Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 11

Другие виды сетей Петри

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

Сети Петри широко применяются для моделирования систем в разнообразных областях

Но нередко возникает потребность в использовании варианта сетей, существенно отличающихся от рассмотренных (обыкновенных)

Это могут быть

- как более просто устроенные сети, для которых шире спектр разрешимых задач и их решение устроено проще,
- так и сложнее устроенные, в которых добавляются новые средства моделирования

Ординарные сети Петри

Обыкновенная сеть Петри называется ординарной, если вес каждой дуги равен 1, то есть если в сети разрешены только дуги вида $\xrightarrow{1}$, они же просто $\to$

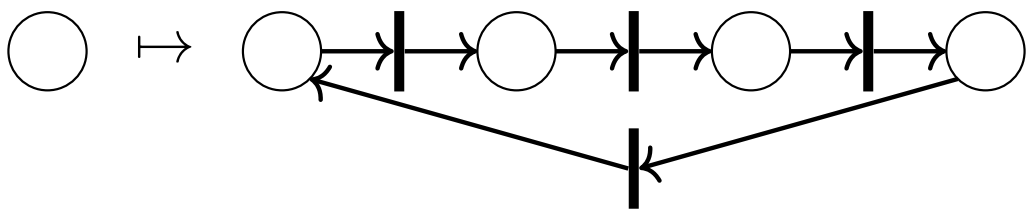
Хотя запрет на использование весов дуг и кажется существенно упрощающим модель, но всё же оказывается, что выразительные возможности сетей от этого не изменяются: можно преобразовать произвольную обыкновенную сеть Петри π в ординарную π' так, чтобы вычисления этих сетей были *по сути* одинаковы

Преобразование $\pi = (P, T, E, W, M_0)$ в $\pi' = (P', T', E', \_, M'_0)$ можно осуществить так

Пусть w — максимальный вес дуги в π

1. Каждую позицию p «расщепим» на w копий $(p[1], \ldots, p[w])$, соединив эти копии в кольцо переходами

Например, для $w = 4$:



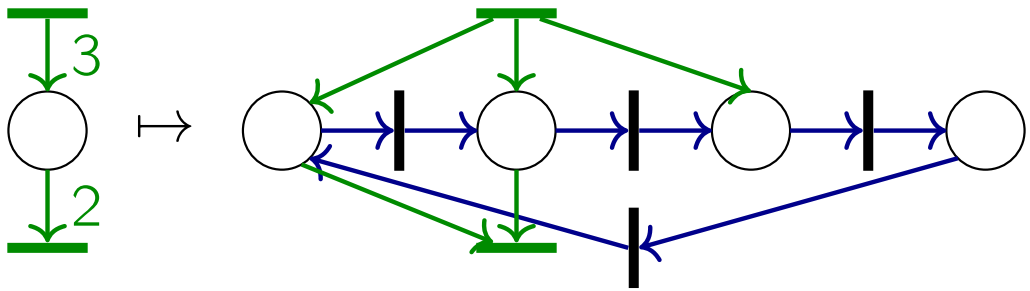
Ординарные сети Петри

$$\pi = (P, T, E, W, M_0) \quad \overset{w}{\longmapsto} \quad \pi' = (P', T', E', \_, M'_0)$$

2. Каждую дугу $\_ \overset{n}{\to} p$ «расщепим» на $\_ \to p[1], \quad \ldots, \quad \_ \to p[n]$

3. Каждую дугу $p \overset{n}{\to} \_$ «расщепим» на $p[1] \to \_, \quad \ldots, \quad p[n] \to \_$

Например:



