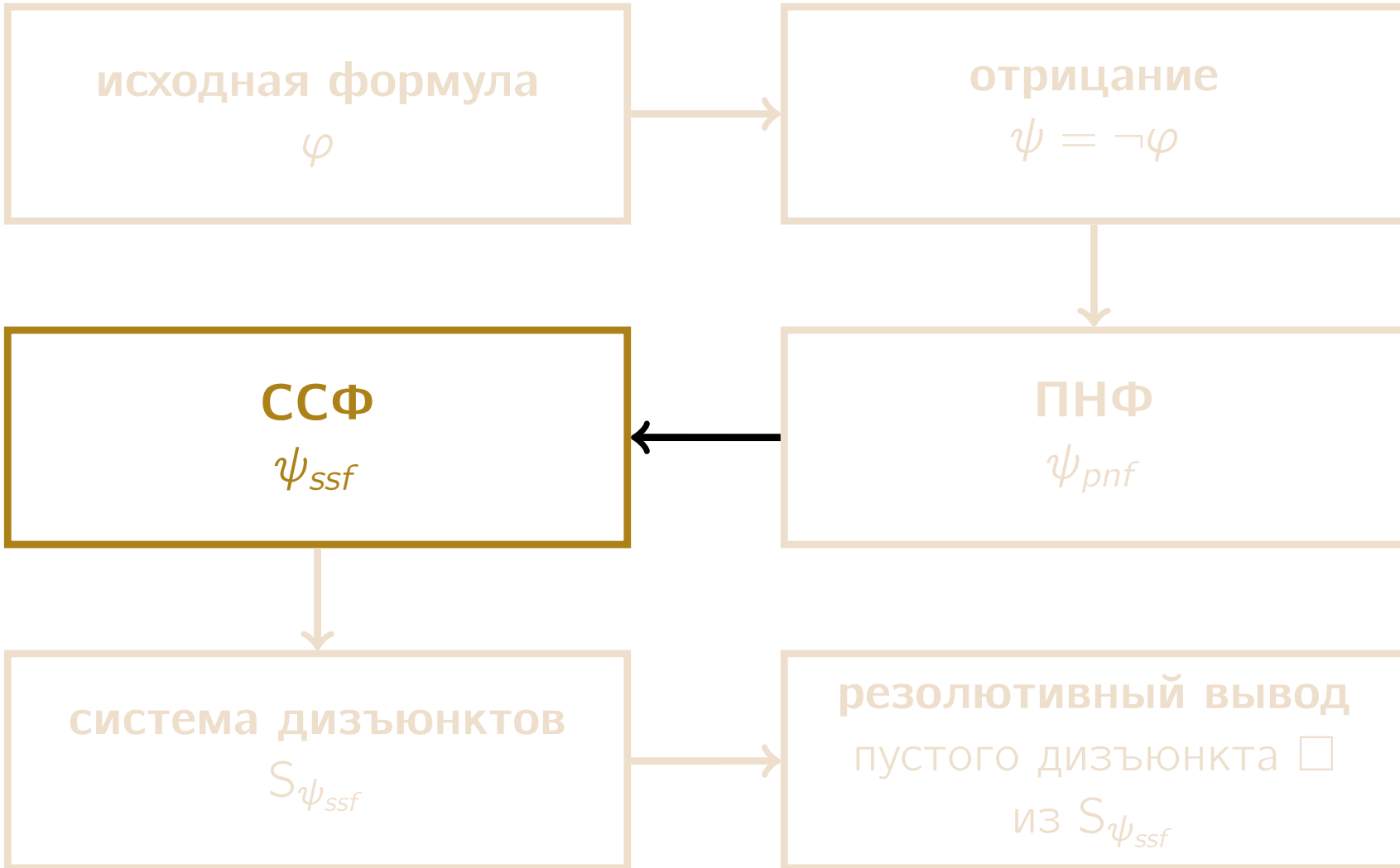
Сколемовская стандартная форма (ССФ)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf}$$

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула логики предикатов находится в сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,(\mathrm{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{D}_k)$$

Например, формула

$$\forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{u}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, (\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x}))) \,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с «находится в ССФ» будем говорить «является ССФ»

На одном из этапов метода резолюций следует преобразовать ПНФ в настолько же (не)выполнимую ССФ

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ $\mathbf{f}$ не содержится в χ. Тогда

$$|\!\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Небольшая вольность: если слева от $\exists$ не стоит ни одного $\forall$, то, согласно лемме, $\mathbf{f}$ — 0-местный функциональный символ: так будем называть **константы**, и писать «$\mathbf{f}()$» наряду с «$\mathbf{f}$»

Доказательство ($\Leftarrow$)

Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$

По семантике «$\forall$», для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно

$$\mathcal{I} \models \chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}[\widetilde{d}^n]$$

Следовательно, верно и $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n)]$

По семантике «$\exists$», верно $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi)[\widetilde{d}^n]$

По семантике «$\forall$», так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi$

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ $\mathbf{f}$ не содержится в χ. Тогда

$$|\!\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство ($\Rightarrow$)

Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы φ

По семантике «$\forall$» и «$\exists$», для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ существует предмет d_{n+1}, такой что $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

По $\mathcal{I}$ построим **новую** интерпретацию $\mathcal{J}$:

- если в сигнатуре был функциональный символ $\mathbf{f}$, удалим его
- добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$
- оценим $\mathbf{f}$ так, чтобы выполнялось равенство $\bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n)]$, а значит, и $\mathcal{J} \models \chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}[\widetilde{d}^n]$

По семантике «$\forall$», так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{J} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$ ▼

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\ \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Устранение квантора $\exists$ с введением новых символов с целью получить более простую «хорошую» формулу обычно называют сколемизацией (*здесь «хорошая» — сохраняющая выполнимость и невыполнимость*)

При устранении $\exists$ на место удаляемой переменной подставляются сколемовские термы (*здесь* — $\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор $\exists$, самый левый $\exists$ удаляется при помощи подстановки сколемовского терма:

$$\varphi_{pnf} = \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, \forall x_{k+1} \ldots \forall x_{m-1}\, \exists x_m \ldots \chi$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1}\, \forall x_{k+1} \ldots \forall x_{m-1}\, \exists x_m \ldots (\chi\{x_k/\mathbf{f}_1(x_1, \ldots, x_{k-1})\})$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1}\, \forall x_{k+1} \ldots \forall x_{m-1} \ldots (\chi\{x_k/\mathbf{f}_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_m/\mathbf{f}_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1})\})$$

$$\ldots$$

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

При этом **важно** (!) при удалении очередного $\exists$
каждый раз выбирать **новый** функциональный символ:
не содержащийся в формуле после всех предыдущих удалений

Алгоритм сколемизации ПНФ

Пример:

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{z}\ \exists \mathrm{y}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg \mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))\,\&\,\neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}))$$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))\,\&\,\neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}))$$

$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})))\,\&\,\neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}))$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- **g** — любой функциональный символ местности 1, кроме **f**

Алгоритм сколемизации ПНФ

Другой пример:

$$\exists u\ \exists v\ \forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(u, v) \,\&\, P(v, w) \,\&\, P(w, x) \,\&\, P(x, y) \,\&\, P(y, z) \,\&\, P(z, u))$$

$$\exists v\ \forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c}, v) \,\&\, P(v, w) \,\&\, P(w, x) \,\&\, P(x, y) \,\&\, P(y, z) \,\&\, P(z, \mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \,\&\, P(\mathbf{d}, w) \,\&\, P(w, x) \,\&\, P(x, y) \,\&\, P(y, z) \,\&\, P(z, \mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \,\&\, P(\mathbf{d}, w) \,\&\, P(w, \mathbf{f}(w)) \,\&\, P(\mathbf{f}(w), y) \,\&\, P(y, z) \,\&\, P(z, \mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \forall y\ (\quad P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \,\&\, P(\mathbf{d}, w) \,\&\, P(w, \mathbf{f}(w)) \,\&\, P(\mathbf{f}(w), y) \,\&\, P(y, \mathbf{g}(w, y)) \,\&\, P(\mathbf{g}(w, y), \mathbf{c}) \quad)$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- **c** — любая константа (ни одной не содержится в формуле)
- **d** — любая константа, кроме **c**
- **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- **g** — любой функциональный символ местности 2 (ни один не содержится в формуле)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Теорема (о сколемизации). **Для любой ПНФ φ_{pnf} формула $Sk(\varphi_{pnf})$ является ССФ, для которой верно следующее:**

$$|\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad |\models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство.

Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ — формулы, последовательно получающиеся удалением кванторов $\exists$ (по одному) согласно алгоритму сколемизации ($\psi_1 = \varphi_{pnf}$, $\psi_k = Sk(\varphi_{pnf})$)

По лемме об удалении квантора $\exists$, справедливы равносильности

$$|\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad |\models \psi_2 \quad \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad |\models Sk(\varphi_{pnf}) \ \blacktriangledown$$

А если в формулировке теоремы заменить «выполнима» ($|\models$) на «общезначима» ($\models$), останутся ли верными $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$?

Математическая логика и логическое программирование

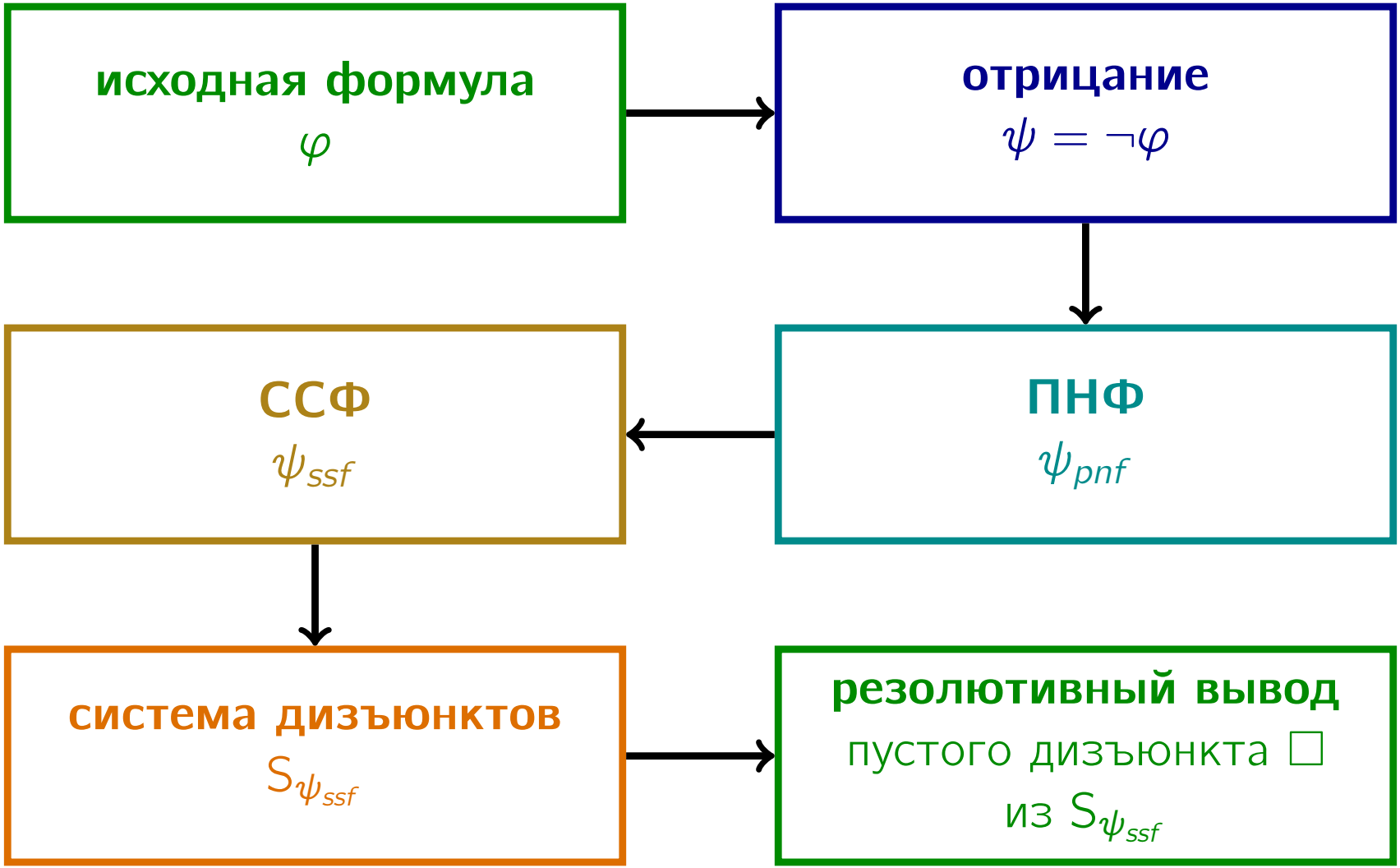
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 18

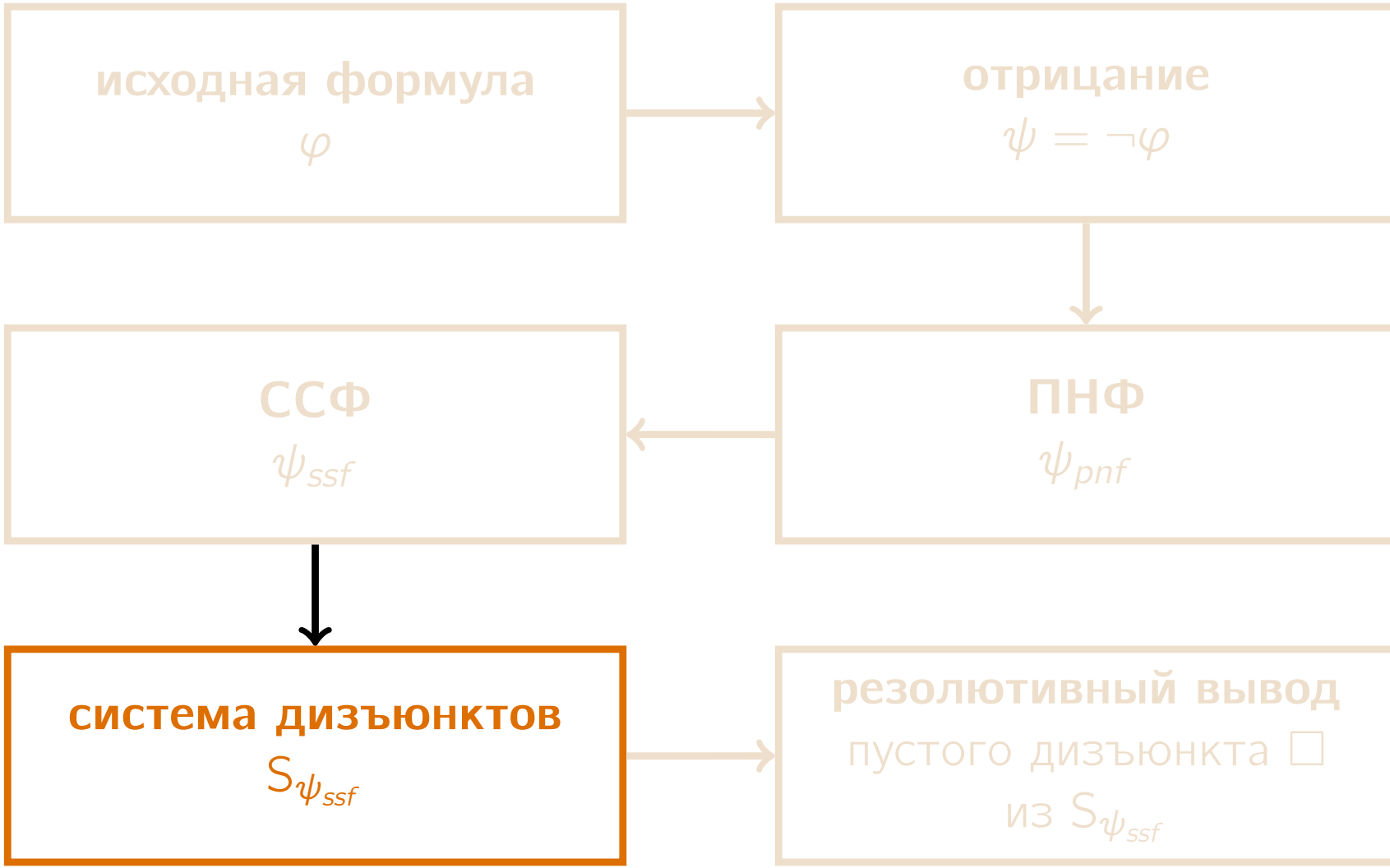
Системы дизъюнктов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$

Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathrm{L}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{L}_k),$$

где L_i — литера (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathrm{L}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{L}_k) = \mathrm{L}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{L}_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем
отождествлять дизъюнкт с мультимножеством его литер:

$$\mathrm{L}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{L}_k = \{\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_k\}$$

Системы дизъюнктов

Например: (*но это* **только** *при обсуждении дизъюнктов*)

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})))$$

$$=$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$$

$$=$$

$$\{\mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$$

$$=$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{x})$$

$$=$$

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{x}))$$

Пустой дизъюнкт $\square$ — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$\mathsf{L}_1 \vee \cdots \vee \mathsf{L}_k \text{ «}\sim\text{» } \mathsf{L}_1 \vee \cdots \vee \mathsf{L}_k \vee \mathbb{f}, \text{ а значит, } \square \text{ «}\sim\text{» } \mathbb{f}$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) множество дизъюнктов

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall \mathrm{x}\,(\varphi \,\&\, \psi) \sim \forall \mathrm{x}\,\varphi \,\&\, \forall \mathrm{x}\,\psi$

Доказательство. Очевидно?

