# Инверсная сложность булевых функций

Шуплецов М.С.

# План семинара

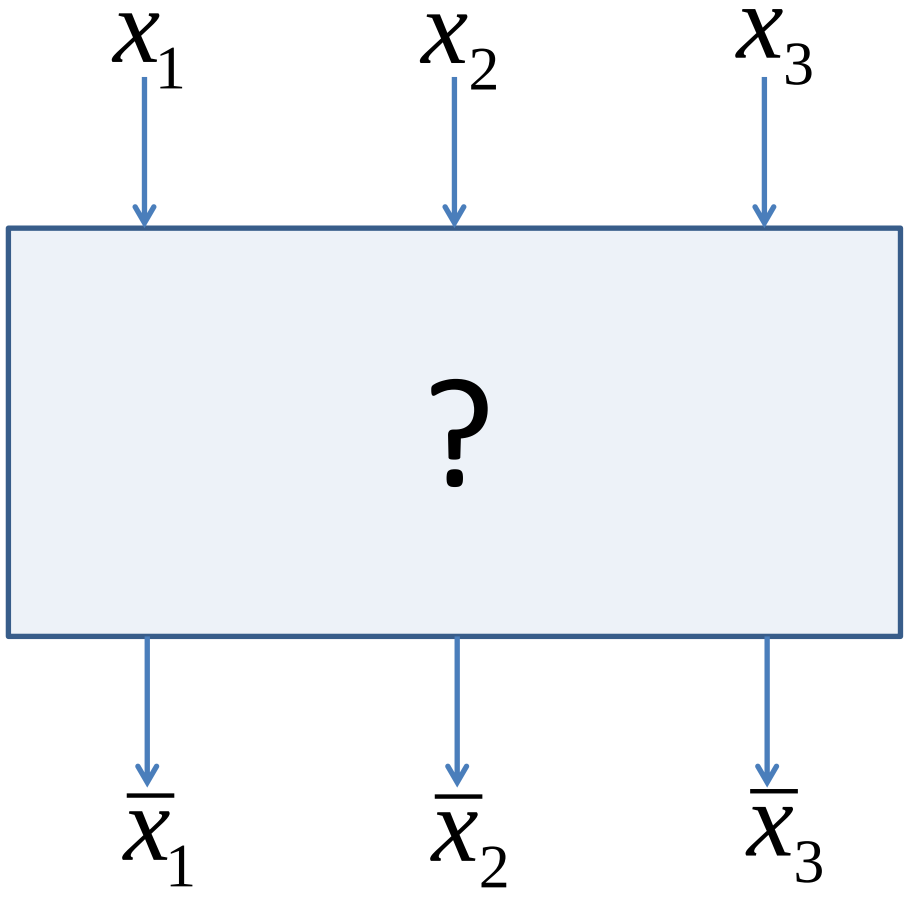
- Инверсная сложность
- «Три отрицания»
- Теорема Маркова
- Теорема Нечипорука

# Инверсная сложность

- Рассматриваются формулы и схемы из функциональных элементов(СФЭ) в базисе $B_0 = \{\vee, \wedge, \neg\}$.

- Инверсной сложностью $L_{\neg}^{\Phi}(f)$ ( $L_{\neg}^{C}(F)$ ) булевой функции $f$ (системы булевых функций $F$ ) называется минимальное число элементов отрицания, достаточное для реализации $f$ ( $F$ ) формулой (СФЭ) в базисе $B_0$ .

# «Три отрицания»



# Симметрические функции

- $s_n^i = s_n^i(x_1,\ldots,x_n)$ - симметрическая функция с рабочим числом $\boldsymbol{i}$, если
$$s_n^i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1 \Leftrightarrow \alpha_1+\ldots+\alpha_n=i$$