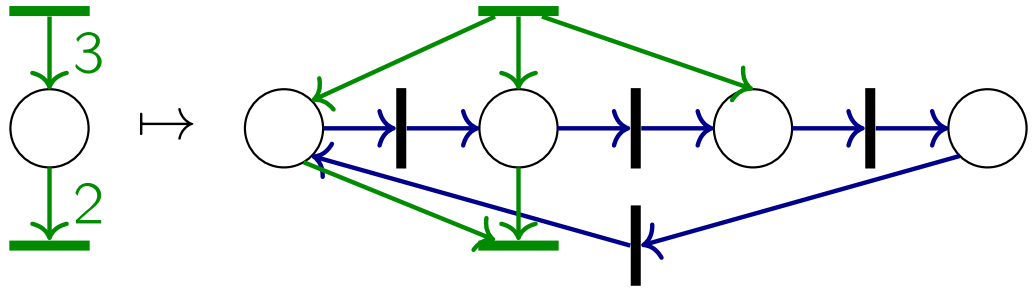
4. Начальную разметку M'_0 зададим так:

$$M'_0(p[1]) = M_0(p) \quad \text{и} \quad M'_0(p[2]) = \cdots = M'_0(p[n]) = 0$$

В итоге получается ординарная сеть Петри, состоящая из старых переходов и новых переходов и произвольно распределяющая фишки среди копий позиции

Ординарные сети Петри

$$\pi = (P, T, E, W, M_0) \quad \overset{w}{\longmapsto} \quad \pi' = (P', T', E', \_, M'_0)$$



Утверждение. **Сеть Петри π имеет вычисление**

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_n} M_n$$

тогда и только тогда, когда ординарная сеть π' имеет вычисление

$$M'_0 \xrightarrow{t'_1} M'_1 \xrightarrow{t'_2} \ldots \xrightarrow{t'_k} M'_k,$$

в котором

- **подпоследовательность старых переходов последовательности $t'_1, \ldots, t'_k$ есть $t_1, \ldots, t_n$, и**
- **для любой позиции p верно $M_n(p) = M'_k(p[1]) + \cdots + M'_k(p[w])$**

Ординарные сети Петри

$$\pi = (P, T, E, W, M_0) \quad \overset{w}{\longmapsto} \quad \pi' = (P', T', E', \_, M_0')$$

Иными словами, сети π и π' взаимно моделируют вычисления друг друга

Следствие. **Сеть π является живой (ограниченной) [консервативной] тогда и только тогда, когда сеть π' является живой (ограниченной) [консервативной]**

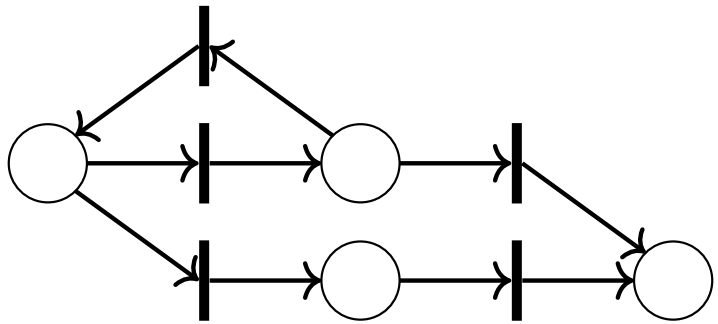
Значит, можно

- для моделирования использовать любые обыкновенные сети Петри, и при этом
- разрабатывать алгоритмы анализа поведения только для ординарных сетей Петри

Автоматные сети Петри

Сеть Петри называется автоматной, если она ординарна и каждому переходу инцидентны ровно одна входящая и ровно одна исходящая дуга

Например:



Позиции автоматной сети отвечают состояниям автомата

Срабатывание перехода автоматной сети перемещает фишку из одного состояния и отвечает выполнению перехода в автомате

Фишка в позиции p означает, что экземпляр автомата находится в состоянии p

В сети может быть и несколько фишек — это отвечает одновременному выполнению нескольких автоматов в семантике чередующихся вычислений

Автоматные сети Петри

Утверждение. **Любая автоматная сеть консервативна**

Утверждение. **Автоматная сеть жива $\Leftrightarrow$ она представляет собой сильно связный граф**