(*Обосновать эту равносильность настолько же просто, как и все основные равносильности*)

Теорема (о переходе к дизъюнктам)

Для ССФ с любым набором множителей $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_k$ **верно:**

$$\models \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,(\mathrm{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{D}_k) \quad \Leftrightarrow \quad \models \{\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_1, \ldots, \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_k\}$$

Доказательство

По утверждению выше, $\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,(\mathrm{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{D}_k) \sim \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_k$

Следовательно, с учётом семантики &,

$\models \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,(\mathrm{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{D}_k)$

$\Leftrightarrow \models \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_k$

$\Leftrightarrow \models \{\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_1, \ldots, \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{D}_k\}$ ▼

Системы дизъюнктов

Пример:

$$\not\models \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{u}\, (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, (\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x}))) \,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{\mathrm{P}(\mathrm{x}), \qquad \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})), \qquad \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u})\}$$

Математическая логика и логическое программирование

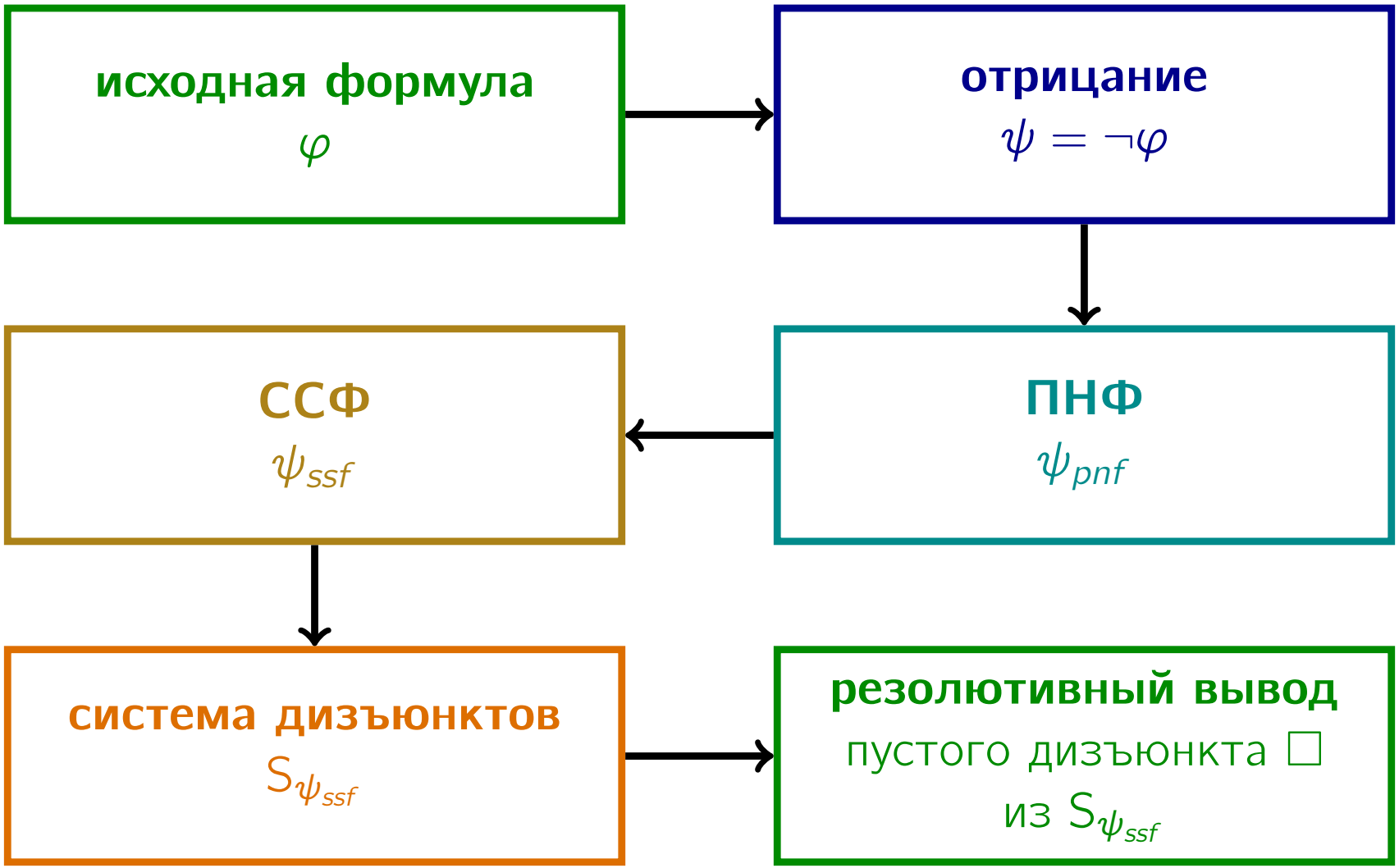
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 19

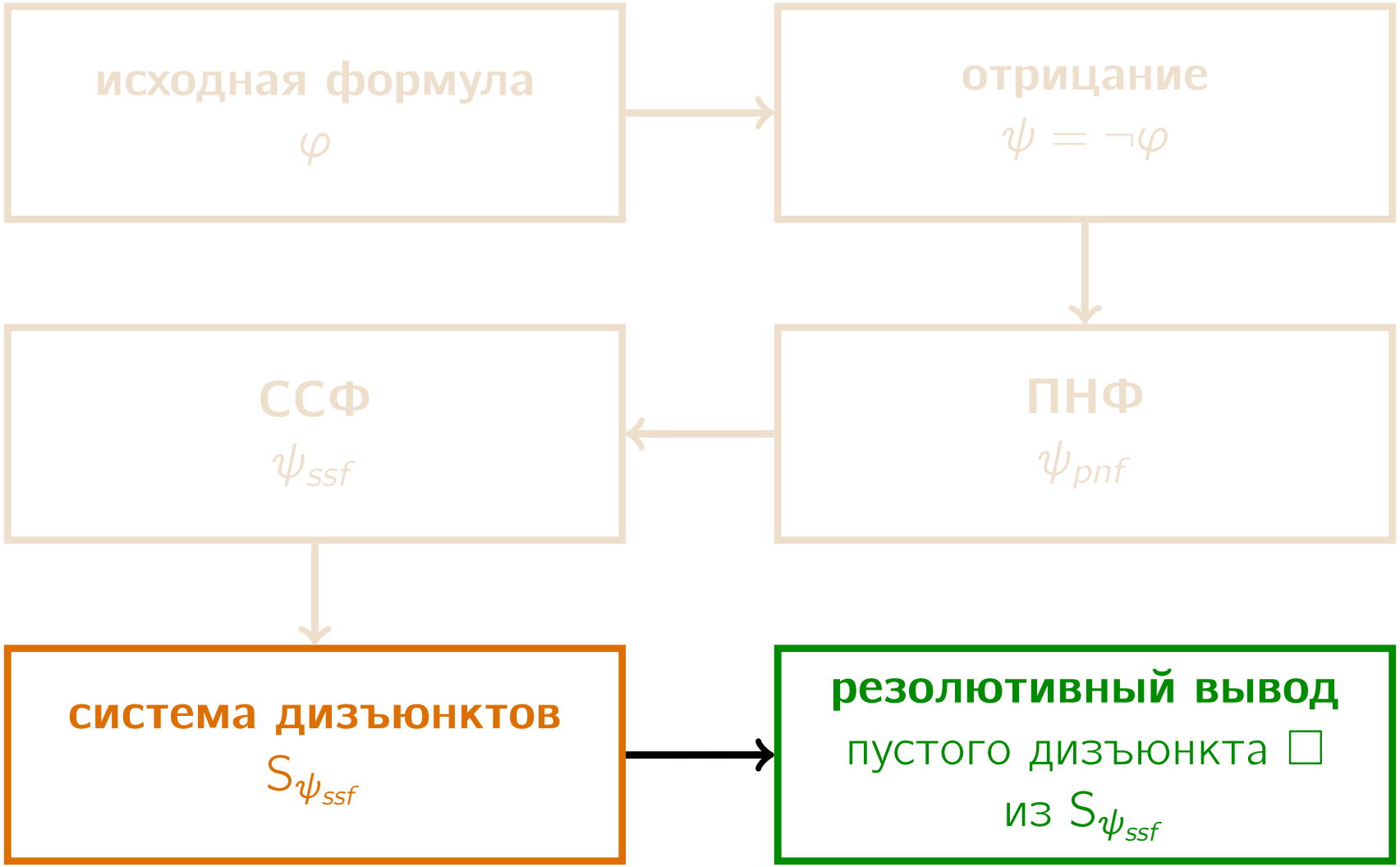
Композиция подстановок
Постановка задачи унификации

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Противоречия в системах дизъюнктов

На последних этапах метода резолюций
требуется проверить выполнимость системы дизъюнктов

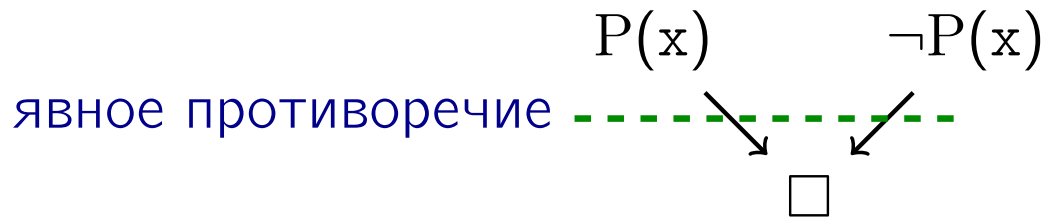
Попробуем, по аналогии с методом семантических таблиц,
придумать способ извлечения явных противоречий
из скрытых (неявных)

В качестве явного противоречия
будем использовать пустой дизъюнкт ($\square$)

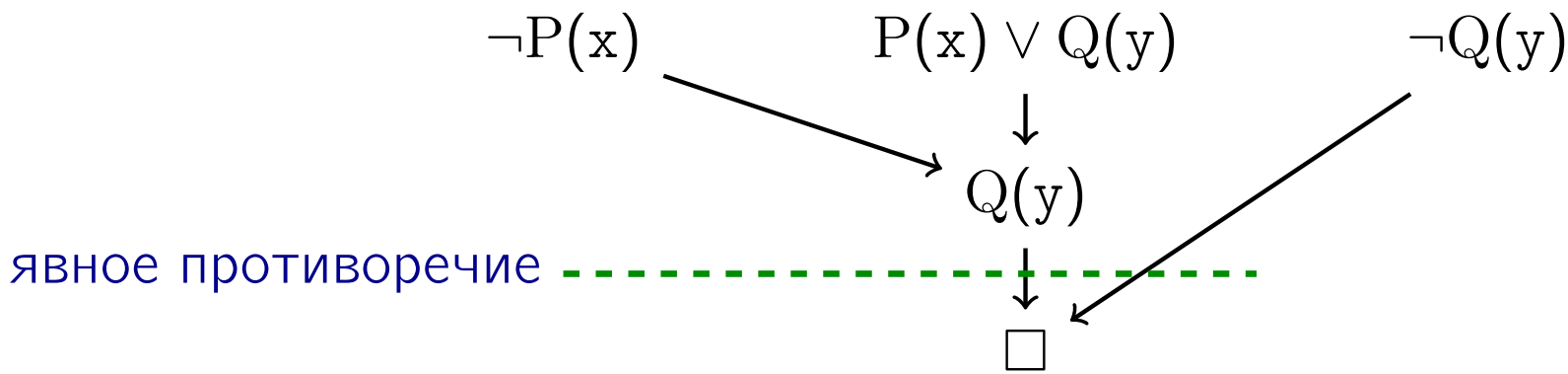
Начнём издалека: приведём несколько примеров того,
как можно было бы «разумно» и «просто» извлечь $\square$
из невыполнимой системы дизъюнктов

Противоречия в системах дизъюнктов

$\not\models \{\mathrm{P(x)},\ \neg\mathrm{P(x)}\}$:



$\not\models \{\neg\mathrm{P(x)},\ \neg\mathrm{Q(y)},\ \mathrm{P(x)} \vee \mathrm{Q(y)}\}$:

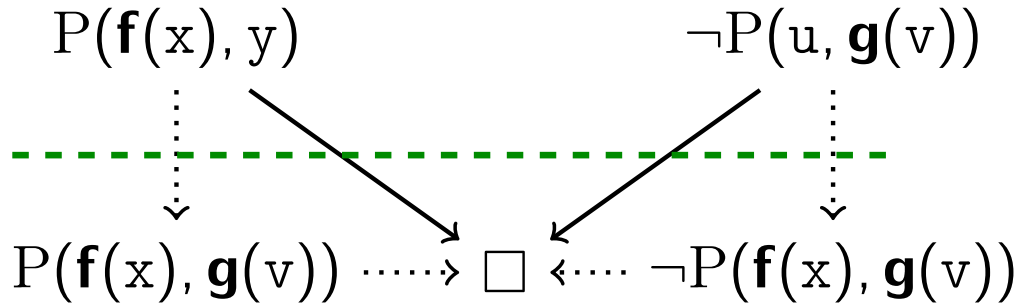


$$\forall \mathrm{x}\ \neg\mathrm{P(x)},\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{P(x)} \vee \mathrm{Q(y)}) \models \forall \mathrm{y}\ \mathrm{Q(y)}$$

Противоречия в системах дизъюнктов

$\not\models \{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}),\ \neg\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))\}$

не очень явное противоречие



$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \models \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{v}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathbf{g}(\mathrm{v}))$$

$$\forall \mathrm{u}\ \forall \mathrm{v}\ \neg\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})) \models \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{v}\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathbf{g}(\mathrm{v}))$$

Чтобы обнаружить не очень явное противоречие в системе дизъюнктов, потребовалось привести атомы дизъюнктов **к общему виду**

Приведение выражений к общему виду называется унификацией, и перед описанием последнего этапа метода резолюций (**резолютивного вывода** $\square$) необходимо строго сформулировать и научиться решать эту задачу

Композиция подстановок

Унификация атомов A, B достигается применением к ним подстановки θ, такой что $A\theta = B\theta$

Напоминание

Подстановка — это отображение $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством связок:

$$\{\mathtt{x}_1/t_1,\ \ldots,\ \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$$

$E\theta$ — это результат применения подстановки θ к выражению E

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем основные алгебраические свойства подстановок

Композиция подстановок

Композиция подстановок θ и η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной $\mathtt{x}$ верно равенство

$$\mathtt{x}(\theta\eta) = (\mathtt{x}\theta)\eta$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ **и** $\eta = \{\mathtt{y}_1/s_1, \ldots, \mathtt{y}_k/s_k\}$**. Тогда**

$$\theta\eta = \{\mathtt{x}_i/t_i\eta \mid 1 \le i \le n,\ x_i \neq t_i\eta\} \cup \{\mathtt{y}_j/s_j \mid 1 \le j \le k,\ \mathtt{y}_j \notin \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n\}\}$$

Доказательство

Рассмотрим переменную $\mathtt{z} \in \mathrm{Var}$

Если $\mathtt{z} \notin \mathrm{Dom}_\theta \cup \mathrm{Dom}_\eta$, то $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = \mathtt{z}\eta = \mathtt{z}$

Если $\mathtt{z} = \mathtt{y}_j \in \mathrm{Dom}_\eta \setminus \mathrm{Dom}_\theta$, то $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = \mathtt{z}\eta = s_j$

Иначе $\mathtt{z} = \mathtt{x}_i \in \mathrm{Dom}_\theta$, и $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = t_i\eta$ ▼

Композиция подстановок

Пример

$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{u}),\ \mathrm{z}/\mathrm{y}\}$

$\eta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{y}/\mathrm{z}, \mathrm{u}/\mathbf{c}\}$

$\theta\eta = ?$

$$\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{c})\eta,\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{u})\eta,\ \mathrm{z}/\mathrm{y}\eta\} \cup \{\mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

$$\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ \mathrm{z}/\mathrm{z}\} \cup \{\mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

$$\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\} \cup \{\mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

$$\theta\eta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ \mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

Задача унификации

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1, E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$

$\text{У}(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Выражения E_1, E_2 унифицируемы, если $\text{У}(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Утверждение

Для любых подстановок θ, η и любых выражений E_1, E_2 верно:

$$\textbf{если } \theta \in \textbf{У}(E_1, E_2)\textbf{, то } \theta\eta \in \textbf{У}(E_1, E_2)$$

Доказательство

$$\theta \in \text{У}(E_1, E_2) \quad \Leftrightarrow \quad E_1\theta = E_2\theta \quad \Rightarrow \quad E_1\theta\eta = E_2\theta\eta \quad \Leftrightarrow \quad \theta\eta \in \text{У}(E_1, E_2)$$ ▼

Подмножество S множества подстановок Θ называется полным в Θ, если любая подстановка θ из Θ представима в виде $\theta = \eta\mu$, где $\eta \in S$

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором выражений E_1, E_2, если множество $\{\theta\}$ является полным в $\text{У}(E_1, E_2)$

$\text{НОУ}(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Задача унификации

Пример

Рассмотрим два атома:

$$A = \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \qquad B = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))$$

Подстановка $\eta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathrm{v})), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{v}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{x}/\mathbf{c}\}$ — унификатор атомов A и B (то есть $\eta \in \text{У}(A, B)$), т.к.

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})\eta = \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathrm{v}))) = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))\eta$$

А подстановка $\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\}$ — *более общий* унификатор A и B:

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})\theta = \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathbf{g}(\mathrm{v})) = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))\theta$$

$$\eta = \theta\{\mathrm{v}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{x}/\mathbf{c}\}$$

На самом деле θ — **наиболее общий унификатор** атомов A и B

(но как это доказать?)

А выражения $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{x}))$ и $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{y})$ **неунифицируемы**

(а это как доказать?)

Задача унификации

формулируется следующим образом:

для заданных выражений E_1, E_2

выяснить, унифицируемы ли эти выражения,

и если это так, то вычислить

множество унификаторов, полное в $\mathbf{У}(E_1, E_2)$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 20

Алгоритм унификации атомарных формул

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Напоминание: задача унификации

Для заданных выражений E_1, E_2 логики предикатов

выяснить, унифицируемы ли эти выражения,

и если это так, то вычислить

множество унификаторов, полное в У(E_1, E_2)

Чтобы освоить метод резолюций, достаточно
научиться решать эту задачу для произвольной пары **атомов**

Переход от атомов к системам уравнений

Утверждение

Никакая пара атомов $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)$, $\mathrm{Q}(s_1, \ldots, s_m)$ с различными предикатными символами $\mathrm{P}^{(k)}$, $\mathrm{Q}^{(m)}$ не унифицируема

Доказательство

Пусть $\mathrm{P}(\widetilde{t}^k)\theta = \mathrm{P}(\widetilde{t'}^k)$ и $\mathrm{Q}(\widetilde{s}^m)\theta = \mathrm{Q}(\widetilde{s'}^m)$

Т.к. $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$, верно и $\mathrm{P}(\widetilde{t'}^k) \neq \mathrm{Q}(\widetilde{s'}^m)$ ▼

Далее рассматривается только унификация атомов, содержащих одинаковые предикатные символы

Переход от атомов к системам уравнений

Унификация атомов $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)$, $\mathrm{P}(s_1, \ldots, s_k)$

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление подстановки θ, такой что $t_1\theta = s_1\theta, \quad \ldots, \quad t_k\theta = s_k\theta$

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление подстановки θ, такой что левая и правая части каждого уравнения в системе $\mathcal{E}$ вида

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

становятся посимвольно одинаковыми при применении θ

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление **решения системы уравнений** $\mathcal{E}$
в свободной[1] алгебре термов[2]

---

1 Значение терма — это сам терм,
то есть термы равны, если они посимвольно совпадают

2 Операция композиции — это подстановка терма на место переменной

Системы уравнений над термами

Чтобы отличать равенство в уравнениях системы
от посимвольного совпадения выражений и от других видов равенства,
будем знак равенства в системах уравнений записывать так: $\doteq$

Системой уравнений (*в свободной алгебре термов*) будем называть
запись $\mathcal{E}$ вида

$$\begin{cases} t_1 \doteq s_1 \\ \dots \\ t_k \doteq s_k \end{cases},$$

где $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_k$ — термы

Подстановка θ — унификатор (*решение*) системы $\mathcal{E}$,
если для каждого i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, верно $t_i\theta = s_i\theta$

$\text{У}(\mathcal{E})$ — множество всех унификаторов системы уравнений $\mathcal{E}$

Система уравнений $\mathcal{E}$ унифицируема (*имеет решение*), если $\text{У}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$

$\text{НОУ}(\mathcal{E})$ — множество всех наиболее общих унификаторов
системы уравнений $\mathcal{E}$

Системы уравнений над термами

Примеры

Пусть $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) \doteq \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) \doteq \mathrm{z} \end{cases}$ и $\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\}$

Тогда $\mathcal{E}\theta = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \doteq \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) \doteq \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$ и θ — унификатор системы

(А как его вычислить и проверить, наиболее общий ли он?)

А система $\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{y}) \doteq \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) \doteq \mathrm{z} \end{cases}$ неунифицируема

(А как такое доказать в общем случае?)