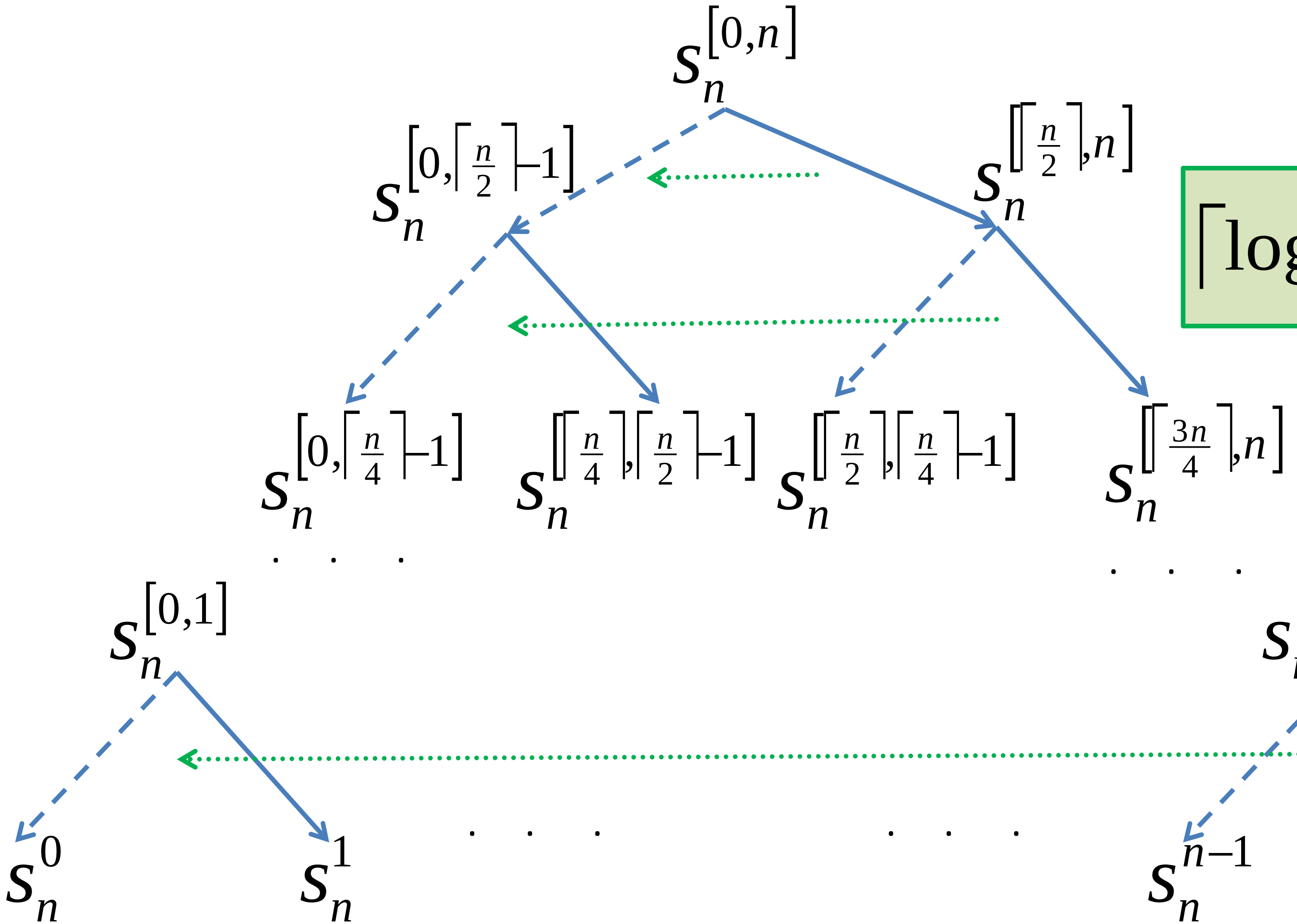
- $s_n^{[i,j]} = \bigvee_{k=i}^{j} s_n^k(x_1,\ldots,x_n)$

- $s_n^{\{i_1,\ldots,i_t\}} = \bigvee_{k\in\{i_1,\ldots,i_t\}} s_n^k(x_1,\ldots,x_n)$

# Симметрические функции трех переменных

- Как реализовать все симметрические функции трех переменных, используя два отрицания?
- $s_3^{[0,3]}, s_3^{[1,3]}, s_3^{[2,3]}, s_3^{3}$ - монотонные функции
- $s_3^{[0,1]} = \overline{s_3^{[2,3]}} \Rightarrow s_3^{1} = s_3^{[0,1]} \wedge s_3^{[1,3]}$
- $s_3^{\{0,2\}} = \overline{s_3^{1} \vee s_3^{3}} \Rightarrow s_3^{0} = s_3^{[0,1]} \wedge s_3^{\{0,2\}}, s_3^{2} = s_3^{[2,3]} \wedge s_3^{\{0,2\}}$

# Общий случай




$$\boxed{\lceil \log(n+1) \rceil}$$

# Разложение по симметрическим функциям

- $f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{i=0}^{n} s_n^i \cdot m_i(x_1,\dots,x_n)$ , где $m_i$ - монотонные функции.

- $L_{\neg}^{C}(\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n\})\le\lceil\log(n+1)\rceil$

- $\forall F=(f_1,\dots,f_m): L_{\neg}^{C}(F)\le\lceil\log(n+1)\rceil$ , где $f_i$ - функция от $n$ переменных.

# Цепи в булевом кубе и инверсные наборы

- Кортеж $C=(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_i$ – набор куба $B^n$ с $i$ единицами, называется цепью в $B^n$, если
$$\forall i, i=\overline{0,n-1}: \alpha_i < \alpha_{i+1}$$
- Набор $\alpha_i \in C$ называется $\sigma$-инверсным набором булевой функции $f$ на цепи $C$, если $f(\alpha_i)=\sigma$ и $f(\alpha_{i+1})=\overline{\sigma}$ .
- $A_C^{(\sigma)}(f)=\{\alpha_i \in C: f(\alpha_i)=\sigma, f(\alpha_{i+1})=\overline{\sigma}\}$ – множество $\sigma$-инверсных наборов булевой функции $f$ на цепи $C$.
- $A_C^{(\sigma)}(F)=\bigcup_{j=1}^{m} A_C^{(\sigma)}(f_j)$ аналогичное множество для системы булевых функций $F$ .
- $a(f)=\max_C \left|A_C^{(1)}(f)\right|$ $a(F)=\max_C \left|A_C^{(1)}(F)\right|$

# Теоремы Маркова и Нечипорука

- Теорема (Марков А.А., 1957) Для любой системы булевых функций $F$ выполнено равенство
$$L_{\neg}^{C}(F)=\lceil\log(a(F)+1)\rceil$$
- Теорема (Нечипорук Э.И.,1962) Для любой булевой функции $f$ выполнено равенство
$$L_{\neg}^{\Phi}(f)=a(f)$$