Утверждение. **Существует полиномиальный по времени алгоритм проверки достижимости заданной разметки в заданной автоматной сети**

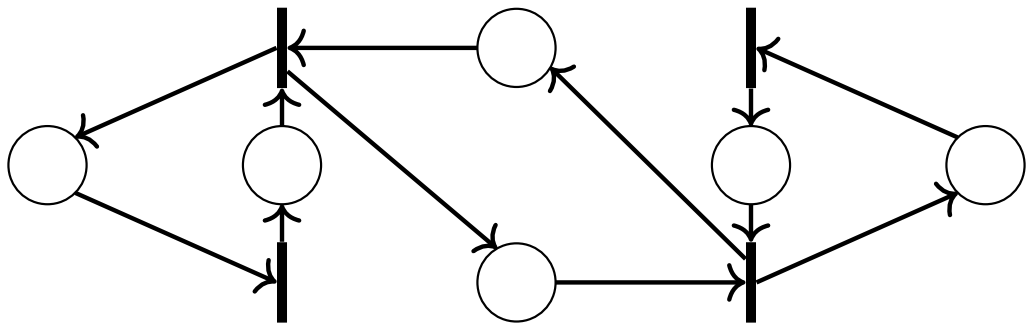
Доказательство (этих трёх утверждений).

Можете попробовать самостоятельно

Синхронизационные сети Петри

Сеть Петри называется синхронизационной (или, по-другому, — синхрографом), если она ординарна и каждой её позиции инцидентны ровно одна входящая и ровно одна исходящая дуга

Пример:



Цикл в синхрографе может пониматься как цикличный процесс (в «обыденном» понимании), и один виток перемещения фишки по циклу — одной итерации выполнения процесса

Переход может принадлежать нескольким процессам, обозначая точку синхронизации их выполнения

В такой сети может количество фишек может изменяться, но суммарное число фишек в каждом цикле (ресурсов процесса) остаётся неизменным

Синхронизационные сети Петри

Утверждение. **Для любых синхронизационной сети Петри, её простого цикла** $p_1 \to t_1 \to p_2 \to t_2 \to \cdots \to p_n \to t_n \to p_1$ **(p_1 — позиция) и разметок M_1, M_2, таких что M_2 достижима из M_1, верно** $\sum\limits_{i=1}^{n} M_1(p_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_2(p_i)$

Утверждение. **Синхронизационная сеть Петри жива $\Leftrightarrow$ выполнены следующие два условия:**

1. **В позициях каждого простого цикла содержится хотя бы одна фишка**
2. **Каждая позиция достижима хотя бы из одного цикла**

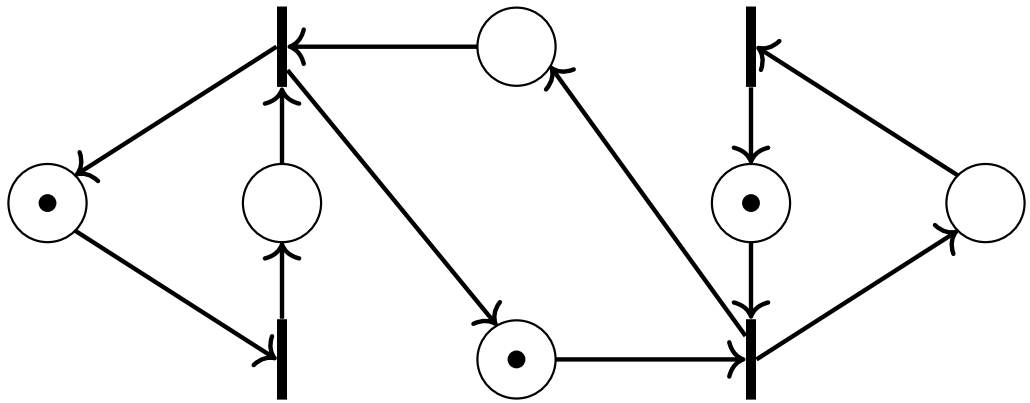
Утверждение. **Живая синхронизационная сеть Петри ограниченна $\Leftrightarrow$ каждая позиция принадлежит хотя бы одному циклу**