Системы уравнений над термами

Утверждение. **Множества унификаторов любой пары атомов**

$$\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k), \mathrm{P}(s_1, \ldots, s_k)$$

и системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 \stackrel{?}{=} s_1 \\ \ldots \\ t_k \stackrel{?}{=} s_k \end{cases}$$

совпадают

Доказательство. Очевидным образом следует
из определений унификатора атомов и унификатора системы ▼

Унификация переменной и терма

Лемма (о связке). **Для любых переменной** x **и терма** t **верно:**

1. **Если** $x = t$**, то** $\varepsilon \in$ **НОУ**(x, t)
2. **Если** $\mathrm{x} \notin \mathrm{Var}_t$**, то** $\{\mathrm{x}/t\} \in$ **НОУ**(x, t)
3. **Если** $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$**, то У**$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство

1. Следует из того, что $\mathrm{x}\varepsilon = \mathrm{x}$ и для любой подстановки η верно $\eta = \varepsilon\eta$

2. Достаточно показать, что если $\mathrm{x} \notin \mathrm{Var}_t$, то:

а) $\{\mathrm{x}/t\}$ — унификатор (*переменной* x *и терма* t)

б) для любого унификатора θ существует подстановка η, такая что

$$\theta = \{\mathrm{x}/t\}\eta$$

а) Следует из равенств $\mathrm{x}\{\mathrm{x}/t\} = t = t\{\mathrm{x}/t\}$

Унификация переменной и терма

Лемма (о связке). **Для любых переменной** x **и терма** t **верно:**

1. **Если** $x = t$**, то** $\varepsilon \in$ **НОУ**(x, t)
2. **Если** $\mathrm{x} \notin \mathrm{Var}_t$**, то** $\{\mathrm{x}/t\} \in$ **НОУ**(x, t)
3. **Если** $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$**, то У**$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство

2б) $\mathrm{x} \notin \mathrm{Var}_t$ и $\mathrm{x}\theta = t\theta \overset{?}{\Rightarrow} \exists\eta \quad \theta = \{\mathrm{x}/t\}\eta$

Достаточно показать, что $\theta = \{\mathrm{x}/t\}\theta$

Для этого рассмотрим произвольную переменную y и покажем, что $\mathrm{y}\theta = \mathrm{y}\{\mathrm{x}/t\}\theta$:

- Если $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{x}\theta = t\theta = \mathrm{x}\{\mathrm{x}/t\}\theta = \mathrm{y}\{\mathrm{x}/t\}\theta$
- Иначе $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$, и $\mathrm{y}\theta = \mathrm{y}\{\mathrm{x}/t\}\theta$

Следовательно, для любой переменной y верно равенство $\mathrm{y}\theta = \mathrm{y}\{\mathrm{x}/t\}\theta$, а значит, верно и $\theta = \{\mathrm{x}/t\}\theta$

Унификация переменной и терма

Лемма (о связке). **Для любых переменной** x **и терма** t **верно:**

1. **Если** $x = t$**, то** $\varepsilon \in$ **НОУ**(x, t)
2. **Если** $\mathrm{x} \notin \mathrm{Var}_t$**, то** $\{\mathrm{x}/t\} \in$ **НОУ**(x, t)
3. **Если** $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$**, то У**$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство

3. Рассмотрим произвольную подстановку θ и покажем,
что если $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_t$ и $\mathrm{x} \neq t$,
то θ не может являться унификатором x и t

Пусть $\mathrm{x}\theta = s$

Тогда $|\mathrm{x}\theta| = |s| < |t\{\mathrm{x}/s\}| \leq |t\theta|$ ($|p|$ — *длина терма* p)

Следовательно, $|\mathrm{x}\theta| < |t\theta|$, а значит, $\mathrm{x}\theta \neq t\theta$ ▼

Унификация приведённой системы

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \quad \ldots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные,
не встречающиеся в правых частях уравнений

Пример

$$\begin{cases} \mathtt{x} = \mathbf{f}(\mathtt{y}, \mathbf{g}(\mathtt{y})) \\ \mathtt{z} = \mathtt{w} \\ \mathtt{u} = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$ — **приведённая** система

Унификация приведённой системы

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \ldots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные,
не встречающиеся в правых частях уравнений

Пример

$$\begin{cases} \mathtt{x} = \mathbf{f}(\mathtt{y}, \mathbf{g}(\mathtt{y})) \\ \mathtt{x} = \mathtt{w} \\ \mathtt{y} = \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathtt{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathtt{x}) \end{cases}$$

— **неприведённая** система:

1. $\mathbf{g}(\mathtt{z})$ стоит в левой части уравнения, и это не переменная
2. $\mathtt{x}$ встречается в левых частях два раза
3. $\mathtt{y}$ встречается и в левой, и в правой частях

Унификация приведённой системы

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \quad \ldots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений

Лемма (о приведённой системе)

Если $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \quad \ldots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases}$ **— приведённая система,**

то $\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_k/t_k\} \in$ **НОУ**$(\mathcal{E})$

Доказательство. Следует из леммы о связке ▼

Унификация произвольной системы

Алгоритм, о котором будет дальше идти речь, коротко описывается так:
это метод исключения переменных, широко применяющийся
для решения систем линейных алгебраических уравнений
и адаптированный к свободной алгебре термов

Напоминание, как работает этот метод
для уравнений над действительными числами:

$$\begin{cases} x = 3 - z + y \\ 2y + 3z = x + 2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = 3 - z + y \\ 2y + 3z = 3 - z + y + 2 \end{cases} \longmapsto \begin{cases} x = 3 - z + y \\ y = 5 - 4z \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\text{решения очевидны} \dashrightarrow \begin{cases} x = 8 - 5z \\ y = 5 - 4z \end{cases} \longleftarrow\!\shortmid \begin{cases} x = 3 - z + 5 - 4z \\ y = 5 - 4z \end{cases}$$

В свободной алгебре термов вместо спектра арифметических операций
содержится только одна операция композиции,
но это не мешает адаптировать метод без особых усилий

Унификация произвольной системы

Алгоритм унификации ($\mathfrak{A}$):[1]

Далее будут описаны 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила **произвольно** (**недетерминированно**) применяются к системе, пока не станет верным одно из условий:

- получена приведённая система уравнений
  - ответ: унификатор из леммы о приведённой системе
- **явно** установлена невозможность унификации системы
  - ответ: СТОП: система неунифицируема

1 Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

Унификация произвольной системы

Правила преобразования системы уравнений

Упрощение системы: $(\mathtt{x} \in \mathrm{Var},\ t \in \mathrm{Term})$

Triv: удалить $t \doteq t$

Swap: заменить $t \doteq \mathtt{x}$ на $\mathtt{x} \doteq t$, если $t \notin \mathrm{Var}$

Func: заменить $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) \doteq \mathbf{f}(s_1, \ldots, s_k)$ на $\begin{cases} t_1 \doteq s_1 \\ \ldots \\ t_k \doteq s_k \end{cases}$

Elim: если в системе содержится уравнение $Eq : \mathtt{x} \doteq t$, где

- $\mathtt{x} \notin \mathrm{Var}_t$ и
- $\mathtt{x}$ встречается в других уравнениях системы

то применить подстановку $\{\mathtt{x}/t\}$ ко всем уравнениям системы, кроме Eq

Унификация произвольной системы

Правила преобразования системы уравнений

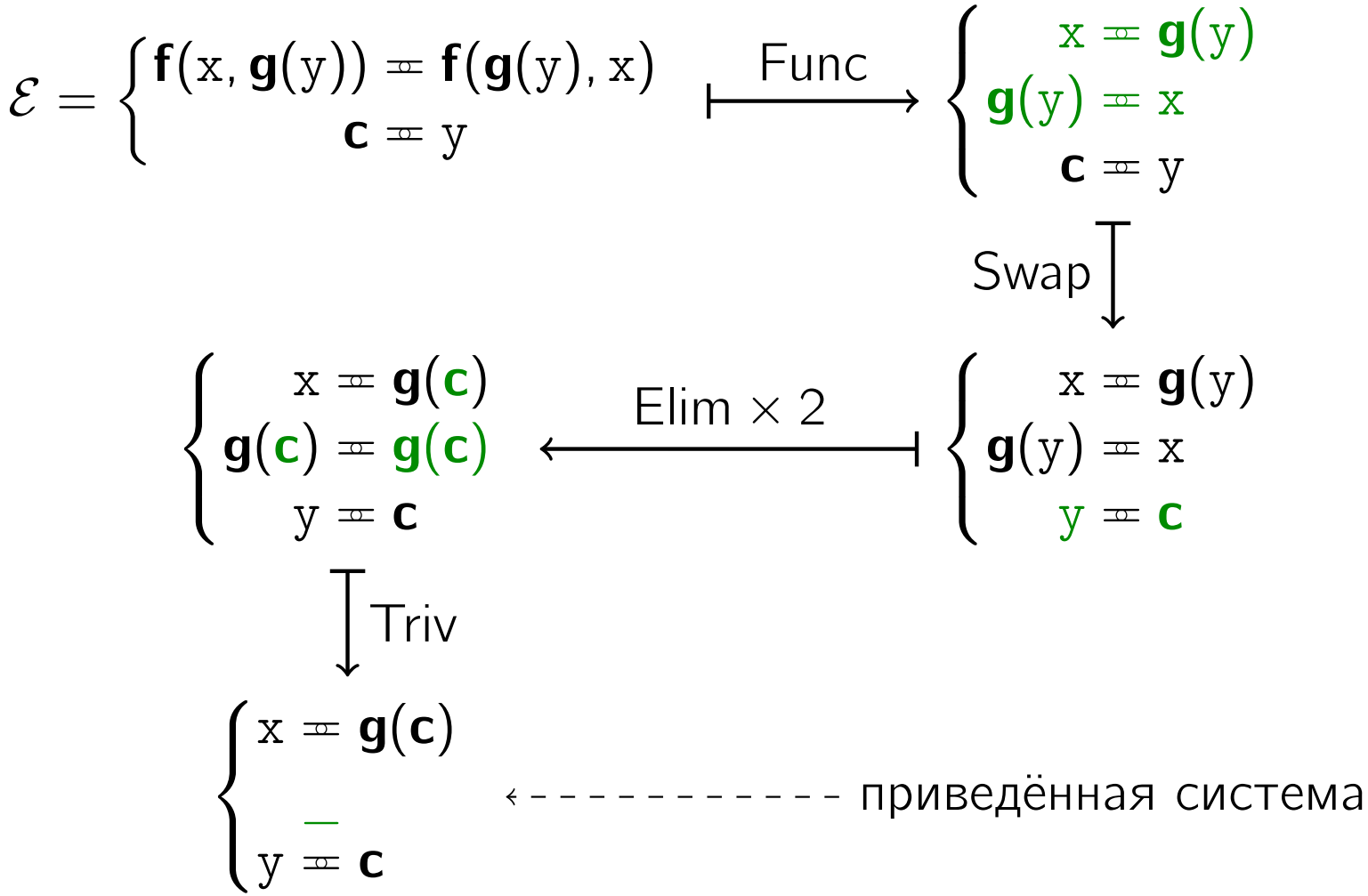
Явная неунифицируемость: $(\mathtt{x} \in \mathrm{Var},\ t \in \mathrm{Term})$

NElim: если в системе содержится уравнение $\mathtt{x} \eqdot t$, где $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}_t$ и $\mathtt{x} \neq t$, то
СТОП: система неунифицируема

NFunc: если в системе содержится уравнение $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) \eqdot \mathbf{g}(s_1, \ldots, s_m)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, то
СТОП: система неунифицируема

Унификация произвольной системы

Примеры



Ответ: $\{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{c}\} \in \mathrm{НОУ}(\mathcal{E})$

Унификация произвольной системы

Примеры

$$\mathcal{E}' = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) \eqdot \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} \eqdot \mathrm{y} \end{cases} \xrightarrow{\text{NFunc}} \text{СТОП}$$

Ответ: $\mathsf{У}(\mathcal{E}') = \emptyset$

$$\mathcal{E}'' = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) \eqdot \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} \eqdot \mathrm{y} \end{cases} \xrightarrow{\text{Func}} \begin{cases} \mathrm{x} \eqdot \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{x}) \eqdot \mathrm{x} \\ \mathbf{c} \eqdot \mathrm{y} \end{cases}$$

$$\downarrow \text{Swap}$$

$$\text{СТОП} \xleftarrow{\text{NElim}} \begin{cases} \mathrm{x} \eqdot \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathrm{x} \eqdot \mathbf{g}(\mathrm{x}) \\ \mathbf{c} \eqdot \mathrm{y} \end{cases}$$

Ответ: $\mathsf{У}(\mathcal{E}'') = \emptyset$

Унификация произвольной системы

Теорема (об унификации). **Для любой системы уравнений $\mathcal{E}_0$**

- **алгоритм $\mathfrak{A}$ завершает работу на $\mathcal{E}_0$** **(завершаемость)**
- **по завершении алгоритмом $\mathfrak{A}$ выдаётся подстановка или сообщение СТОП** **(успешность)**
- **если выдана подстановка θ, то $\theta \in$ НОУ$(\mathcal{E}_0)$** **(корректность)**
- **если выдано сообщение СТОП, то система $\mathcal{E}$ неунифицируема** **(полнота)**

Следствие. **Для любых атомов A и B логики предикатов верно:**

$$\text{У}(A, B) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \text{НОУ}(A, B) \neq \emptyset$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\mapsto \infty$)

Далее будет строго сформулированы и обоснованы следующие факты:

- на каждом шаге работы алгоритма система становится проще
- после конечного числа шагов работы алгоритма обязательно получается система, которую нельзя упростить

Предложим характеристику системы, которая
убывает на каждом шаге и при этом
не может убывать бесконечно долго

Завершаемость алгоритма
очевидным образом следует из существования такой характеристики:

если система упрощается на каждом шаге
и не может упрощаться бесконечно,
то число шагов конечно

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость $(\mathcal{E}_0 \not\leadsto \infty)$

Переменную $\mathtt{x}$ назовём приведённой в системе $\mathcal{E}$, если $\mathcal{E}$

- содержит уравнение вида $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \notin \mathrm{Var}_t$, и
- не содержит $\mathtt{x}$ в других уравнениях

Характеристикой системы $\mathcal{E}$ объявим упорядоченную тройку чисел $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$, где

- $vr(\mathcal{E})$ — число неприведённых переменных системы $\mathcal{E}$
- $fs(\mathcal{E})$ — суммарное число функциональных символов и констант в левых частях уравнений $\mathcal{E}$
- $eq(\mathcal{E})$ — число уравнений системы $\mathcal{E}$

Лексикографический порядок на тройках целых чисел определяется так:

$$\langle n_1, n_2, n_3\rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3\rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1,\ n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1,\ n_2 = m_2,\ n_3 > m_3 \end{array}\right.$$

Пример: $\langle 2, 11, 2\rangle \succ \langle 2, 10, 5578\rangle \succ \langle 2, 10, 5577\rangle \succ \langle 1, 1001, 78\rangle$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\mapsto \infty$)

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$ $vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях $eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ t \eqdot t \\ \ldots \end{array} \right. \quad \stackrel{\text{Triv}}{\longmapsto} \quad \mathcal{E}_1' = \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ \\ \ldots \end{array} \right.$$

$$vr(\mathcal{E}_1) \geq vr(\mathcal{E}_1') \qquad fs(\mathcal{E}_1) \geq fs(\mathcal{E}_1') \qquad eq(\mathcal{E}_1) > eq(\mathcal{E}_1')$$

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ t \eqdot \mathrm{x} \\ \ldots \end{array} \right. \quad \stackrel{\text{Swap}}{\longmapsto} \quad \mathcal{E}_2' = \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ \mathrm{x} \eqdot t \\ \ldots \end{array} \right.$$

$$vr(\mathcal{E}_2) \geq vr(\mathcal{E}_2') \qquad fs(\mathcal{E}_2) > fs(\mathcal{E}_2')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость $(\mathcal{E}_0 \not\mapsto \infty)$

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$ $vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях $eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) \doteqdot \mathbf{f}(s_1, \ldots, s_k) \\ \ldots \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Func}} \mathcal{E}'_3 = \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ t_1 \doteqdot s_1 \\ \ldots \\ t_k \doteqdot s_k \\ \ldots \end{array} \right.$$

$$vr(\mathcal{E}_3) \geq vr(\mathcal{E}'_3) \qquad fs(\mathcal{E}_3) > fs(\mathcal{E}'_3)$$

$$\mathcal{E}_4 = \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ \mathrm{x} \doteqdot t \\ \ldots \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Elim}} \mathcal{E}'_4 = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} \doteqdot t \\ \ldots\{\mathrm{x}/t\} \end{array} \right.$$

$$vr(\mathcal{E}_4) > vr(\mathcal{E}'_4)$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\mapsto \infty$)

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$ $vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях $eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может бесконечно долго убывать относительно $\succ$

Чтобы «прочувствовать» этот факт, представьте, что характеристика $\langle a, b, c\rangle$ отвечает мешку конфет: a вкусных, b обычных и c невкусных

Тогда убывание характеристики можно представить как одну из операций в пункте обмена конфет:

- отдать вкусную конфету
  и взамен получить сколько угодно обычных и невкусных
- отдать обычную конфету
  и взамен получить сколько угодно невкусных
- отдать невкусную конфету

Оказывается, что так меняться конфетами невыгодно,
и если слишком увлечься, то мешок непременно опустеет

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\mapsto \infty$)

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$ $vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях $eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может бесконечно долго убывать относительно $\succ$

Лемма. Не существует бесконечной последовательности троек неотрицательных целых чисел, убывающей относительно $\succ$

Доказательство опустим, так как это уже не совсем логика

Отсутствие бесконечных убывающих последовательностей элементов в частично упорядоченном множестве (ЧУМ) принято называть свойством обрыва убывающих цепей и фундированностью множества

Фундированные ЧУМ нередко используются так же, как здесь, для обоснования завершаемости алгоритмов

Доказательство теоремы об унификации

Успешность ($\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta$/СТОП)

Предположим, что алгоритм неуспешен

Это означает, что на очередном шаге получена неприведённая система $\mathcal{E}$, к которой невозможно применить ни одно из правил Triv, Swap, Func, Elim, NFunc, NElim

Невозможно применить правила Triv, Swap, Func, NFunc $\Rightarrow$
в левых частях $\mathcal{E}$ содержатся **только** переменные

Невозможно применить правила Elim, NElim $\Rightarrow$
все переменные в левых частях $\mathcal{E}$ являются приведёнными

Следовательно, $\mathcal{E}$ — система, в левых частях которой располагаются **только** приведённые переменные,
то есть $\mathcal{E}$ — приведённая система (*противоречие*)

Доказательство теоремы об унификации

Корректность $(\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E}_0))$

Системы уравнений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны, если $\text{У}(\mathcal{E}) = \text{У}(\mathcal{E}')$

Достаточно показать, что при применении правил упрощения
(Triv, Swap, Func, Elim)
обязательно получается система, равносильная исходной

Для правил Triv, Swap и Func это довольно просто,
так что подробно остановимся только на «трудном» правиле Elim

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \ldots \\ \mathrm{x} = t \\ \ldots \end{cases} \xmapsto{\text{Elim}} \mathcal{E}' = \begin{cases} \ldots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \ldots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны

Доказательство теоремы об унификации

Корректность ($\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E}_0)$)

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} \doteq t \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{Elim}} \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} \doteq t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

$$\text{У}(\mathcal{E}) \stackrel{?}{=} \text{У}(\mathcal{E}')$$

($\subseteq$): Пусть $\eta \in \text{У}(\mathcal{E})$

Тогда $\mathrm{x}\eta = t\eta$

Из доказательства леммы о связке: $\eta = \{\mathrm{x}/t\}\eta$, а значит,

$$\begin{cases} \dots\eta \\ \mathrm{x}\eta = t\eta \\ \dots\eta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\}\eta \\ \mathrm{x}\eta = t\eta \\ \dots\{\mathrm{x}/t\}\eta \end{cases}$$

Следовательно, η — унификатор системы $\mathcal{E}'$

($\supseteq$): Рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы об унификации

Полнота ($\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \text{СТОП} \Rightarrow \text{У}(\mathcal{E}_0) = \emptyset$)

Для определённости положим, что «СТОП» выдано для системы $\mathcal{E}$

Пусть для этого было применено правило NFunc

Тогда $\mathcal{E}$ содержит уравнение $\mathbf{f}(\dots) \eqdot \mathbf{g}(\dots)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$

Ни для какой подстановки θ не верно $\mathbf{f}(\dots)\theta = \mathbf{g}(\dots)\theta$

Иначе для этого было применено правило NElim

Тогда $\mathcal{E}$ содержит уравнение $\mathrm{x} \eqdot t$, где $\mathrm{x} \in \text{Var}_t$ и $\mathrm{x} \neq t$

По лемме о связке, ни для какой подстановки θ не верно $\mathrm{x}\theta = t\theta$

Следовательно, $\text{У}(\mathcal{E}) = \emptyset$

Система $\mathcal{E}$ была получена из $\mathcal{E}_0$ применением правил

Triv, Swap, Func, Elim

Согласно рассуждениям в обосновании корректности алгоритма, системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ равносильны

Значит, $\text{У}(\mathcal{E}_0) = \emptyset$ ▼

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 21

Монотонность и транзитивность отношения логического следования

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Монотонность следования в ЛП

Для любых множеств предложений Γ, Δ и любого предложения φ верно:

$$\Gamma \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верно $\Gamma \models \varphi$

Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верна цепочка следований:

$\mathcal{I} \models \Gamma \cup \Delta$

$\Rightarrow$ (по определению модели)

для любой формулы ψ из $\Gamma \cup \Delta$ верно $\mathcal{I} \models \psi$

$\Rightarrow$ (т.к. $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$)

для любой формулы ψ из Γ верно $\mathcal{I} \models \psi$

$\Rightarrow$ (по определению модели)

$\mathcal{I} \models \Gamma$

$\Rightarrow$ (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \varphi$)

$\mathcal{I} \models \varphi$

Значит, любая модель $\Gamma \cup \Delta$ является моделью φ, то есть $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$ ▼

Монотонность $\vee$ относительно следования в ЛП

Для любого множества предложений Γ
и любых формул $\varphi(\widetilde{x}^n)$, $\psi(\widetilde{x}^n)$ верно:

$$\Gamma \models \forall \widetilde{x}^n \, \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \forall \widetilde{x}^n \, (\varphi \vee \psi)$$

