

Математическая логика

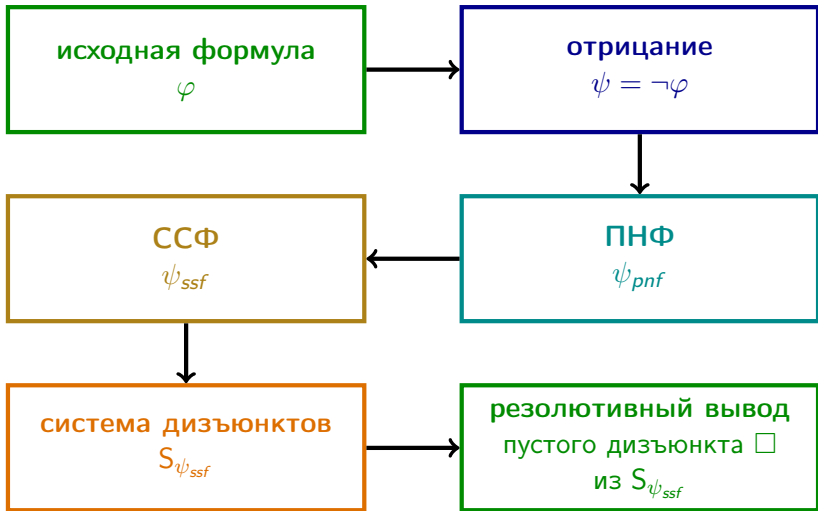
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 19

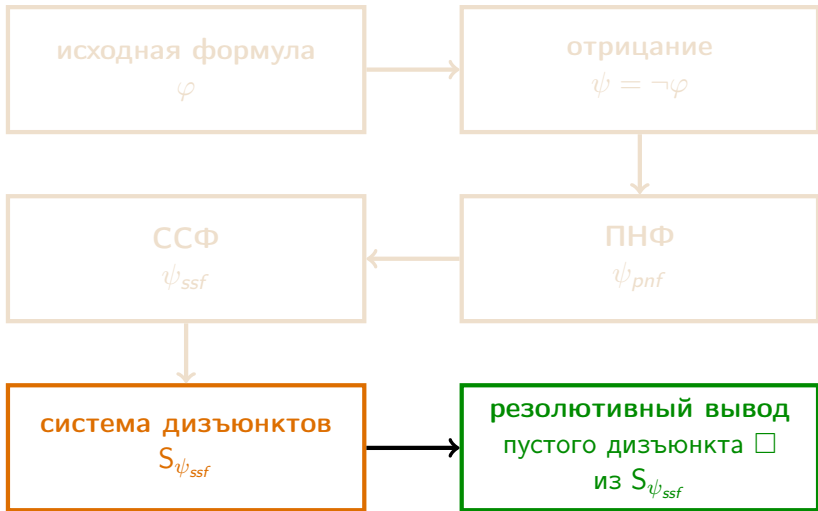
Композиция подстановок
Постановка задачи унификации

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \Vdash \psi \Leftrightarrow \Vdash \psi_{pnf} \Leftrightarrow \Vdash \psi_{ssf} \Leftrightarrow \Vdash S_{\psi_{ssf}}$$

Противоречия в системах дизъюнктов

На последних этапах метода резолюций
требуется проверить выполнимость системы дизъюнктов

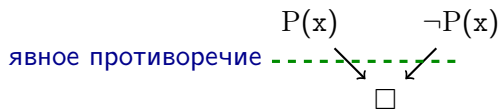
Попробуем, по аналогии с *методом семантических таблиц*,
придумать способ извлечения явных противоречий из скрытых (неявных)

В качестве явного противоречия
будем использовать *пустой дизъюнкт* (\square)