Утверждение. **Живая синхронизационная сеть Петри безопасна $\Leftrightarrow$ каждая позиция принадлежит хотя бы одному циклу, в позициях которого лежит ровно одна фишка**

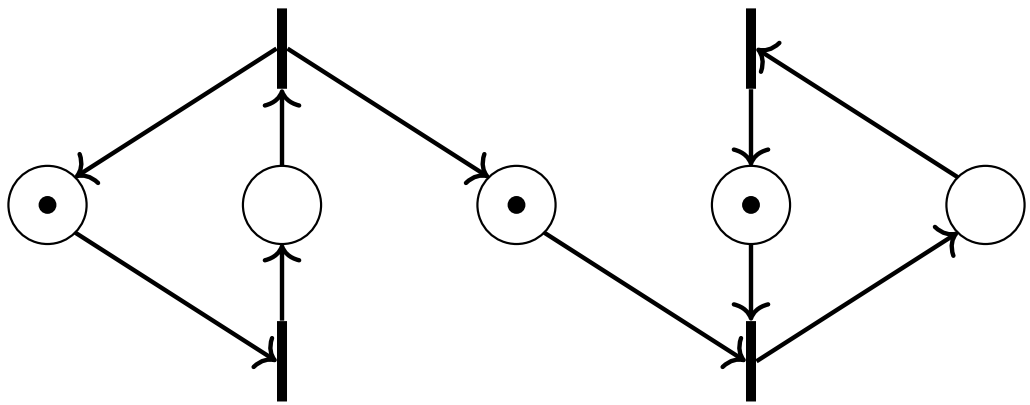
Доказательство. Можете попробовать самостоятельно

Синхронизационные сети Петри

Пример живой безопасной (и ограниченной) синхронизационной сети:



Пример живой неограниченной синхронизационной сети:

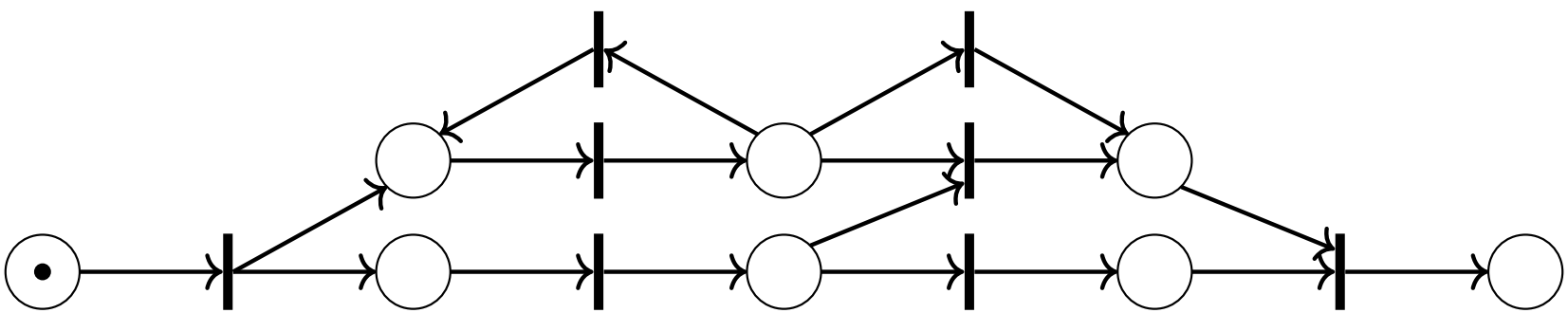


Сети потоков работ

Сетью потоков работ (WF-сетью, workflow net) называется сеть Петри, устроенная следующим образом:

1. Ровно для одной позиции in (входной) верно ${}^\bullet in = \emptyset$
2. Ровно для одной позиции out (выходной) верно $out^\bullet = \emptyset$
3. Каждая вершина сети лежит на каком-либо пути из входа в выход
4. Начальная разметка содержит ровно одну фишку, и эта фишка лежит в in

Пример:



Сети потоков работ

WF-сети применяются при описании бизнес-процессов, планов работ больших проектов и аналогичных наборов действий со взаимозависимыми этапами выполнения

Начало работ отмечается фишкой во входной позиции в начальной разметке

Для обозначения полного/успешного/корректного завершения всех работ используется выходная позиция

Разметка WF-сети называется заключительной, если в выходной позиции лежит хотя бы одна фишка

Заключительная разметка называется правильной, если

- в выходной позиции лежит ровно одна фишка и
- в остальных позициях не лежит ни одной фишки

Сети потоков работ

Для WF-сетей разумны такие свойства:

- Отсутствие тупиков: достижимых ситуаций, в которых невозможно завершить выполнение работ
- Сбалансированность: отсутствие незадействованных ресурсов по окончании работ
- Отсутствие избыточности: частей сети, не задействующихся ни в одном сценарии выполнения работ

WF-сеть называется бездефектной, если

- из любой достижимой разметки достижима заключительная разметка,
- достижима ровно одна заключительная разметка — правильная и
- для любого перехода существует вычисление, в котором срабатывает этот переход

Утверждение. **WF-сеть π бездефектна $\Leftrightarrow$ сеть, получающаяся из π добавлением перехода $out \to \mathbf{|} \to in$, жива и ограниченна**

Доказательство. Можете попробовать самостоятельно

Ингибиторные сети Петри

Согласно свойству монотонности сетей Петри, если в заданной разметке переход активен, то невозмоно сделать его неактивным, добавляя фишки в позиции

Можно попытаться «устранить» монотонность сети, явно добавив возможность блокировать переход добавлением фишек

Эту возможность можно устроить, например, добавив в сеть особые дуги (ингибиторные) с таким смыслом:

- если в позиции в начале ингибиторной дуги есть хотя бы одна фишка, то переход в конце дуги считается неактивным
- иначе активность перехода определяется как обычно

Ингибиторные сети Петри

Ингибиторная сеть Петри — это обыкновенная сеть Петри, в которую добавлено особое множество ингибиторных дуг $E_\circ \subseteq P \times T$

Ингибиторную дугу (p, t) принято изображать так: $p \text{—}\circ t$

Переход t в ингибиторной сети Петри активен в разметке M, если

- $E(\bullet, t) \preceq M$ (*как в обыкновенной сети Петри*) и
- для каждой ингибиторной дуги (p, t), оканчивающейся в переходе t, верно $M(p) = 0$

Оказывается, что добавление ингибиторных дуг в модель сети Петри делает эту модель алгоритмически полной

Ингибиторные сети Петри

Машина Минского (счётчиковая машина) — это одна из известных алгоритмически полных вычислительных моделей

Машина Минского состоит из конечного набора ячеек памяти (счётчиков) с начальными значениями 0, способных хранить неотрицательные целые значения, и последовательности команд двух видов:

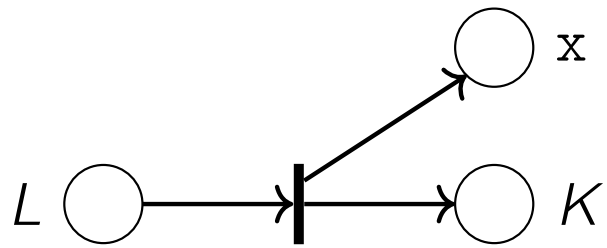
1. $\mathrm{x} := \mathrm{x} + 1$; *goto* k
   - Увеличить значение счётчика x на 1 и перейти к выполнению k-й команды последовательности