Доказательство

Пусть $\Gamma \models \forall \widetilde{x}^n \, \varphi$

Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верна цепочка следований:

$\mathcal{I} \models \Gamma$

$\Rightarrow$ (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \forall \widetilde{x}^n \, \varphi$)

$\mathcal{I} \models \forall \widetilde{x}^n \, \varphi$

$\Rightarrow$ (по семантике $\forall$)

для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$

$\Rightarrow$ (по семантике $\vee$)

для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d}^n]$

$\Rightarrow$ (по семантике $\forall$)

$\mathcal{I} \models \forall \widetilde{x}^n \, (\varphi \vee \psi)$

Значит, любая модель Γ является моделью $\forall \widetilde{x}^n \, (\varphi \vee \psi)$ ▼

Транзитивность следования в ЛП

Для любого множества предложений Γ и любых предложений $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$ верно:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \models \psi_1 \\ \ldots \\ \Gamma \models \psi_k \\ \psi_1, \ldots, \psi_k \models \varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верны все соотношения слева от «$\Rightarrow$»

Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верна цепочка следований:

$\mathcal{I} \models \Gamma$

$\Rightarrow$ (по определению логического следования)

$\mathcal{I} \models \psi_1$ и $\ldots$ и $\mathcal{I} \models \psi_k$

$\Rightarrow$ (по определению модели множества формул)

$\mathcal{I} \models \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$

$\Rightarrow$ (по определению логического следования)

$\mathcal{I} \models \varphi$ ▼

Математическая логика и логическое программирование

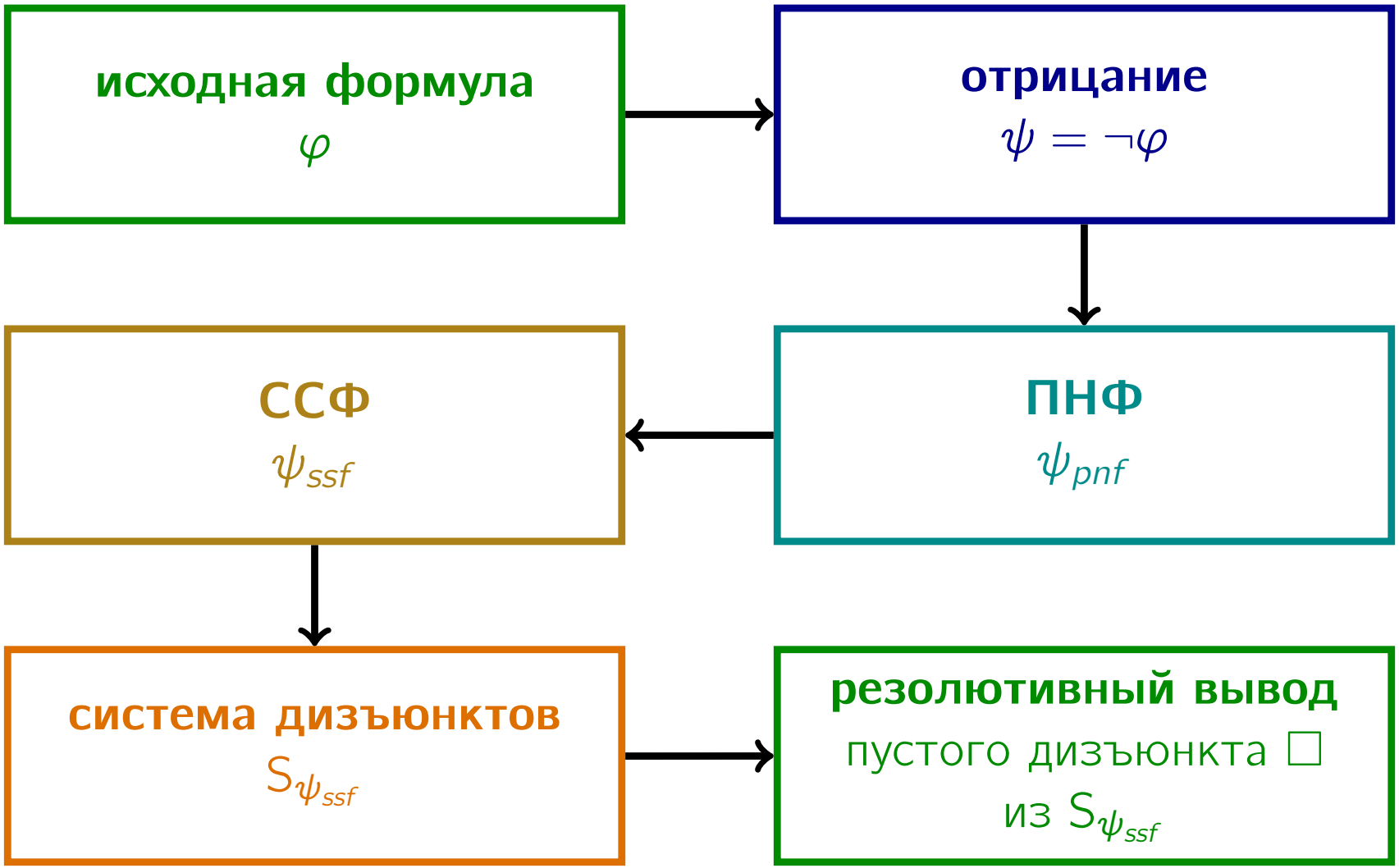
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 22

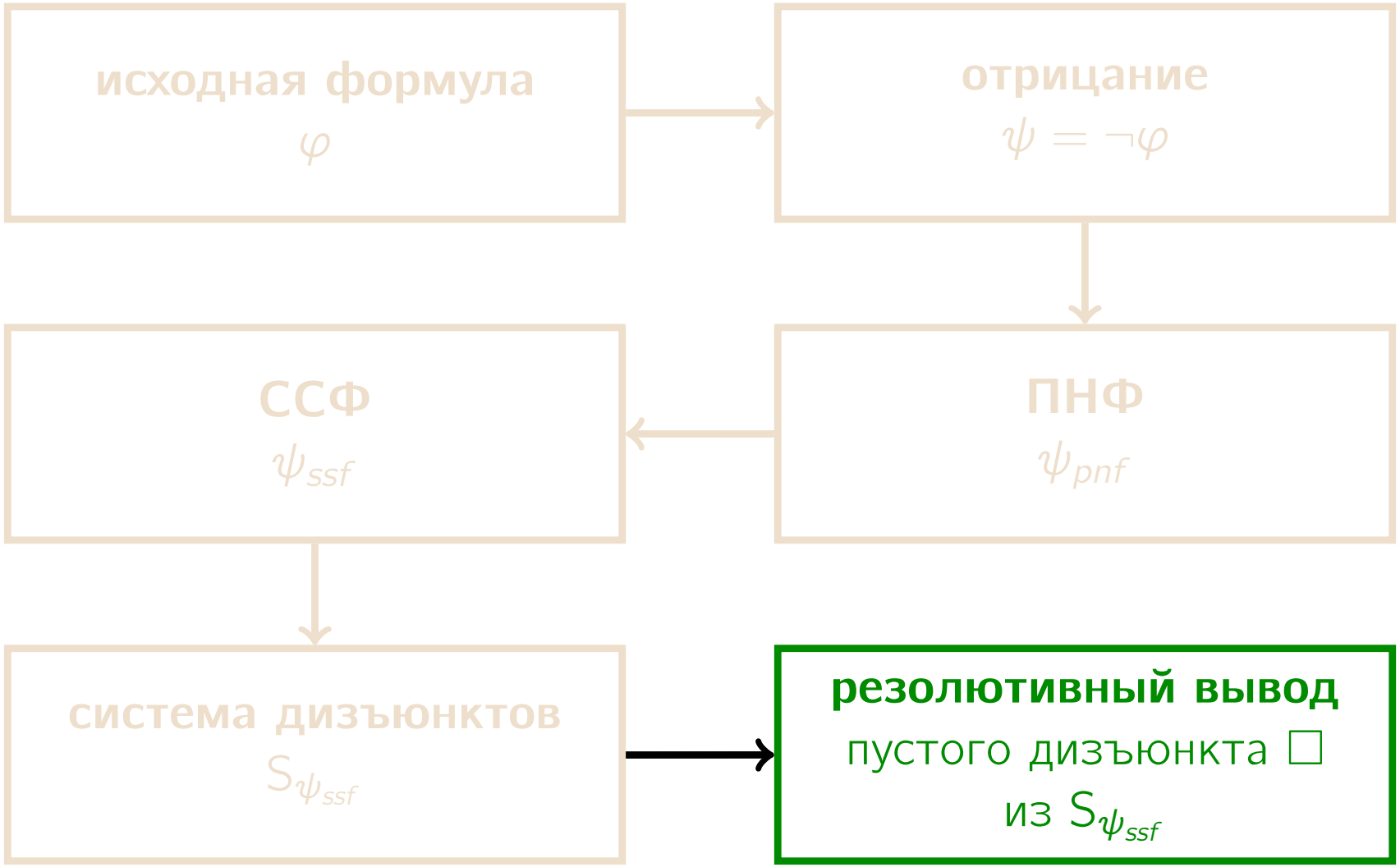
Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Если E — логическое выражение и θ — подстановка, то:

- $E\theta$ — пример выражения E
- если $\mathrm{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- если $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Var}$ — биекция, то
  - θ — переименование
  - $E\theta$ — вариант выражения E

Ещё немного определений

Пример

Рассмотрим выражение $E = \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathbf{c})$ и подстановки

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathrm{u}, \mathrm{y}/\mathrm{z}, \mathrm{u}/\mathrm{x}, \mathrm{z}/\mathrm{y}\}$$
$$\eta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathrm{y}/\mathrm{z}\}$$
$$\mu = \{\mathrm{z}/\mathbf{c}\}$$
$$\varepsilon = \{\}$$

Тогда:

- подстановки θ и ε — переименования, а η и μ — нет
- $E\eta = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{z}, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- $E\eta\mu = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- $E\theta = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{z}, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Правило резолюции

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

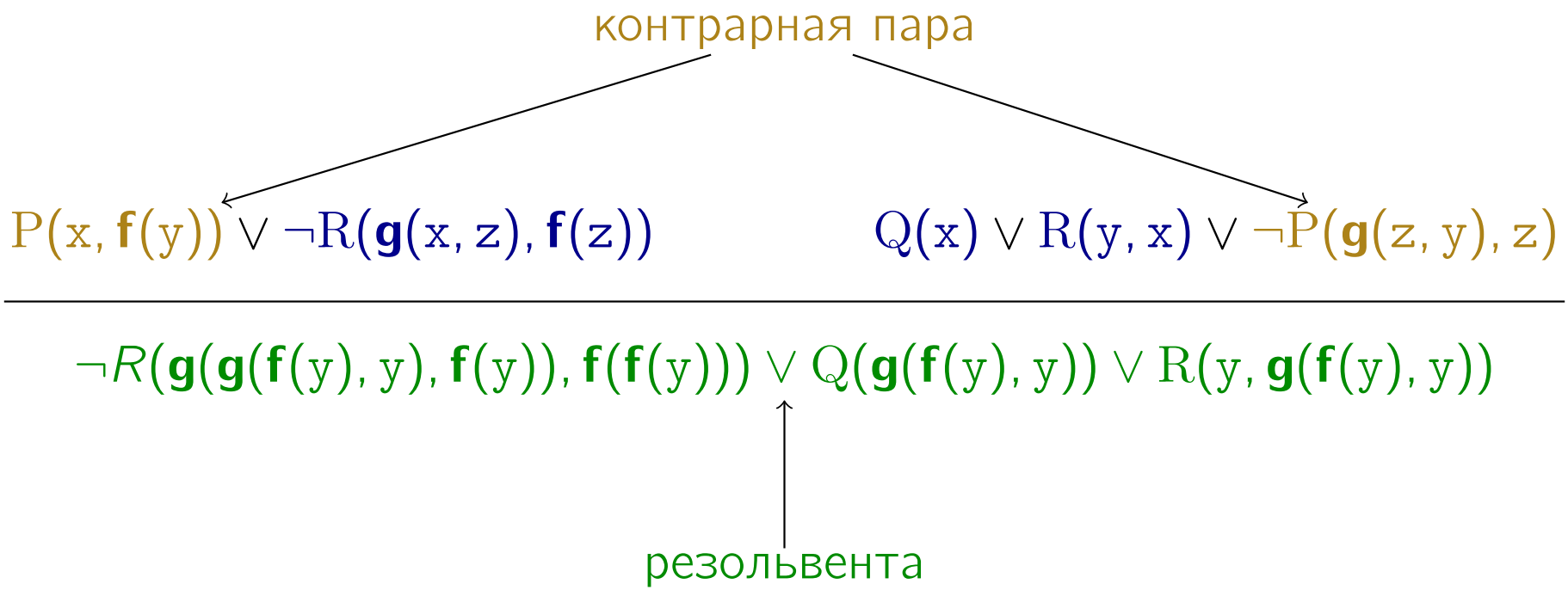
При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Правило резолюции

Пример

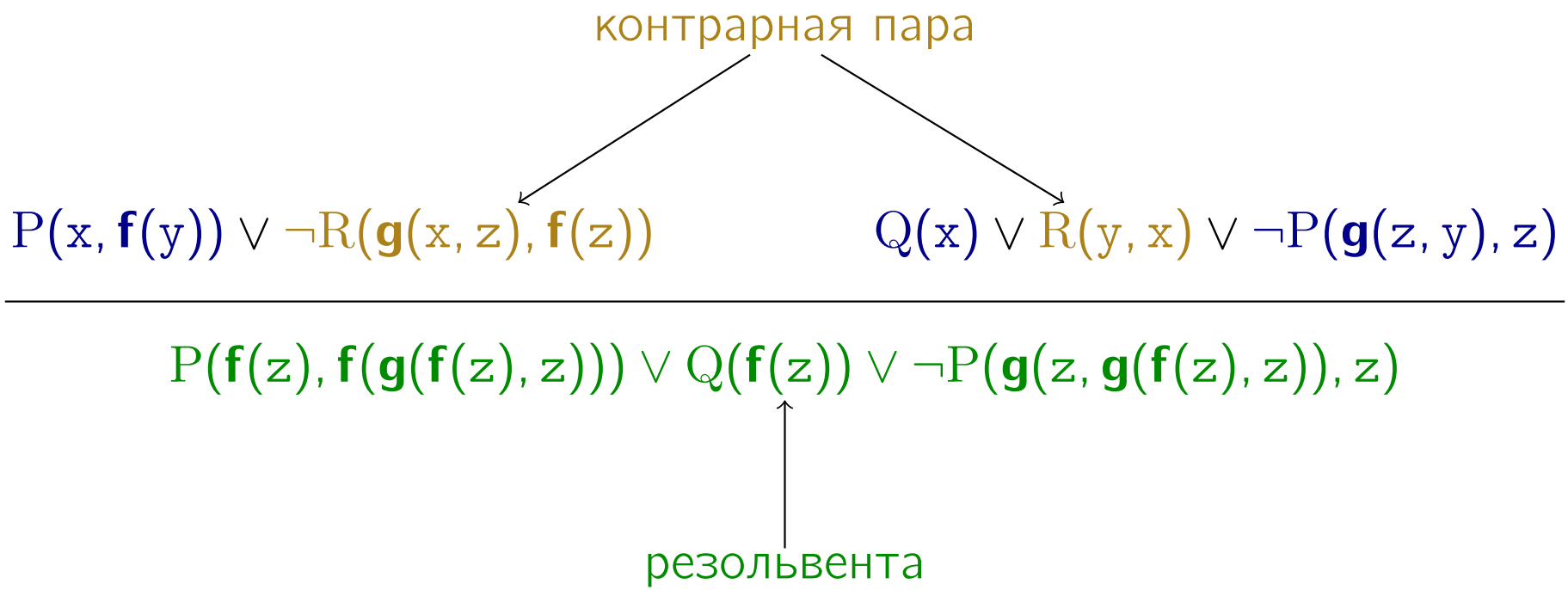


$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}),\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{y})\} \in \mathsf{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})), \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z}))$$

$$\text{резольвента: } (\neg \mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))\theta$$

Правило резолюции

Пример

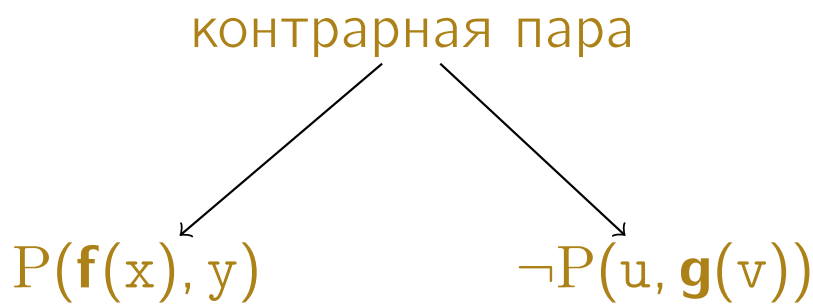


$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{z}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathrm{z})\} \in \mathsf{НОУ}(\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})), \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))$$

$$\text{резольвента: } (\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z}))\theta$$

Правило резолюции

Пример

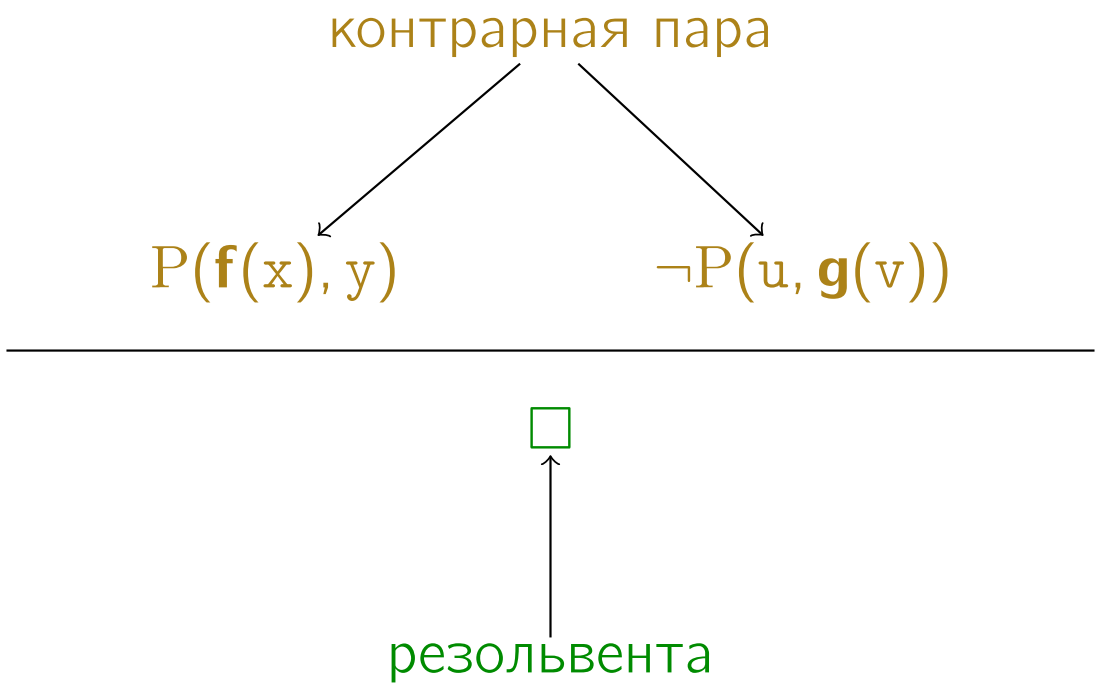


$$\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}), \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))$$

резольвента: $(???)\theta$

Правило резолюции

Пример



$$\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}), \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})))$$

резольвента: (пустое мультимножество литер)θ

Правило резолюции

Лемма (о корректности правила резолюции)
Если D **— резольвента дизъюнктов** D_1**,** D_2**, то** $D_1, D_2 \models D$

Доказательство (кванторные приставки опущены)

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$,
$D = (D_1' \vee D_2')\theta$ и $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда по свойствам отношения $\models$ и операции $\vee$ верно следующее:

$D_1 \models D_1\theta$	$D_2 \models D_2\theta$
$D_1 \models D_1'\theta \vee L_1\theta$	$D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta$
$D_1 \models D_1'\theta \vee L$	$D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L$
$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L$	$D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L$
$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L$	$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L$

Заметим, что если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$ (очевидно?)

