Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 8

Метод семантических таблиц
в логике предикатов:
семантические таблицы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Из блока 7:

$$\begin{tikzcd}
\langle \ \mid \mathrm{x} \to \mathrm{x} \lor \mathrm{y} \rangle \arrow[d, "R\to"] \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \lor \mathrm{y} \rangle \arrow[d, "R\lor"] \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle
\end{tikzcd}$$

закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models \mathrm{x} \to \mathrm{x} \lor \mathrm{y}$

Попробуем адаптировать понятие семантической таблицы
и в целом метод семантических таблиц к логике предикатов

Определения

Семантическая таблица (*логики предикатов*) — это упорядоченная пара множеств формул: $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T атомарна, если все формулы из $\Gamma \cup \Delta$ атомарны

Эти определения дословно перенесены из логики высказываний

Пусть $\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}$ — все **свободные** переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица T выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации, такие что

- $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для любой формулы φ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для любой формулы ψ из Δ

А это определение по сравнению с логикой высказываний усложнилось: добавились предметы, оценивающие свободные переменные формул

Примеры

1. $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица атомарна, незакрыта и выполнима

Выполнимость подтверждается интерпретацией, в которой

$$\mathsf{D} = \{d\},\ \overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbb{t} \text{ и } \overline{\mathrm{Q}}(d, d) = \mathbb{f},$$

и значением d переменной x

2. $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица атомарна, закрыта и невыполнима

3. $\langle \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица неатомарна, закрыта и невыполнима

4. $\langle \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица неатомарна, незакрыта и выполнима

Выполнимость подтверждается интерпретацией, в которой

$$\mathsf{D} = \{d_1, d_2\},\ \overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t} \text{ и } \overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f},$$

и набором d_1, d_2 значений переменных x, y

Основные утверждения

Теорема(*о табличной проверке общезначимости*)
Для любой формулы φ

$$\models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I}$$
$$\text{и любого набора предметов } \widetilde{d}^n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима } \blacktriangledown$$

Утверждение. Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение. Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство (утверждений). А попробуйте сами