2. **if** $\mathrm{x} = 0$ **then** *goto* k_1 **else** $\mathrm{x} := \mathrm{x} - 1$; *goto* k_2 **fi**
   - Если счётчик x имеет значение 0, то перейти к выполнению k_1-й команды, а иначе уменьшить значение этого счётчика и перейти к выполнению k_2-й команды

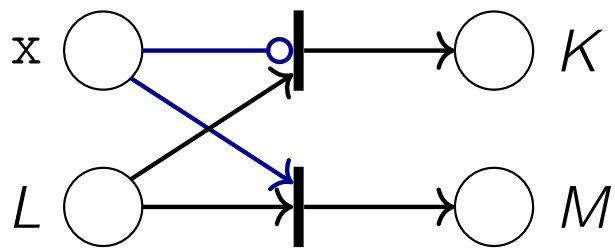
Ингибиторные сети Петри

Команды несложно моделируются переходами ингибиторных сетей Петри

$L : \mathtt{x} := \mathtt{x} + 1;\ goto\ K$



$L :$ **if** $\mathtt{x} = 0$ **then** $goto\ K$ **else** $\mathtt{x} := \mathtt{x} - 1;\ goto\ M$ **fi**



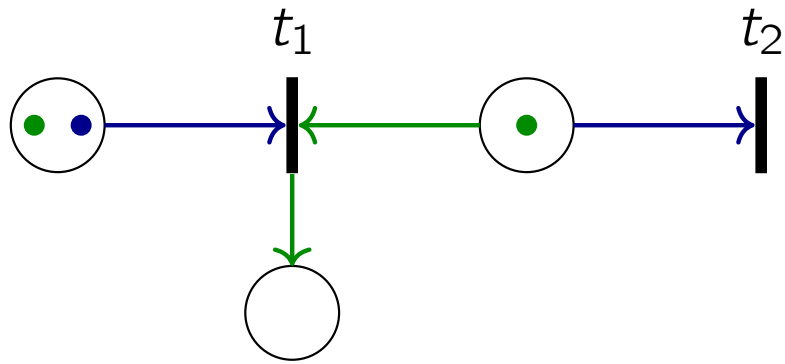
Раскрашенные сети Петри

Фишки обыкновенной сети Петри неотличимы друг от друга, и поведение сети определяется только их количеством в каждой позиции

Но можно представить себе, что в одной позиции могут находиться фишки разного вида и на переходах явно говорится, фишки каких видов в каких позициях требуются на переходе

Разные виды фишек можно воспринимать как раскрашенные в разные цвета из заранее заданного множества цветов C, или, более точно, фишки являются цветами

Переходы для раскрашенных фишек тогда могут быть устроены так:



Переход t_1 удаляет одну синюю и фишку из левой позиции и одну зелёную из правой и добавляет одну зелёную фишку в нижнюю позицию

Переход t_2 удаляет одну синюю фишку из правой позиции

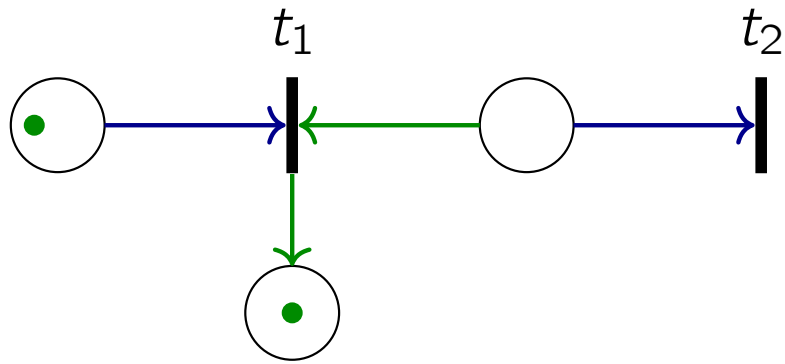
Раскрашенные сети Петри

Фишки обыкновенной сети Петри неотличимы друг от друга, и поведение сети определяется только их количеством в каждой позиции