Тогда $D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D$ ▼

Правило склейки

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести $\square$ из невыполнимой системы

Например:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathbf{c})$$
$$\neg\mathrm{P}(\mathbf{c}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathrm{y})$$

Система из таких двух дизъюнктов невыполнима, но все резольвенты, резольвенты резольвент и т.д.
этих дизъюнктов имеют ровно две литеры

Необходимо иметь правило,
которое позволит получать $\square$ и из таких систем

Правило склейки

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

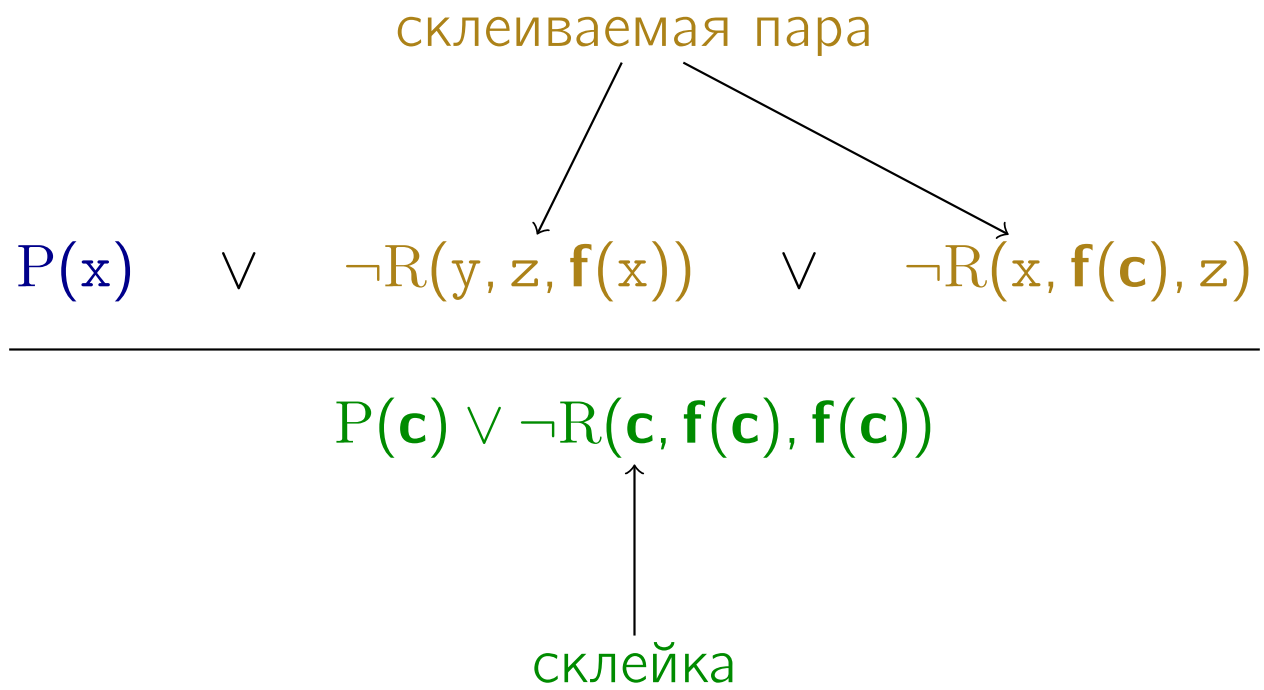
При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Правило склейки

Пример



$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{c}, \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathbf{c})\} \in \text{НОУ}(\neg\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathbf{f}(\mathrm{x})), \neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathbf{c}),\mathrm{z}))$$

склейка: $(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathbf{f}(\mathrm{x})))\theta$

Лемма (о корректности правила склейки)

Если D **— склейка дизъюнкта** D_1**, то** $\mathrm{D}_1 \models \mathrm{D}$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$\mathrm{D}_1,\ \ldots,\ \mathrm{D}_i,\ \ldots,\ \mathrm{D}_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводи́м из S, если существует
резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) \\ \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

вариант	$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1)$
вариант	$\neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathbf{g}(\mathrm{x}_2))$
резольвента	$\mathrm{R}(\mathrm{x}_3, \mathbf{g}(\mathrm{x}_3))$
вариант	$\neg\mathrm{R}(\mathrm{x}_4, \mathrm{u}_4)$
резольвента	$\square$

Следовательно, $\square$ резолютивно выводи́м из системы S

Резолютивный вывод

Другой пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{z}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}) \\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{y}) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

вариант	$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \mathbf{f}(\mathrm{y}_1)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}_1)$
вариант	$\neg \mathrm{R}(\mathrm{y}_2)$
резольвента	$\mathrm{P}(\mathrm{x}_3, \mathbf{f}(\mathrm{y}_3))$
вариант	$\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_4), \mathrm{z}_4) \vee \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}_4, \mathrm{y}_4)$
склейка	$\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_5), \mathbf{f}(\mathrm{x}_5))$
резольвента	$\square$

Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных вариантов дизъюнктов наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например: $S = \{\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))\}$

$\mathrm{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S невыполнима:

у формул $\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})$ и $\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))$ нет общих моделей

К вариантам дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{\mathrm{x}_1/\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)\} \in \mathrm{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}_1), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$$\forall \mathrm{x}\ \varphi \sim \forall \mathrm{y}\ (\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}), \text{ если } <\ldots>$$

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод успешен,
если он оканчивается пустым дизъюнктом ($\square$)

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением:

- предположим, что
  исходная система дизъюнктов выполнима
- тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода,
  также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов
  есть тождественно ложный ($\square$), а значит,
  расширенная система дизъюнктов невыполнима
- полученное противоречие
  опровергает выполнимость исходной системы
  (*доказывает невыполнимость методом «от противного»*)

Корректность резолютивного вывода

Теорема (о корректности резолютивного вывода)
Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводи́м $\square$, то система S невыполнима

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносилен D, а значит, $\mathrm{D} \models \mathrm{D}'$

По корректности правила резолюции:
если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2, то $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \models \mathrm{D}''$

По корректности правила склейки:
если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3, то $\mathrm{D}_3 \models \mathrm{D}'''$

Значит, по транзитивности логического следования,
любой дизъюнкт, выводимый из S,
является логическим следствием S, и в частности, $S \models \square$

При этом дизъюнкт $\square$ не имеет ни одной модели,
а значит, и система S не имеет ни одной модели ▼

Математическая логика и логическое программирование

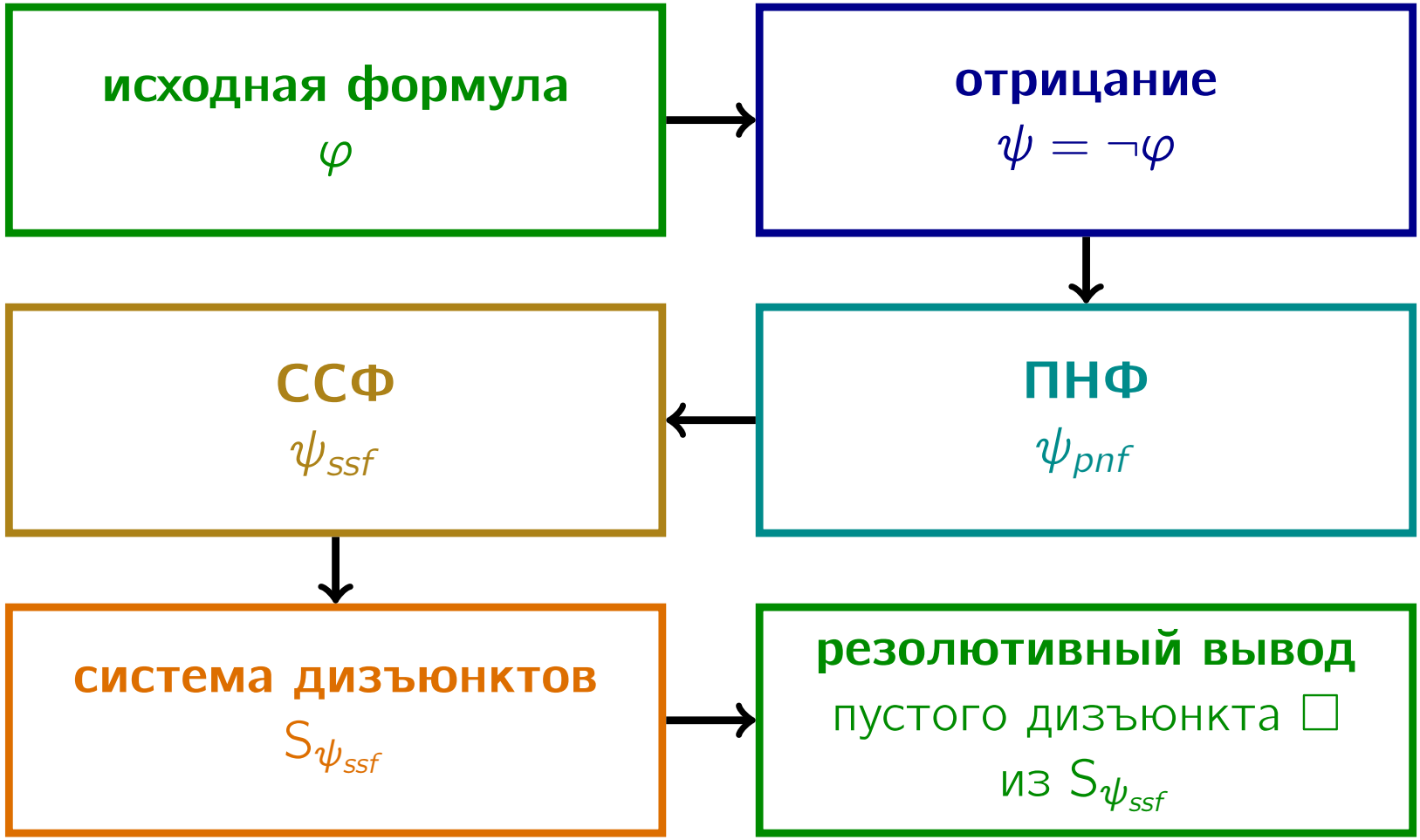
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 23

Обоснование общезначимости формулы методом резолюций (пример)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$$\Leftarrow \quad \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Примеры, которые использовались при обсуждении этапов метода резолюций, выбирались так, чтобы при их совмещении получился сквозной пример: обоснование общезначимости формулы

$$\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

методом резолюций

Запишем получившееся обоснование от начала и до конца

Этап 1: поставить отрицание

$$\models \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

$$\models \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Этап 2: построить равносильную ПНФ

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

$$\sim (\textit{переименование переменных})$$

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim (\textit{удаление импликаций})$$

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \vee \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim (\textit{продвижение отрицаний})$$

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\exists \mathrm{z}\,\neg\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))\,\&\,\forall \mathrm{u}\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim (\textit{вынесение кванторов})$$

$$\forall \mathrm{x}\,\exists \mathrm{z}\,\exists \mathrm{y}\,\forall \mathrm{u}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))\,\&\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim (\textit{получение КНФ})$$

$$\forall \mathrm{x}\,\exists \mathrm{z}\,\exists \mathrm{y}\,\forall \mathrm{u}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))\,\&\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z)\vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 3: построить ССФ, применив алгоритм сколемизации

$$\not\models \forall x\,\underline{\exists z}\,\underline{\exists y}\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\underline{z})\vee R(x,\underline{y}))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x))\vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 4: перейти к системе дизъюнктов

$$\not\models \forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x))\vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x),\ \neg P(\mathbf{f}(x))\vee R(x,\mathbf{g}(x)),\ \neg R(x,u)\}$$

$$\models \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{\mathrm{P}(\mathrm{x}),\quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x})),\quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u})\}$$

Этап 5: резолютивно вывести $\square$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1) \qquad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_2,\mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) \qquad \mathrm{R}(\mathrm{x}_3,\mathbf{g}(\mathrm{x}_3)) \qquad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}_4,\mathrm{u}_4) \longrightarrow \square$$

Оказалось, что $\square$ резолютивно выводи́м
из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по спектру доказанных ранее теорем),
исходная формула

$$\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

общезначима

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

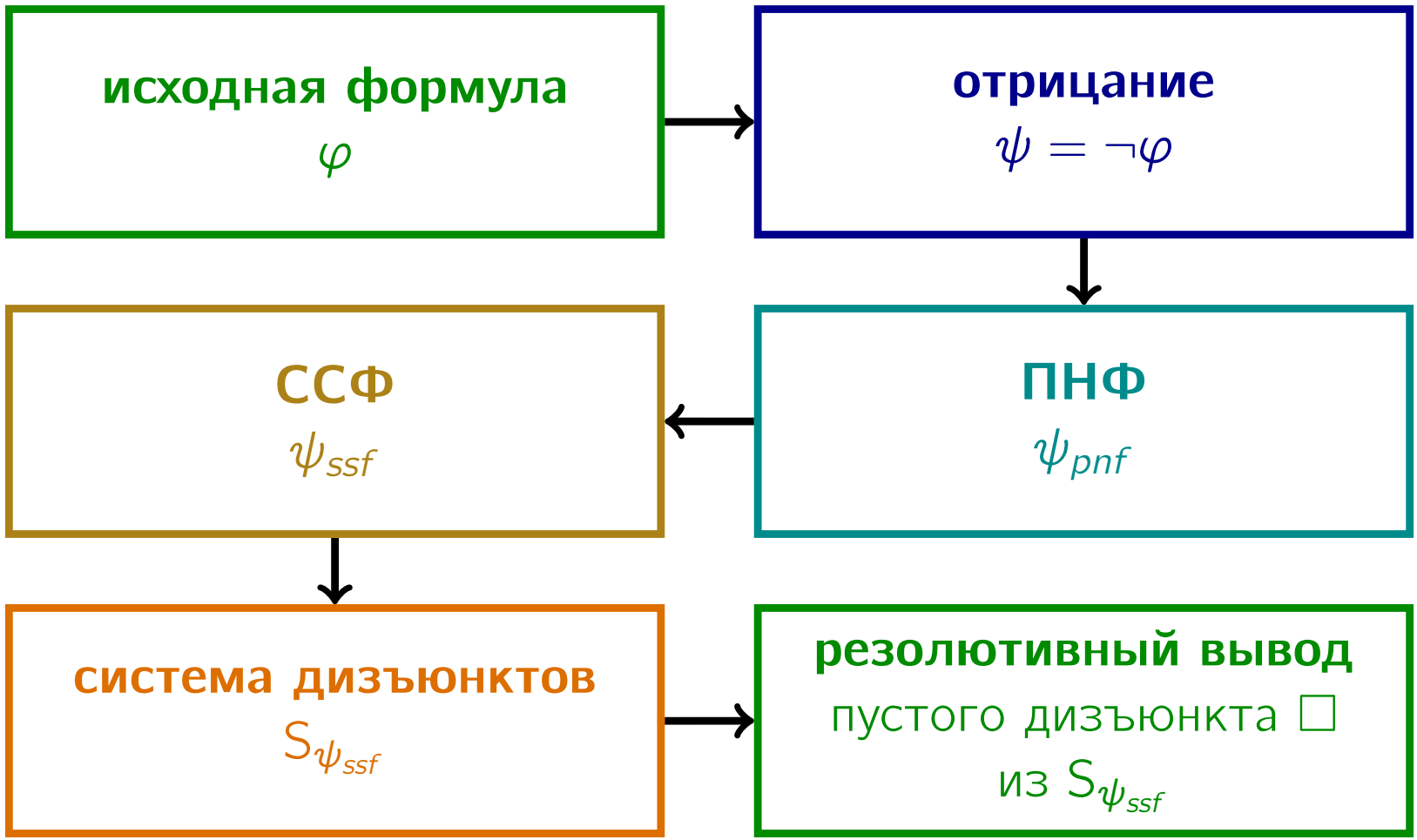
Блок 24

Эрбрановские интепретации
Теорема об эрбрановских интерпретациях

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Краткое вступление



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$$\Leftarrow \quad \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Последняя недостающая деталь метода — «$\Leftrightarrow$» на месте «$\Leftarrow$»

Краткое вступление

Временно забудем про метод резолюций
и попробуем выделить *общую часть* рассуждений «в лоб»
о невыполнимости системы дизъюнктов S в заданной интерпретации $\mathcal{I}$

Для примера рассмотрим такую систему: $S = \{\mathrm{P}(\mathbf{x}),\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$

Для обоснования невыполнимости S достаточно заметить,
что в любой модели $\mathcal{I}$ для S предмет, описываемый термом $\mathbf{f}(\mathbf{c})$,
и обладает свойством P ($\mathcal{I} \models \forall\mathbf{x}\,\mathrm{P}(\mathbf{x})$), и не обладает ($\mathcal{I} \models \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$)

В этом замечании не используются
природа предметной области $\mathcal{I}$ и устройство оценок $\bar{\mathbf{c}}$ и $\bar{\mathbf{f}}$,
и важно лишь то, каким термом задаётся «противоречивый» предмет

Если в интерпретации $\mathcal{I}$ заменить каждый предмет
множеством основных термов, описывающих этот предмет,
и сохранить устройство оценки P, то в результате получится

эрбрановская интерпретация

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановской интерпретацией (или, по-другому, — $\mathcal{H}$-интерпретацией) сигнатуры $\sigma = \langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$ называется интерпретация $\langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\text{Const}}_{\mathcal{H}}, \overline{\text{Func}}_{\mathcal{H}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$, где:

- $\mathcal{H}_\sigma$ — эрбрановский универсум ($\mathcal{H}$-универсум): множество это множество всех основных термов сигнатуры
  - σ, если $\text{Const} \neq \emptyset$
  - $\langle \{\mathbf{c}_{\mathcal{H}}\}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$, если $\text{Const} = \emptyset$ ($\mathbf{c}_{\mathcal{H}}$ — эрбрановская константа)
- $\overline{\text{Const}}_{\mathcal{H}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ для любой константы $\mathbf{c}$ из Const
- $\overline{\text{Func}}_{\mathcal{H}}(\mathbf{f})(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$ для любых $\mathbf{f}^{(n)} \in \text{Func}$ и $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$
- $\overline{\text{Pred}}$ — произвольная оценка предикатных символов

Первые три пункта означают, что $\mathcal{H}$-интерпретация — это интерпретация, построенная над свободной алгеброй термов

Все $\mathcal{H}$-интерпретации заданной сигнатуры отличаются друг от друга только выбором оценки $\overline{\text{Pred}}$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский базис ($B_{\mathcal{H}}$) — это множество всех атомов, построенных над термами $\mathcal{H}$-универсума

$\mathcal{H}$-интерпретация $\mathcal{I}$ всегда и однозначно определяется тем, какие атомы из $B_{\mathcal{H}}$ в ней истинны и какие нет, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}},\ \mathcal{I} \models A\}$$

Например,

- $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$: все основные атомы **ложны** в $\mathcal{I}$
- $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$: все основные атомы **истинны** в $\mathcal{I}$
- $B^{\mathcal{I}} = B^{\mathcal{J}'} \cap B^{\mathcal{J}''}$: в $\mathcal{I}$ истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях $\mathcal{J}'$, $\mathcal{J}''$

Для удобного использования теоретико-множественной нотации иногда будем отождествлять $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{I}$ с множеством $B^{\mathcal{I}}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель

Доказательство.