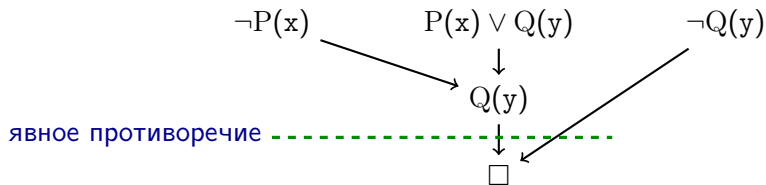
Начнём издалека: приведём несколько примеров того,
как можно было бы “разумно” и “просто” извлечь \square
из невыполнимой системы дизъюнктов

Противоречия в системах дизъюнктов

$\models \{P(x), \neg P(x)\}$:



$\models \{\neg P(x), \neg Q(y), P(x) \vee Q(y)\}$:



$\forall x \neg P(x), \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y Q(y)$

Композиция подстановок

Унификация атомов A , B достигается применением к ним *подстановки* θ , такой что $A\theta = B\theta$

Напоминание

Подстановка — это отображение $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством *связок*:

$$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$$

$E\theta$ — это результат применения подстановки θ к выражению E

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем основные алгебраические свойства подстановок

Композиция подстановок

Композиция подстановок θ и η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной x верно равенство

$$x(\theta\eta) = (x\theta)\eta$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ и $\eta = \{y_1/s_1, \dots, y_k/s_k\}$. Тогда

$$\theta\eta = \{x_i/t_i\eta \mid 1 \leq i \leq n, x_i \neq t_i\eta\} \\ \cup \{y_j/s_j \mid 1 \leq j \leq k, y_j \notin \{x_1, \dots, x_n\}\}$$

Доказательство. Рассмотрим переменную $z \in \text{Var}$

Если $z \notin \text{Dom}_\theta \cup \text{Dom}_\eta$, то $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = z$

Если $z = y_j \in \text{Dom}_\eta \setminus \text{Dom}_\theta$, то $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = s_j$

Иначе $z = x_i \in \text{Dom}_\theta$, и $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = t_i\eta$



Композиция подстановок

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\}$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}$$

$$\theta\eta = ?$$

$$\{x/f(x, c)\eta, y/g(u)\eta, z/y\eta\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c), z/z\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c)\} \cup \{u/c\}$$

$$\theta\eta = \{x/f(g(y), c), y/g(c), u/c\}$$

Задача унификации

Подстановка θ называется **унификатором** выражений E_1, E_2 , если $E_1\theta = E_2\theta$

$\mathcal{U}(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Выражения E_1, E_2 **унифицируемы**, если $\mathcal{U}(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Подстановка η называется **специализацией** подстановки θ , если существует подстановка μ , такая что $\eta = \theta\mu$

Подмножество S множества подстановок Θ называется **полным** в Θ , если любая подстановка из Θ является специализацией хотя бы одной подстановки из S

Подстановка θ называется **наиболее общей** в множестве подстановок Θ , если $\theta \in \Theta$ и $\{\theta\}$ — множество, полное в Θ

$\text{НОУ}(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Задача унификации

Пример

Рассмотрим два атома:

$$A = P(f(x), y) \quad B = P(u, g(v))$$

Подстановка $\eta = \{y/g(g(v)), u/f(c), v/g(v), x/c\}$ —
унификатор атомов A и B (то есть $\eta \in \mathcal{U}(A, B)$), т.к.

$$P(f(x), y)\eta = P(f(c), g(g(v))) = P(u, g(v))\eta$$

А подстановка $\theta = \{y/g(v), u/f(x)\}$ — более общий унификатор A и B :

$$\begin{aligned} P(f(x), y)\theta &= P(f(x), g(v)) = P(u, g(v))\theta \\ \eta &= \theta \{v/g(v), x/c\} \end{aligned}$$

На самом деле θ — наиболее общий унификатор атомов A и B
(но как это доказать?)

А выражения $P(x, f(x))$ и $P(g(y), y)$ неунифицируемы
(а это как доказать?)

Задача унификации

формулируется следующим образом:

для заданных выражений E_1, E_2
выяснить, унифицируемы ли эти выражения,
и если это так, то вычислить
множество унификаторов, полное в $\mathcal{U}(E_1, E_2)$