Но можно представить себе, что в одной позиции могут находиться фишки разного вида и на переходах явно говорится, фишки каких видов в каких позициях требуются на переходе

Разные виды фишек можно воспринимать как раскрашенные в разные цвета из заранее заданного множества цветов C, или, более точно, фишки являются цветами

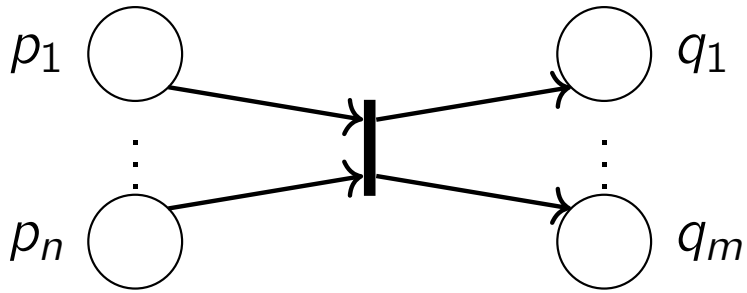
Переходы для раскрашенных фишек тогда могут быть устроены так:



Переход t_1 удаляет одну синюю и фишку из левой позиции и одну зелёную из правой и добавляет одну зелёную фишку в нижнюю позицию

Переход t_2 удаляет одну синюю фишку из правой позиции

Раскрашенные сети Петри



Цветов может быть и бесконечно много, как и способов преобразования их переходами

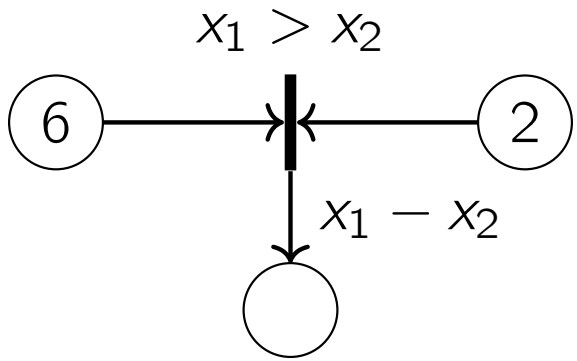
Если позиции ${}^\bullet t$ и $t^\bullet$ упорядочены ($p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$), то переход, при срабатывании

- удаляющий наборы фишек, являющиеся элементами множества $\Phi \subseteq C^n$, то есть предиката $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ над C, и
- для удалённого набора $(x_1, \ldots, x_n)$ кладущий в q_i фишку $f_i(x_1, \ldots, x_n)$

можно пометить множеством Φ и набором функций $(f_1, \ldots, f_m)$

Раскрашенные сети Петри

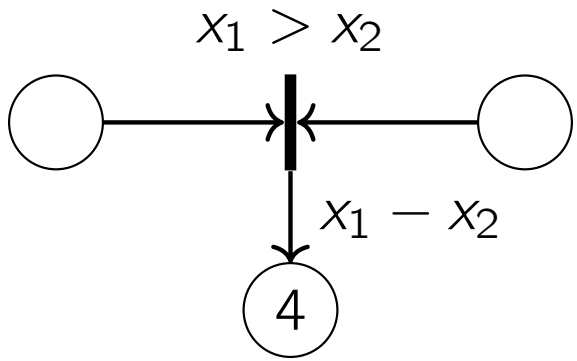
Пример:



Для размышлений: можете попробовать показать, что если множество цветов конечно, то раскрашенная сеть Петри моделируется обыкновенной

Раскрашенные сети Петри

Пример:



Для размышлений: можете попробовать показать, что если множество цветов конечно, то раскрашенная сеть Петри моделируется обыкновенной