Рассмотрим произвольную систему дизъюнктов S и докажем теорему для этой системы

($\Leftarrow$) Очевидно:
если S выполняется в некоторой эрбрановской интерпретации, то S выполняется хотя бы в одной интерпретации

($\Rightarrow$)

Пусть система S выполнима

Тогда для неё существует модель $\mathcal{I} = \langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$

Построим по интерпретации $\mathcal{I}$
эрбрановскую модель $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ для S
той же сигнатуры σ

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ($\Rightarrow$) $\mathcal{I} = \langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Если $\mathsf{Const} = \emptyset$, то добавим и произвольно оценим константу $\mathbf{c}_{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{I}$

Поставим такое соответствие $\alpha : \mathcal{H}_\sigma \to D$:

$\alpha(t)$ — значение терма t в $\mathcal{I}$

Зададим оценку $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ каждого предикатного символа P в $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\overline{\overline{\mathrm{P}}}(t_1, \ldots, t_k) = \overline{\mathrm{P}}(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k))$$

То же самое другими словами — зададим интерпретацию $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k) \mid \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{B}_{\mathcal{H}},\ \overline{\mathrm{P}}(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k)) = \mathbb{t}\}$$

Покажем, что такая интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ является моделью для S

Но для начала приведём пример, чтобы стало *понятнее*,
как соотносятся $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ($\Rightarrow$) $\mathcal{I} = \langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Пример: рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I}$ сигнатуры $\langle \{0\}, \{\mathbf{s}^{(1)}\}, \{<^{(2)}\} \rangle$ с *естественным* арифметическим устройством:

- предметная область — множество всех целых чисел
- $\overline{0}$ — число 0; $\quad \overline{\mathbf{s}}(n) = n + 1$;
  $\overline{<}$ — отношение строгого неравенства чисел

Тогда:

- $\mathcal{H}_\sigma = \{0, \quad \mathbf{s}(0), \quad \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), \quad \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), \quad \dots\}$
- $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} =$
$$\begin{Bmatrix} 0 < \mathbf{s}(0), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \dots \\ 0 < \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)))), & \dots \\ 0 < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)))), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ($\Rightarrow$) $\mathcal{I} = \langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Предположим от противного, что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$

Тогда в S содержится дизъюнкт D, такой что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models D$

Пусть, для ясности, $D = \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}} \, (A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_m)$,
где $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_m$ — атомы

Тогда существуют термы $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$, такие что

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \ldots, t_n] \quad \ldots \quad \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_k[t_1, \ldots, t_n]$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \ldots, t_n] \quad \ldots \quad \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_m[t_1, \ldots, t_n]$$

По заданию интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$, верно и

$$\mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)] \quad \ldots \quad \mathcal{I} \not\models A_k[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)]$$
$$\mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)] \quad \ldots \quad \mathcal{I} \models B_m[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)]$$

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}} \, (A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_m)$,
что *противоречит* выбору $\mathcal{I}$ как **модели** для S

Значит, предположение «$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$» неверно, то есть $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models S$ ▼

Математическая логика и логическое программирование

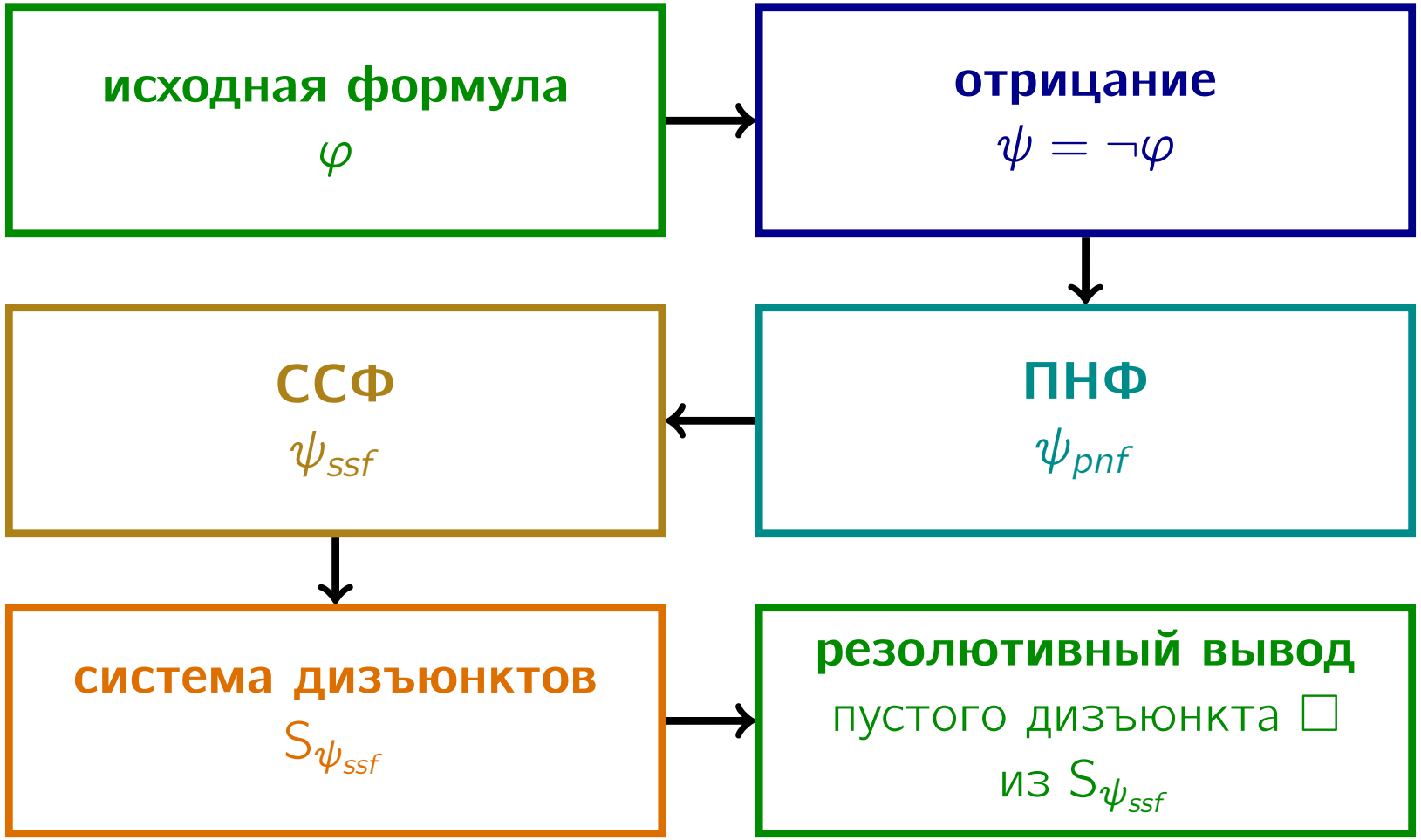
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 25

Теорема Эрбрана
Полнота резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$

$\Leftarrow$ существует вывод $\square$ из $S_{\psi_{ssf}}$

Покажем, что резолютивный вывод **полон**:
справедливо не только «$\Leftarrow$», но и «$\Rightarrow$»

Общая схема обоснования полноты

Рассмотрим невыполнимую систему дизъюнктов S

Резолютивная выводимость $\square$ из S будет обоснована так:

1. Существует конечное невыполнимое множество $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов из S (*теорема Эрбрана*)

2. Существует резолютивный вывод $\square$ из $\mathcal{G}$ (*лемма об основных дизъюнктах*)

3. Каждый шаг вывода $\square$ из $\mathcal{G}$ можно преобразовать в «аналогичный» шаг вывода из S (две *леммы о подъёме*)

4. Следовательно, весь вывод $\square$ из $\mathcal{G}$ можно преобразовать в вывод $\square$ из S (*теорема о полноте резолютивного вывода*)

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов невыполнима

$\Leftrightarrow$

существует конечное невыполнимое множество основных примеров дизъюнктов этой системы

Теорема Эрбрана (доказательство)

Система дизъюнктов S (*сигнатуры* σ) невыполнима

$\Leftrightarrow$ (теорема об эрбрановских интерпретациях)

S не выполняется ни в одной $\mathcal{H}$-интерпретации

$\Leftrightarrow$ (определение выполнимости и семантика квантора $\forall$)

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существуют дизъюнкт $\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \mathrm{D} \in S$ и предметы $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$, такие что $\mathcal{I} \not\models \mathrm{D}[t_1, \ldots, t_n]$

$\Leftrightarrow$ (устройство $\mathcal{H}$-интерпретаций)

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существует основной пример D' дизъюнкта $\mathrm{D} \in S$, такой что $\mathcal{I} \not\models \mathrm{D}'$

$\Leftrightarrow$ (то же другими словами)

Множество $\mathcal{G}_S$ всех основных примеров дизъюнктов из S не выполняется ни в одной $\mathcal{H}$-интерпретации

$\Leftrightarrow$ (теорема об эрбрановских интерпретациях)

Система $\mathcal{G}_S$ невыполнима

Теорема Эрбрана (доказательство)

Вспомним следствие из теоремы компактности Мальцева:

$\not\models \Gamma \quad \Leftrightarrow$
существует конечное невыполнимое подмножество Γ' множества Γ

Приме́ним это следствие к множеству $\mathcal{G}_S$:

$\not\models S \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \not\models \mathcal{G}_S$
$\Leftrightarrow$
существует **конечное** невыполнимое подмножество $\mathcal{G}$ множества $\mathcal{G}_S$ ▼

Лемма об основных дизъюнктах

Из любой конечной невыполнимой системы основных дизъюнктов резолютивно выводи́м пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную конечную невыполнимую систему основных дизъюнктов S

Докажем лемму индукцией по числу $\|S\|$ различных атомов, содержащихся в дизъюнктах из S

База: $\|S\| = 0$

$$\left.\begin{array}{rr} \not\models S & \Rightarrow \quad S \neq \emptyset \\ & \|S\| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{\square\} \Rightarrow \square \text{ резолютивно выводи́м из } S$$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход: $\not\models S$, $\|S\| = N > 0$; $\quad S \overset{?}{\rightsquigarrow} \square$

Индуктивное предположение: $\not\models \widetilde{S}$ и $\|\widetilde{S}\| < N \quad \Rightarrow \quad \widetilde{S} \rightsquigarrow \square$

Перейдём от S к системе дизъюнктов S',
удалив все дизъюнкты вида $D \vee A \vee \neg A$

$\not\models S$, и все удаляемые дизъюнкты общезначимы,
а значит, $\not\models S'$, и достаточно предложить вывод $\square$ из S'

Перейдём от S' к системе S'' так: пока это возможно,
будем заменять дизъюнкты вида $D \vee L \vee L$ на их склейки $D \vee L$

$\not\models S'$, и дизъюнкты заменяются на равносильные выводимые
а значит, $\not\models S''$, и достаточно предложить вывод $\square$ из S''

Если $\|S''\| < N$, то обоснование завершено

Предположим теперь, что $\|S''\| = N$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход: $\not\models S''$, $\|S''\| = N > 0$,

и в S'' нет дизъюнктов вида $D \vee L \vee \neg L$ и $D \vee L \vee L$; $\quad S'' \overset{?}{\rightsquigarrow} \square$

Индуктивное предположение: $\not\models \widetilde{S}$, $\|\widetilde{S}\| < N \quad \Rightarrow \quad \widetilde{S} \rightsquigarrow \square$

Произвольно выберем атом A,
содержащийся хотя бы в одном дизъюнкте из S''

Разобьём S'' на три множества:

- S_+ — все дизъюнкты из S'', содержащие A без отрицания
- S_- — все дизъюнкты из S'', содержащие $\neg A$
- $S_\times$ — все остальные дизюнкты из S''

Построим все резольвенты по контрарной паре A, $\neg A$:

$$S_r = \{D_1 \vee D_2 \mid D_1 \vee A \in S_+,\ D_2 \vee \neg A \in S_-\}$$

Достаточно показать, что $\square$ выводи́м из системы $S''' = S_r \cup S_\times$

$\|S'''\| = \|S''\| - 1 = N - 1 < N$, а значит, по предположению индукции, достаточно обосновать соотношение $\not\models S'''$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$\not\models S''$: S_+ $\boxed{\ldots\ D_+ \vee A\ \ldots}$ S_- $\boxed{\ldots\ D_- \vee \neg A\ \ldots}$ $S_\times$ $\boxed{\text{дизъ. без } A}$

$\not\models ?\ S'''$: S_r $\boxed{\ldots\ D_+ \vee D_-\ \ldots}$ $S_\times$ $\boxed{\text{дизъ. без } A}$

Рассмотрим произвольную $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{I}$

По теореме об эрбрановских интерпретациях,
достаточно обосновать соотношение $\mathcal{I} \not\models S'''$

Так как система S'' невыполнима, верно $\mathcal{I} \not\models S''$

Случай 1: $\mathcal{I} \not\models S_\times$. Так как $S_\times \subseteq S'''$, верно и $\mathcal{I} \not\models S'''$

Случай 2: $\mathcal{I} \models S_\times$, $A \in \mathcal{I}$

$A \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} \models S_+$

$\mathcal{I} \models S_+ \cup S_\times$ и $\mathcal{I} \not\models S_+ \cup S_\times \cup S_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_-$
$\Rightarrow$ в S_- содержится дизъюнкт $D_- \vee \neg A$, такой что $\mathcal{I} \not\models D_- \vee \neg A$
$\Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_-$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$\not\models S''$: S_+ $\boxed{\ldots\ D_+ \vee A\ \ldots}$ S_- $\boxed{\ldots\ D_- \vee \neg A\ \ldots}$ $S_\times$ $\boxed{\text{дизъ. без } A}$

$\mathcal{I} \not\models ?\ S'''$: S_r $\boxed{\ldots\ D_+ \vee D_-\ \ldots}$ $S_\times$ $\boxed{\text{дизъ. без } A}$

Случай 2: $\mathcal{I} \models S_\times$, $A \in \mathcal{I}$; получено: $\mathcal{I} \not\models D_-$, $D_- \vee \neg A \in S_-$

Рассмотрим $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{J} = \mathcal{I} \setminus \{A\}$

$\mathcal{I} \models S_\times$ и в дизъюнктах из $S_\times$ не содержится $A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_\times$

$\not\models S'' \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S''$

$A \notin \mathcal{J}$ и дизъюнкты из S_- имеют вид $D \vee \neg A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_-$

$\mathcal{J} \models S_- \cup S_\times$ и $\mathcal{J} \not\models S_- \cup S_\times \cup S_+ \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S_+ \Rightarrow$
в S_+ содержится дизъюнкт $D_+ \vee A$, такой что $\mathcal{J} \not\models D_+ \vee A \Rightarrow \mathcal{J} \not\models D_+$

$\mathcal{J} \not\models D_+$ и в D_+ не содержится атом $A \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+$

$\mathcal{I} \not\models D_+$ и $\mathcal{I} \not\models D_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_-$

$\mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_-$ и $D_+ \vee D_- \in S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S'''$

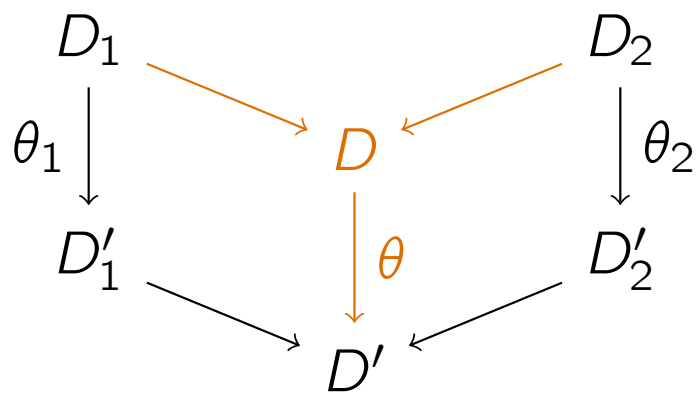
Случай 3: $\mathcal{I} \models S_\times$, $A \notin \mathcal{I}$ — аналогичен случаю 2 ▼

Лемма о подъёме для правила резолюции

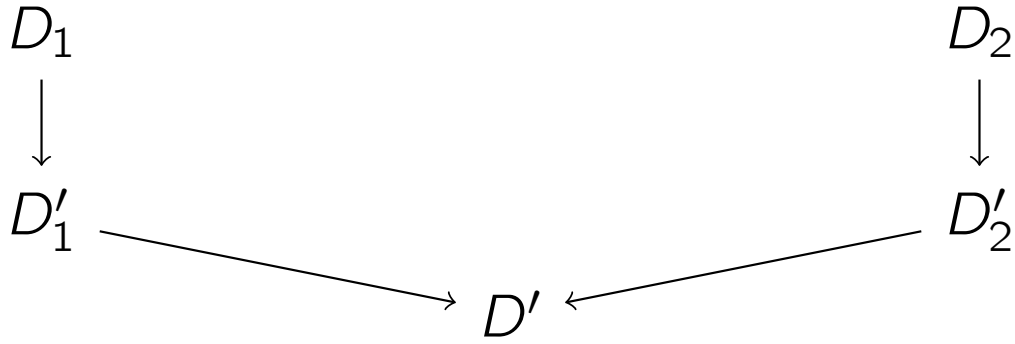
Пусть:

- D_1, D_2 — **дизъюнкты, и** $\mathrm{Var}_{D_1} \cap \mathrm{Var}_{D_2} = \emptyset$**;**
- D'_1, D'_2 — **основные примеры дизъюнктов** D_1, D_2 **соответственно;**
- D' — **резольвента дизъюнктов** D'_1, D'_2**.**

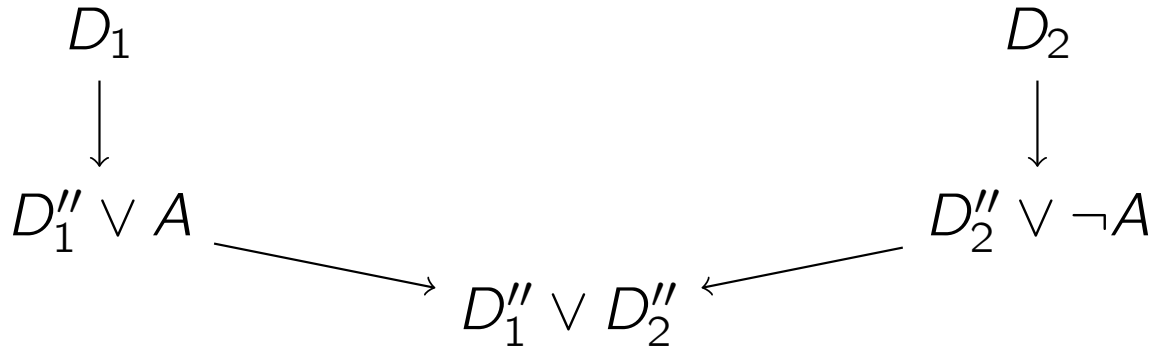
Тогда существует резольвента D **дизъюнктов** D_1, D_2, **примером которой является** D'**.**



Лемма о подъёме ... (доказательство)

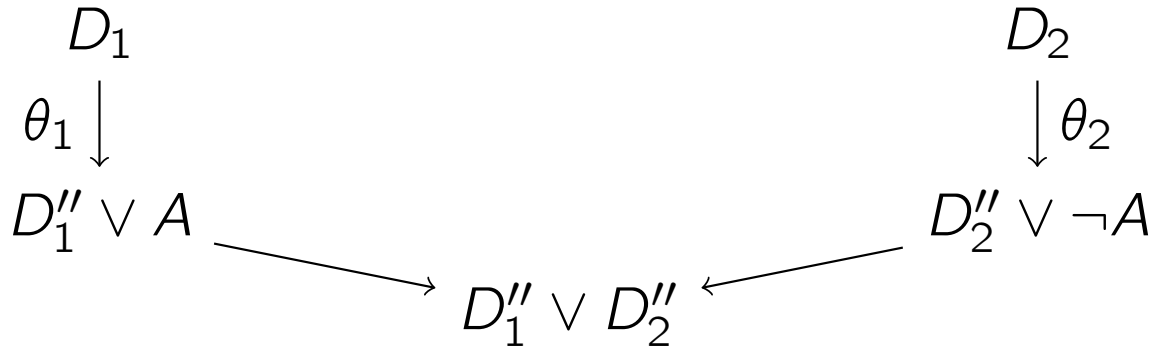


Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

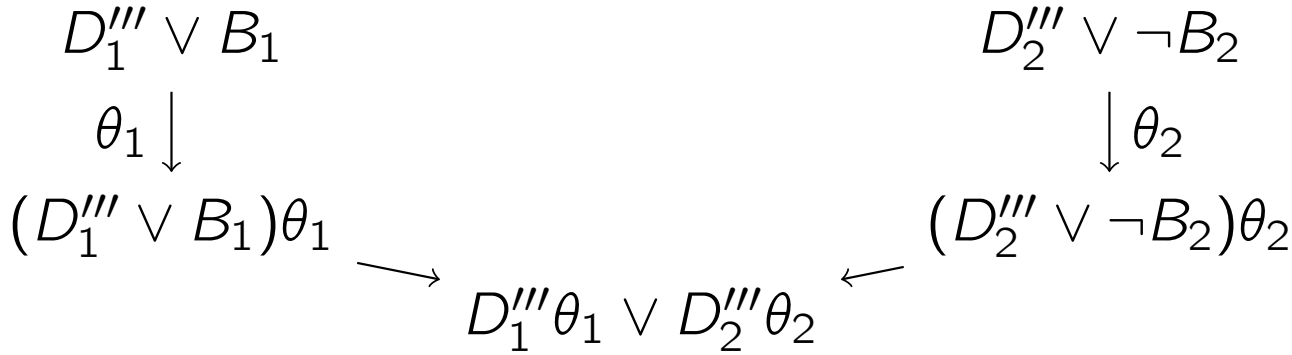
Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

