Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 7

Логика предикатов:
можно ли проверить
общезначимость формулы «в лоб»?

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Для логики высказываний существует очень простой способ проверки общезначимости формул «в лоб»:

- Вспомнить, что общезначимость формулы в этой логике — это то же самое, что равенство константе 1 в булевой алгебре
- **Перебрать** все наборы значений булевых переменных формулы и для каждого проверить, принимает ли реализуемая функция значение 0
- Если найден хотя бы один такой набор, то формула необщезначима; иначе формула общезначима

А можно ли адаптировать этот метод проверки общезначимости к логике предикатов?

«Перебрать все наборы значений булевых переменных формулы» — в ЛВ это «Перебрать все интерпретации формулы»

«Реализуемая функция принимает значение 0» — в ЛВ это «Формула не выполняется в интерпретации»

Значит, прямое обобщение «лобового» способа проверки общезначимости формулы φ на логику предикатов выглядит так:

- Перебрать всевозможные интерпретации
- Для каждой (очередной) интерпретации $\mathcal{I}$ проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$
- Если обнаружена интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \not\models \varphi$, то формула необщезначима
- Если все интерпретации перебраны и для каждой показано соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$, то формула общезначима

Но всё не так просто:

- Как задать интерпретацию с бесконечной предметной областью?
- Как проверить истинность формулы в такой интерпретации?
- Как перебрать «ужасно»-бесконечное число интерпретаций?

Если бы можно было ограничиться только **конечными** интерпретациями, то проблем бы было намного меньше, но ...

Утверждение. Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{x})\ \&\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

- Предметная область — множество всех натуральных чисел
- $\overline{R}(a,b) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

Тогда:

- $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{x})$, т.к. никакое число не меньше себя
- $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z}))$,
  т.к. если $a < b$ и $b < c$, то обязательно $a < c$
- $\mathcal{I} \not\models \exists \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})$,
  т.к. среди натуральных чисел не существует максимального

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \varphi$, и предложение φ **необщезначимо**

Утверждение. Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\ \neg R(x,x) \mathbin{\&} \forall x\ \forall y\ \forall z\ (R(x,y) \mathbin{\&} R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\ \forall y\ \neg R(x,y)$$

Общее истолкование этой формулы, не зависящее от оценки символа R, можно почерпнуть из теории порядков:

- $\forall x\ \neg R(x,x)$: отношение R антирефлексивно
- $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (R(x,y) \mathbin{\&} R(y,z) \to R(x,z))$: отношение R транзитивно
- $\exists x\ \forall y\ \neg R(x,y)$: существует предмет, максимальный относительно R

Если отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует предмет, максимальный относительно R

Иными словами,

Если R — отношение строгого частичного порядка, то существует предмет, максимальный относительно R

Утверждение. **Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью**

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x \, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x \, \forall y \, \forall z \, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x \, \forall y \, \neg R(x,y)$$

Если R — отношение строгого частичного порядка, то существует предмет, максимальный относительно R

Как известно (?), в любом **конечном** частично упорядоченном множестве существует максимальный элемент

(А если не известно, то легко доказывается по индукции или получается из более общего утверждения — **леммы Цорна**) ▼

Утверждение. **Существует необщезначимое предложение, истинное в любой интерпретации с конечной предметной областью**

Проверить общезначимость формулы ЛП при помощи полного перебора интерпретаций оказывается крайне затруднительно:

- Интерпретаций бесконечно много
- Перебирать бесконечные интерпретации проблематично
- Ограничить перебор только конечными интерпретациями невозможно

Чтобы научиться решать эту задачу,
придётся изучить более нетривиальные методы,
и прежде всего изучим самый *идеологически простой* и *универсальный*:

метод семантических таблиц