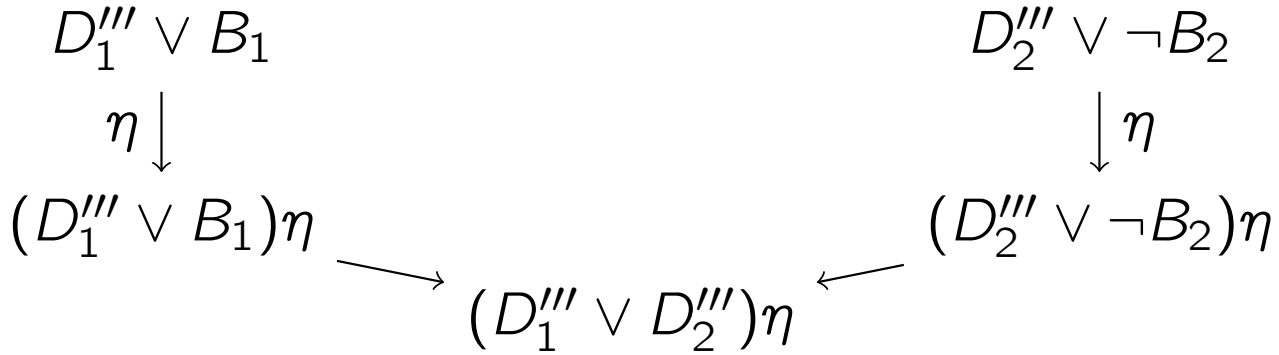


Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

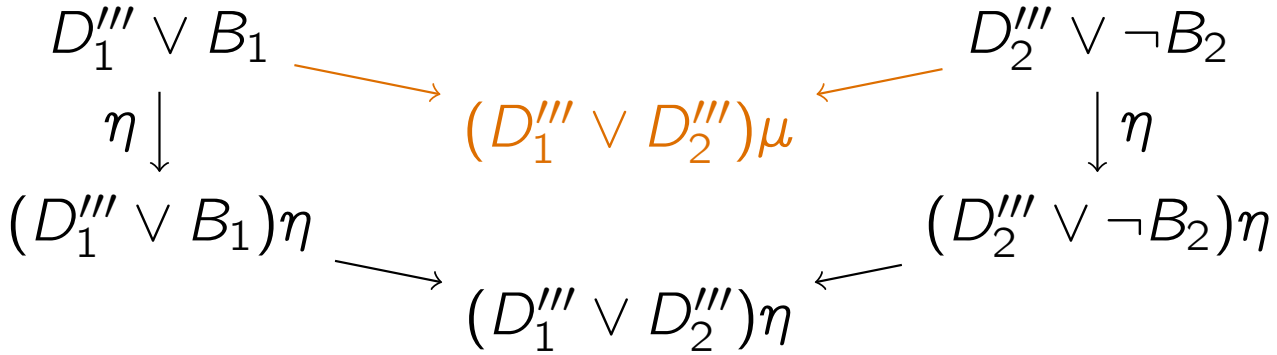
Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

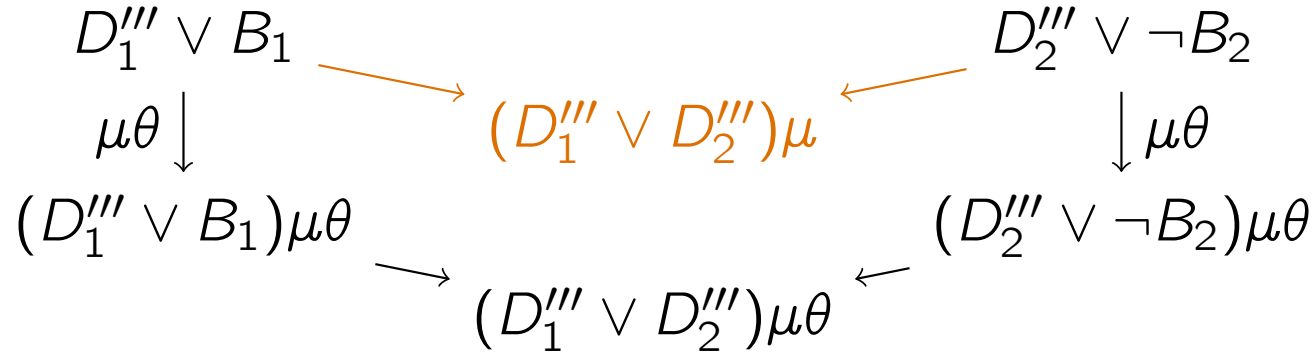
Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По теореме об унификации,
существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1, B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2

Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

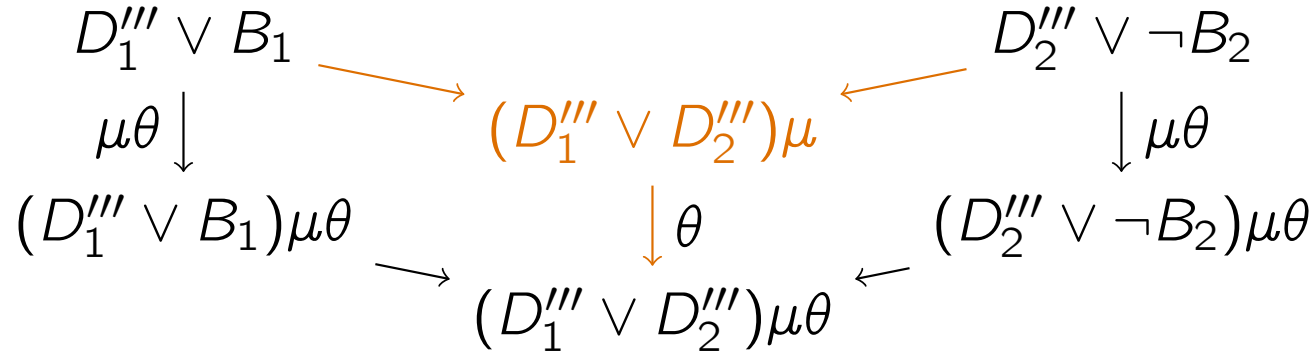
Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По теореме об унификации,
существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1, B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2

По определению наиболее общего унификатора,
существует подстановка θ, такая что $\eta = \mu\theta$

Лемма о подъёме ... (доказательство)



Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По теореме об унификации,
существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1, B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2

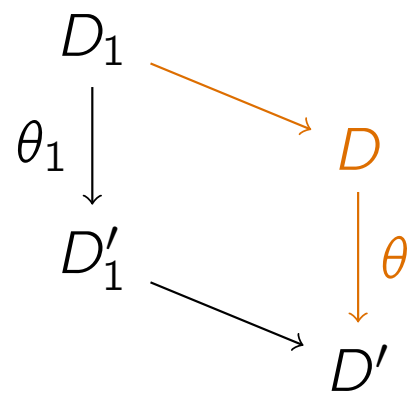
По определению наиболее общего унификатора,
существует подстановка θ, такая что $\eta = \mu\theta$, и $D' = D\theta$ ▼

Лемма о подъёме для правила склейки

Пусть:

- D_1, D'_1 — **дизъюнкт и его основной пример;**
- D' — **склейка дизъюнкта D'_1.**

Тогда существует склейка D дизъюнкта D_1, примером которой является D'.



Доказательство. Аналогично предыдущей лемме

Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов резолютивно выводи́м пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую систему дизъюнктов S

По теореме Эрбрана, существует конечное невыполнимое множество $\mathcal{G}$, содержащее только основные примеры дизъюнктов из S

По лемме об основных дизъюнктах,
существует вывод $D'_1, \ldots, D'_n, \square$ из $\mathcal{G}$

Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов резолютивно выводи́м пустой дизъюнкт

Доказательство. ($D'_1, \ldots, D'_n, \square$ — вывод из $\mathcal{G}$)

Рассмотрим такую последовательность дизъюнктов $\mathfrak{S} = (D_1, \ldots, D_n, \square)$:

- если D'_i — **пример** дизъюнкта D из S, то D_i — вариант D
- если D'_i — **резольвента** D'_j и D'_k ($j < i$, $k < i$), то D_i — резольвента D_j и D_k, примером которой является D'_j
- если D'_i — **склейка** D'_j ($j < i$), то D_i — склейка D_j, примером которой является D'_j
- подстановки (переименования и унификаторы) выберем так, чтобы множества Var_{D_i} попарно не пересекались

Корректность задания $\mathfrak{S}$ обеспечивается леммами о подъёме

По определению резолютивного вывода, $\mathfrak{S}$ — вывод $\square$ из S ▼

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 26

Иллюстрация полноты резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Ранее с использованием метода резолюций
была доказана общезначимость формулы

$$\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Это обоснование основывалось на резолютивном выводе $\square$
из системы дизъюнктов

$$S = \{\mathrm{P}(\mathrm{x}),\quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x})),\quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u})\},$$

соответствующей этой формуле

Проиллюстрируем схему обоснования полноты метода резолюций
на этой системе

Известно, что эта система S невыполнима

По теореме Эрбрана, существует конечное невыполнимое множество
основных примеров дизъюнктов этой системы

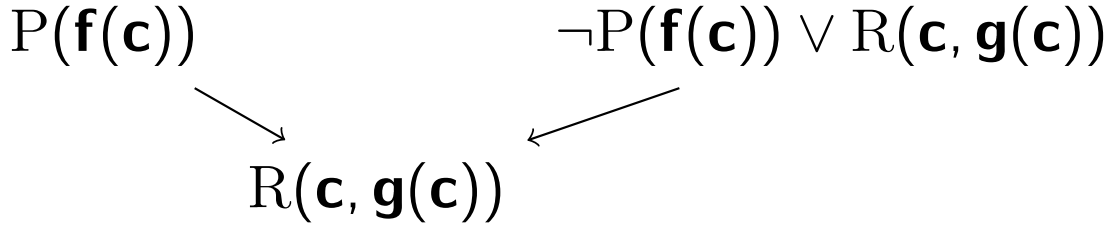
Например, невыполнимо такое множество примеров:

$$\mathcal{G} = \{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})),\quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{R}(\mathbf{c},\mathbf{g}(\mathbf{c})),\quad \neg\mathrm{R}(\mathbf{c},\mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

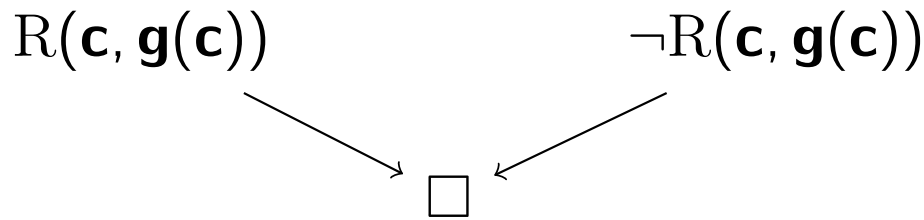
$$S = \{\mathrm{P}(\mathtt{x}), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x})) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathbf{g}(\mathtt{x})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u})\},$$
$$\mathcal{G} = \{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

Действуя согласно лемме об основных дизъюнктах, построим вывод $\square$ из $\mathcal{G}$:

- Постро́им все резольвенты относительно $\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$:

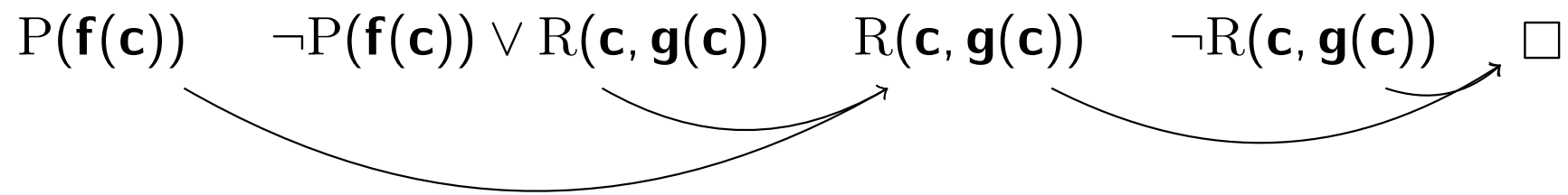


- Для построенных резольвент и дизъюнктов, не содержащих $\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$, постро́им все резольвенты относительно $\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))$:

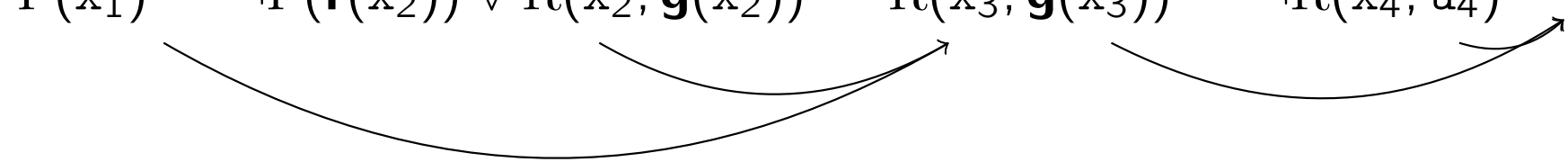


$$S = \{\mathrm{P}(\mathrm{x}), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u})\},$$
$$\mathcal{G} = \{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

Получен такой резолютивный вывод $\square$ из $\mathcal{G}$:



Используя лемму о подъёме, «поднимем» этот вывод до вывода из S:



$$S = \{\mathrm{P}(\mathrm{x}), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u})\},$$
$$\mathcal{G} = \{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})), \quad \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c}))\}$$

В этой схеме обоснования полноты «*неконструктивен*»
только первый этап: не говорится, как можно эффективно построить
конечное невыполнимое множество $\mathcal{G}$
основных примеров дизъюнктов невыполнимой системы S

Можно представить себе это построение, например, так:

- Будем бесконечно строить (перебирать) **всевозможные** конечные множества $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов исходной системы S
- Построив очередное множество $\mathcal{G}$, попытаемся вывести из него $\square$
- Рано или поздно хотя бы из одного построенного $\mathcal{G}$ удастся вывести $\square$ — «поднимем» этот вывод, получив вывод $\square$ из S

А есть ли более эффективный способ вывода $\square$
из произвольной невыполнимой системы дизъюнктов?

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 27

Стратегии резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

В методе резолюций, как и в методе семантических таблиц, есть свобода выбора (*таблиц; термов; дизъюнктов*), позволяющая строить существенно различающиеся выводы

Например: (*переименование дизъюнктов опущено для наглядности*)

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 : \neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \varphi_2 : \mathrm{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \varphi_3 : \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \varphi_4 : \neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \\ \varphi_5 : \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \end{array} \right\}$$

Вывод из S можно устроить, например, так:

$$\neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \neg \mathrm{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \square \quad \begin{array}{c} \varphi_5 \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi_2 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathbf{b}) \to \neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \infty \quad \begin{array}{c} \varphi_4 \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi_3 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \to \begin{array}{l} \neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \vee \\ \neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}') \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}', \mathrm{z}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \end{array} \to \infty \quad \begin{array}{c} \\ \uparrow \\ \varphi_4 \end{array}$$

Стратегии резолютивного вывода

От способа применения правил резолютивного вывода
существенно зависит возможность вывести $\square$

Стратегия резолютивного вывода — это набор ограничений на выбор дизъюнктов, к которым применяются правила при построении вывода

Стратегия резолютивного вывода называется полной,
если для любой невыполнимой системы дизъюнктов S
существует вывод $\square$ из S, построенный согласно этой стратегии

Например,
стратегия, никак не ограничивающая выбор дизъюнктов, полна —
но существуют и более «эффективные» полные стратегии

Семантическая резолюция

По своему усмотрению выберем интерпретацию $\mathcal{I}$

$\mathcal{I}$-резолюция — это стратегия с одним (следующим) ограничением:

Для дизъюнктов D_1, D_2, к которым применяется правило резолюции, должно быть верно $\mathcal{I} \models D_1$ и $\mathcal{I} \not\models D_2$

Резолютивный вывод, построенный согласно $\mathcal{I}$-резолюции, называется $\mathcal{I}$-резолютивным выводом

Пример: для эрбрановской интерпретации $\mathcal{I} = \emptyset$ и системы

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee C, \quad B \vee C, \quad \neg C\}$$

один из $\mathcal{I}$-резолютивных выводов выглядит так:

$(\mathcal{I} \models D_i)$	$(\mathcal{I} \not\models D_i)$
$D_1 = \neg A \vee \neg B \vee C$	$D_3 = A \vee C$
$D_2 = \neg C$	$D_4 = B \vee C$
$D_1, D_3 \to D_5 = \neg B \vee C \vee C$	$D_2, D_3 \to D_9 = A$
$D_5 \to D_6 = \neg B \vee C$	$D_2, D_4 \to D_{10} = B$
$D_1, D_4 \to D_7 = \neg A \vee C \vee C$	$D_6, D_{10} \to D_{11} = C$
$D_7 \to D_8 = \neg A \vee C$	$D_2, D_{11} \to D_{12} = \square$

Семантическая резолюция

Теорема (о полноте семантической резолюции)
$\mathcal{I}$-резолюция полна для любой интерпретации $\mathcal{I}$

Иными словами, для любой невыполнимой системы дизъюнктов S и любой интерпретации $\mathcal{I}$ существует $\mathcal{I}$-резолютивный вывод $\square$ из S

Доказательство приводить не будем, отметив только, что оно следует предложенной ранее схеме обоснования полноты резолютивного вывода, и что существенные исправления требуется внести только в лемму об основных дизъюнктах

Входная резолюция

Входной резолютивный вывод из системы S,
инициированный дизъюнктом D этой системы, устроен так:

- Нечётные дизъюнкты вывода (при нумерации с единицы) называются центральными, чётные — боковыми
- Первый дизъюнкт вывода — это D
- Все боковые дизъюнкты являются вариантами дизъюнктов из S
- Каждый центральный дизъюнкт, кроме первого, — это резольвента двух предшествующих дизъюнктов

Проще говоря, во входном выводе каждый следующий центральный дизъюнкт — это резольвента предыдущего центрального дизъюнкта и варианта дизъюнкта исходной системы

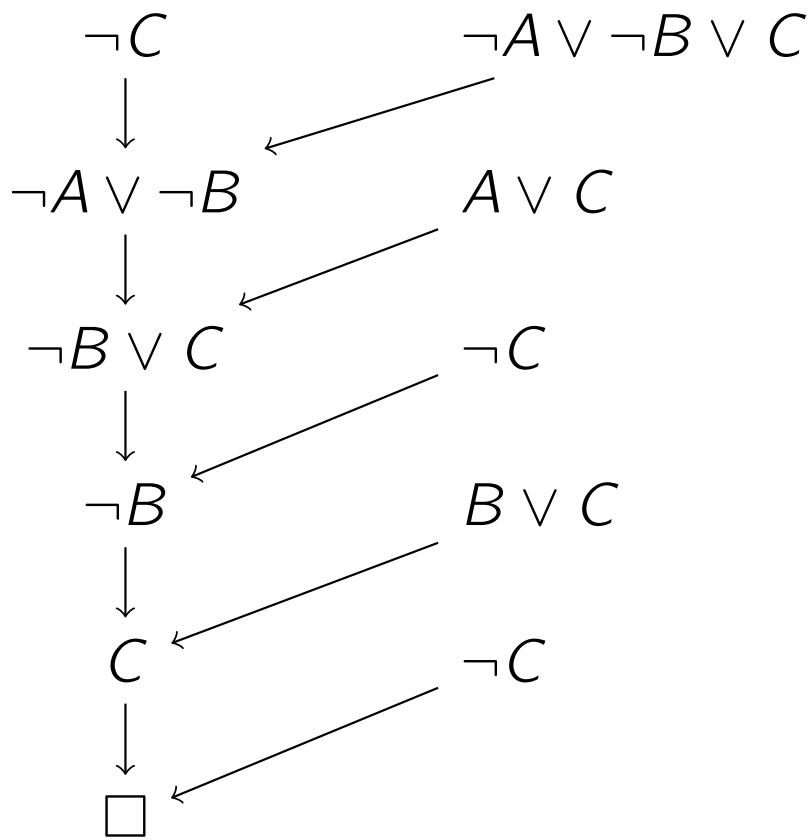
Входная резолюция — это стратегия, согласно которой разрешено строить любые входные резолютивные выводы и только их

Входная резолюция

Пример: один из входных резолютивных выводов из системы

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee C, \quad B \vee C, \quad \neg C\}$$

устроен так:



Входная резолюция

Теорема (о неполноте входной резолюции)

Входная резолюция неполна

Доказательство

Вот пример системы,
из которой не существует входного резолютивного вывода $\square$:

$$S = \{A \vee A, \quad \neg A \vee \neg A\}$$

При построении входного вывода
запрещено применять правило склейки, а значит,
все дизъюнкты входного вывода из S содержат ровно две литеры ▼

Запрет на применение правила склейки —
не единственная причина неполноты входной резолюции

Даже если добавить возможность склеивать дизъюнкт перед
построением резольвенты, то (*как можно показать полным перебором*)
невозможно вывести $\square$, например, из невыполнимой системы

$$\{A \vee C, \quad \neg A \vee C, \quad B \vee \neg C, \quad \neg B \vee \neg C\}$$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 28

Даша, Саша, Паша, пиво
и метод семантических таблиц
с методом резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

В блоке 6 была в качестве иллюстрации предложена такая задача

Дано:

- Даша любит Сашу,
$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\mathbf{Д}, \mathbf{С})$$
- а Саша любит пиво,
$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\mathbf{С}, \mathbf{п})$$
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он
$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathbf{п}) \\ \psi_1 &= \forall \mathrm{x}\,(\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{x})) \end{aligned}$$

Выяснить, любит ли кто-нибудь Дашу
$$\chi = \exists \mathrm{x}\ \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathbf{Д})$$
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi?$$

Или, по теореме о логическом следствии:
$$\models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi?$$

Попробуем решить эту задачу
методом семантических таблиц и методом резолюций

Решение методом семантических таблиц

$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С})$ $\quad$ $\psi_1 = \forall \mathrm{x}\,(\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$

$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п})$ $\quad$ $\psi_2 = \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}))$

$\varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п})$ $\quad$ $\psi_3 = \psi_2 \to \varphi_4$

$\varphi_4 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С})$

$\chi = \exists \mathrm{x}\,\mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$

$$\langle \mid \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi \rangle$$

$$\downarrow R{\to},\ L\&,\ L\&,\ L\&$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_3 \mid \chi \rangle$$

$$\swarrow \quad L{\to} \quad \searrow$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2 \rangle$$

$$\downarrow R\exists$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \rangle$$

$$\swarrow \quad R\& \quad \downarrow$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_2 \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_3 \rangle$$

Решение методом семантических таблиц

$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С})$ $\quad$ $\psi_1 = \forall \mathrm{x}\,(\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$

$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п})$ $\quad$ $\psi_2 = \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}))$

$\varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п})$ $\quad$ $\psi_3 = \psi_2 \to \varphi_4$

$\varphi_4 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С})$ $\quad$ $\psi_4 = \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y}))$

$\varphi_5 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{Д})$ $\quad$ $\psi_5 = \psi_4 \to \varphi_5$

$\chi = \exists \mathrm{x}\,\mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1, \psi_5 \mid \chi \rangle$$
$$\swarrow \quad L\to \quad \searrow$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4 \rangle$$
$$\downarrow R\exists \qquad\qquad \downarrow R\exists$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi, \varphi_5 \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \,\&\, \varphi_1 \rangle$$
$$\swarrow \quad R\& \quad \downarrow$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_1 \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \rangle$$

Получен успешный табличный вывод

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

Решение методом резолюций

$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \quad \varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) \quad \varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п})$$
$$\psi_1 = \forall \mathrm{x}\, (\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$$
$$\chi = \exists \mathrm{x}\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$
$$\models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi?$$

Этап 1: поставим отрицание над формулой

$$\neg(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi)$$

Этап 2: построим равносильную ПНФ

$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z} \left(\begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}) \\ \&(\neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x})) \\ \& \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array} \right)$$

Этап 3: построим равновыполнимую ССФ

Формула выше — ССФ

Этап 4: перейдём к системе дизъюнктов

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), & \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}), & \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}), \\ \multicolumn{3}{c}{\neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}),} \\ \multicolumn{3}{c}{\neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д})} \end{array} \right\}$$

Решение методом резолюций

Этап 5: попробуем вывести пустой дизъюнкт

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), \quad \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}), \quad \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}), \\ \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}), \\ \neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}') \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}', \mathrm{y}') \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}') & & \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}') \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}', \mathrm{y}') \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}') & & \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) & \\ & \{\mathrm{z}/\textbf{П}, \mathrm{x}'/\textbf{Д}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \downarrow & & \{\mathrm{x}'/\textbf{С}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \downarrow & & \varepsilon \downarrow & \\ \neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) & \to \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y}) & \to \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С}) & \to \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}) & \to \neg\mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) & \to \square \\ & & \{\mathrm{y}/\textbf{С}\} \uparrow & & \{\mathrm{y}/\textbf{п}\} \uparrow & & \\ & & \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) & & \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}) & & \end{array}$$

Это успешный входной резолютивный вывод $\square$,
инициированный дизъюнктом $\neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д})$

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

А кто?

Решение методом резолюций

$$
\begin{array}{rl}
\neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) & \\
\downarrow & \theta_1 = \{\mathrm{z}/\textbf{П}, \mathrm{x}'/\textbf{Д}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\
\neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y}) & \\
\downarrow & \theta_2 = \{\mathrm{y}/\textbf{С}\} \\
\neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С}) & \\
\downarrow & \theta_3 = \{\mathrm{x}'/\textbf{С}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\
\neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}) & \\
\downarrow & \theta_4 = \{\mathrm{y}/\textbf{п}\} \\
\neg \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) & \\
\downarrow & \theta_5 = \varepsilon \\
\square &
\end{array}
$$

Тайный поклонник Даши в выводе обозначен переменной z

Посмотрим, как эта переменная изменялась унификаторами:

$$\mathrm{z}\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \textbf{П}$$

Оказывается, что Дашу любит Паша

(*могут быть и другие поклонники, но про них мы ничего не знаем*)

А что это за «трюк» с применением подстановок,

в каких случаях и как именно он работает?

Заключительный пример

Перед детальным обсуждением этого «трюка» —
пример задачи, для которой так вычислить ответ нельзя

- Если вечером будет дождь, то мы пойдём в кино
$$\text{Будет}(\textbf{дождь}) \to \text{Досуг}(\textbf{кино})$$
- Если вечером дождя не будет, то мы пойдём гулять в парк
$$\neg\text{Будет}(\textbf{дождь}) \to \text{Досуг}(\textbf{парк})$$

Где мы проведём этот вечер?

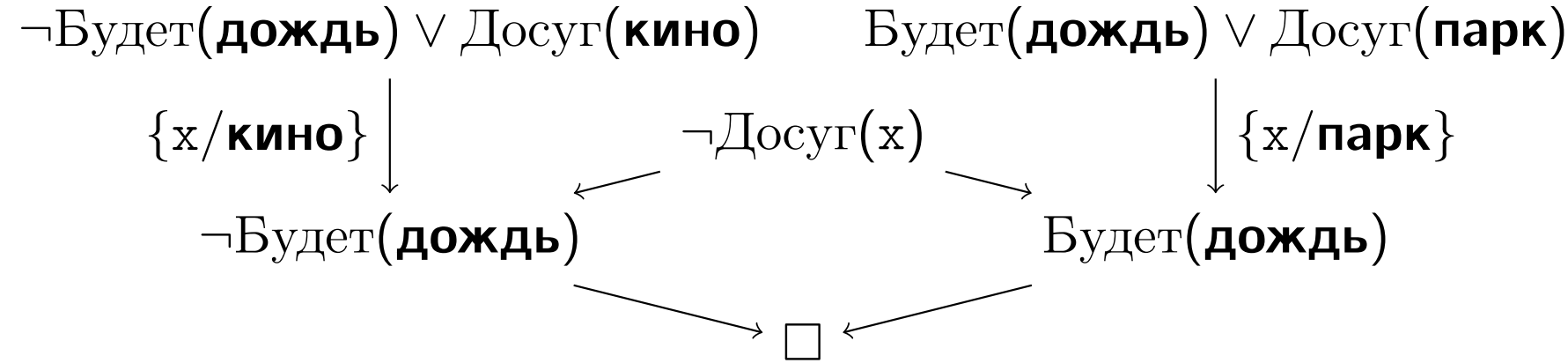
Действуя по аналогии с задачей о Даше, Саше, Паше и пиве, вопрос можно ослабить так, понадеявшись на тот же «трюк» с вычислением:
Есть ли такое место, которое мы посетим этим вечером?
$$\exists x\ \text{Досуг}(x)\ ?$$

Заключительный пример

По аналогии с задачей о Даше, Саше, Паше и пиве получим систему дизъюнктов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg\text{Будет}(\textbf{дождь}) \vee \text{Досуг}(\textbf{кино}) \\ \text{Будет}(\textbf{дождь}) \vee \text{Досуг}(\textbf{парк}) \\ \neg\text{Досуг}(\text{x}) \end{array} \right\}$$

Такое место действительно существует:



Но по выводу невозможно понять, куда же мы пойдём

Невозможно определить место досуга достоверно и однозначно, пока не стало известно, будет ли вечером дождь

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 29

Хорновские дизъюнкты

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Правилом будем называть дизъюнкт, содержащий ровно одну положительную литеру, то есть имеющий вид

$$\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_k \vee B$$

Запросом будем называть дизъюнкт, не содержащий ни одной положительной литеры (в том числе $\square$), то есть имеющий вид

$$\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_k$$

Хорновскими дизъюнктами называются правила и запросы

Утверждение. $\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_k \vee B \sim A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k \to B$

Утверждение. $\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_k \sim \neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k)$

Основываясь на этих утверждениях, дизъюнкты $\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_k \vee B$ и $\neg C_1 \vee \cdots \vee \neg C_k$ будем иногда записывать как формулы $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k \to B$ и $\neg(C_1 \,\&\, \ldots \,\&\, C_k)$

Утверждение. Контрарную пару с заданной литерой запроса может образовывать не более одной литеры правила

Утверждение. Ни к какой паре запросов нельзя применить правило резолюции

Утверждение. Резольвента запроса и правила является запросом

Правило $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k \to B$ — это естественный способ представления причинно-следственных взаимосвязей:

- Если справедливы факты $A_1, \ldots, A_k$, то справедлив и факт B
  - То есть $A_1, \ldots, A_k$ — достаточное условие справедливости B
  - Если $k = 0$, то просто «Справедлив факт B»
- Чтобы решить задачу, записанную в виде B, достаточно решить задачи, записанные в виде $A_1, \ldots, A_k$, и совместить ответы
  - Если $k = 0$, то «Решение задачи B очевидно»

Формула $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k$, отрицанием которой является запрос, — это естественный способ представления вопроса к задаче:

- Требуется проверить справедливость набора (*взаимосвязанных*) фактов $A_1, \ldots, A_k$
- Требуется решить набор задач, записанных в виде $A_1, \ldots, A_k$

Например, система дизъюнктов

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}), \\ \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}), \\ \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array} \right\}$$

из задачи о Даше, Саше, Паше и пиве — это система хорновских дизъюнктов:

- В части «Дано» записаны правила:

$$\mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С})$$
$$\mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п})$$
$$\mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п})$$
$$\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x})$$

- Вопрос задачи, записанный в виде формулы и дополненный отрицанием в результате преобразования к дизъюнктам, — это запрос:

$$\neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д})$$

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 30

Вычислительные возможности метода резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Пусть

- S **— система дизъюнктов-правил,**
- Q_1 **— дизъюнкт-запрос,**
- $Q_1, D_1, Q_2, D_2, \ldots, Q_k, D_k, \square$**,** $k \geq 0$**, — успешный входной резолютивный вывод из** $S \cup \{Q_1\}$**,**
- $\theta_1, \ldots, \theta_k$ **— наиболее общие унификаторы, согласно которым в выводе строятся резольвенты** $Q_2, \ldots, Q_k, \square$ **соответственно, и**
- $\mathrm{Var}_{Q_1\theta_1\ldots\theta_k} = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n\}$**.**

Тогда $S \models \forall\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}\ ((\neg Q_1)\theta_1 \ldots \theta_k)$

Доказательство (индукцией по k).

База: $k = 0$

Тогда $Q_1 = \square$, $\mathrm{Var}_{Q_1} = \emptyset$ и $S \not\models \square$, а значит, $S \models \neg Q_1$

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Доказательство (индуктивный переход).

$$(Q_1, D_1 \xrightarrow{\theta_1} Q_2, D_2 \xrightarrow{\theta_2} \ldots \xrightarrow{\theta_{k-1}} Q_k, D_k \xrightarrow{\theta_k} \square)$$

Пусть утверждение справедливо для $k < N$ для заданного N, $N \geq 1$; покажем, что оно справедливо и для $k = N$

Далее $\forall\ldots\ \varphi$ означает $\forall\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \varphi$, где $\mathrm{Var}_\varphi = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\}$

Пусть $Q_1 = \neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_q \,\&\, B)$, $Q_2 = \neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_p)\theta_1$, $D_1 = A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \to C$, $B\theta_1 = C\theta_1$ и $\eta = \theta_2 \ldots \theta_k$

По индуктивному предположению, верно $S \models \forall\ldots\ ((\neg Q_2)\eta)$

Значит, верно $S \models \forall\ldots\ ((A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_q)\theta_1\eta)$ и $S \models \forall\ldots\ ((A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p)\theta_1\eta)$ (почему?)

При этом $S \models \forall\ldots\ (A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \to C)$, (почему?)
а значит, и $S \models \forall\ldots\ ((A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \to C)\theta_1\eta)$ (почему?)

Тогда, $S \models \forall\ldots\ (C\theta_1\eta)$ (почему?)

При этом $C\theta_1 = B\theta_1$, а значит, $S \models \forall\ldots\ (B\theta_1\eta)$

Следовательно, $S \models \forall\ldots\ ((\neg Q_1)\theta_1\eta)$ ▼

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: Даша, Саша, Паша и пиво

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}), \\ \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}) \end{array} \right\} \qquad Q_1 = \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д})$$

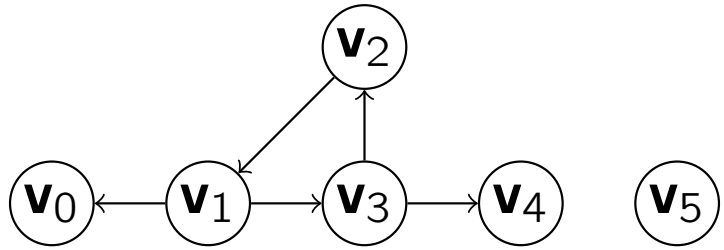
$$\begin{array}{rcll} & & \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) & \\ & & \downarrow & \theta_1 = \{\mathrm{z}/\textbf{П}, \mathrm{x}'/\textbf{Д}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\ \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}) & \longrightarrow & \neg(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y})) & \\ & & \downarrow & \theta_2 = \{\mathrm{y}/\textbf{С}\} \\ \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) & \longrightarrow & \neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С}) & \\ & & \downarrow & \theta_3 = \{\mathrm{x}'/\textbf{С}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\ \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}) & \longrightarrow & \neg(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y})) & \\ & & \downarrow & \theta_4 = \{\mathrm{y}/\textbf{п}\} \\ \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}) & \longrightarrow & \neg \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) & \\ & & \downarrow & \theta_5 = \varepsilon \\ \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) & \longrightarrow & \square & \end{array}$$

По только что доказанной теореме, верно $S \models \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д})\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5$

То есть $S \models \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{Д})$: Паша действительно любит Дашу

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



Достижима ли вершина $\mathbf{v}_4$ из $\mathbf{v}_1$, и если да, то по какому пути?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов и решить при помощи входной резолюции

Вершины графа $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots)$ — это константы

Ещё так получится, что вершинами графа можно считать все термы, но в рассматриваемом примере это неважно

Тот факт, что (u, w) — дуга графа, будет записываться в виде атома $\mathrm{Arc}(u, w)$

Тогда в нашем распоряжении есть пять фактов, отвечающих пяти дугам:

$$\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) \quad \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \quad \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2)$$
$$\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

Путь $u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k$ будет записываться так (*чтобы не путать дуги и импликации*):

$$u_1 \hookrightarrow u_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow u_k$$

$\hookrightarrow$ — это функциональный символ местности 2

Символ $\hookrightarrow$ положим ассоциативным вправо: $x \hookrightarrow y \hookrightarrow z = x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z)$

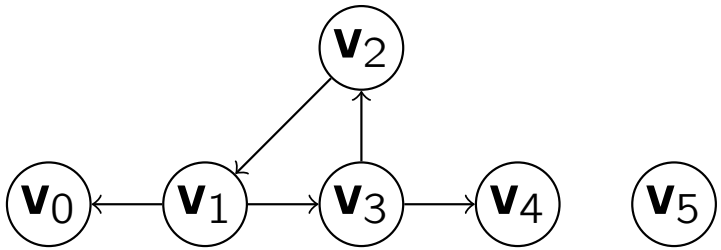
Тот факт, что вершина w достижима из u по пути π, будем записывать в виде атома $\mathrm{Reach}(u, w, \pi)$

Тогда для такого трёхместного отношения достижимости справедливы следующие свойства (*индуктивное определение*):

- Любая вершина достижима из себя по тривиальному пути
$$\forall \mathrm{x}\ \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x})$$
- Если в графе есть дуга $\mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{y}$ и из y по пути π достижима вершина z, то из x по пути $\mathrm{x} \hookrightarrow \pi$ достижима вершина z
$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ \forall \mathrm{p}\ (\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{p}))$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



$\mathbf{v}_1 \rightsquigarrow \mathbf{v}_4$?

Входные данные задачи можно записать в виде системы дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \multicolumn{3}{l}{\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{p})} \end{array} \right\}$$

Вопрос к задаче можно записать в виде формулы $\exists \mathrm{p}\, \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})$

Отрицание этой формулы — это дизъюнкт-запрос

$$\varphi = \neg \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})$$

Чтобы убедиться, что вершина $\mathbf{v}_4$ достижима из $\mathbf{v}_1$, и найти соответствующий путь, достаточно построить успешный входной вывод $\square$ из $S \cup \{\varphi\}$, инициированный φ, и применить недавно доказанную теорему

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \multicolumn{3}{l}{\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{p})} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rl} & \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) \\ \theta_1 = \{\mathrm{x}/\mathbf{v}_1, \mathrm{z}/\mathbf{v}_4, \mathrm{p}/\mathbf{v}_1 \hookrightarrow \mathrm{p}'\} \downarrow & \mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}') \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{p}') \\ \neg(\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}')) \leftarrow & \\ \theta_2 = \{\mathrm{y}/\mathbf{v}_3\}\{\mathrm{p}'/\mathrm{p}, \mathrm{p}'/\mathrm{p}\} \downarrow & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \\ \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) \leftarrow & \\ \theta_3 = \{\mathrm{x}/\mathbf{v}_3, \mathrm{z}/\mathbf{v}_4, \mathrm{p}/\mathbf{v}_3 \hookrightarrow \mathrm{p}'\} \downarrow & \mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}') \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{p}') \\ \neg(\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}')) \leftarrow & \\ \theta_4 = \{\mathrm{y}/\mathbf{v}_4\}\{\mathrm{p}'/\mathrm{p}, \mathrm{p}/\mathrm{p}'\} \downarrow & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \\ \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) \leftarrow & \\ \theta_5 = \{\mathrm{p}/\mathbf{v}_4, \mathrm{x}/\mathbf{v}_4\} \downarrow & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \square \leftarrow & \end{array}$$

$$\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 \hookrightarrow \mathbf{v}_3 \hookrightarrow \mathbf{v}_4)$$

Следовательно, вершина $\mathbf{v}_4$ достижима из $\mathbf{v}_1$ по пути $\mathbf{v}_1 \hookrightarrow \mathbf{v}_3 \hookrightarrow \mathbf{v}_4$