Лекция 2. Точки сочленения и мосты. Связность, k-связность. Двусвязные графы. Компоненты двусвязности (блоки) графа. Дерево блоков и точек сочленения графа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Точки сочленения и мосты

Вершина v графа $G = (V, E)$ называется **точкой сочленения**, или **разделяющей вершиной**, если граф $G - v$ содержит больше компонент связности, чем граф G.

Связный непустой граф без точек сочленения называется **неразделимым** графом, или **блоком**.

Ребро e графа $G = (V, E)$ называется **мостом**, если граф $G - e$ содержит больше компонент связности, чем граф G.

Ясно, что концевая вершина моста в графе (если ее степень не меньше двух) является точкой сочленения этого графа.

Свойства точек сочленения

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $v \in V$. Тогда следующие утверждения равносильны:*
1) v — точка сочленения;
2) найдутся такие вершины $u, w \in V$, $u \neq v$, $w \neq v$, что вершина v принадлежит любой простой (u, w)-цепи;
3) существует разбиение иножества $V \setminus \{v\}$ на такие части U, W, что для любых вершин $u \in U$, $w \in W$ вершина v принадлежит любой простой (u, w)-цепи.

Свойства точек сочленения

Доказательство.
$1 \Rightarrow 3$. Т. к. v — точка сочленения, граф $G - v$ — не связен, т. е. содержит по меньшей мере две компоненты связности. Положим U — все вершины одной из этих компонент связности, $W = V \setminus (U \cup \{v\})$. Тогда любые вершины $u \in U$, $w \in W$ лежат в разных компонентах связности графа $G - v$. Значит, любая простая (u, w)-цепь проходит через вершину v.

$3 \Rightarrow 2$, т. к. свойство 2 является частным случаем свойства 3.

$2 \Rightarrow 1$. Если вершина v принадлежит любой простой цепи из вершины u в вершину w, то граф $G - v$ — не связен. Значит, v — точка сочленения.

$\square$

Свойства мостов

Теорема 2. *Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $e \in E$. Тогда следующие утверждения равносильны:*
1) *e — мост;*
2) *e не принадлежит ни одному простому циклу графа G;*
3) *найдутся такие вершины $u, w \in V$, что ребро e принадлежит любой простой (u, w)-цепи;*
4) *существует разбиение иножества V на такие части U, W, что для любых вершин $u \in U$, $w \in W$ ребро e принадлежит любой простой (u, w)-цепи.*

k-связность

Граф $G = (V, E)$ называется k-**связным**, если он содержит не менее k вершин и при удалениии из него не более $(k-1)$ любых вершин остается связный граф.

Двусвязный граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Граф $G = (V, E)$ называется **реберно** k-**связным**, если при удалениии из него не более $(k-1)$ любых ребер остается связный граф.

Задача о надежной связной сети

Сеть с p узлами и соединениями между ними — связна, если из каждого узла можно достигнуть любой другой узел (возможно, проходя через промежуточные узлы). Требуется построить такую сеть, что при выходе из строя любых k узлов (или любых k соединений) она останется связной.

Свойства двусвязных графов

Теорема 3. *Пусть* $G = (V, E)$ *— связный граф,* $|V| \geqslant 3$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*
1) *граф* G *— двусвязен;*
2) *любые две вершины* $v, w \in V$ *принадлежат какому-то простому циклу;*
3) *любая вершина* $v \in V$ *и любое ребро* $e \in E$ *принадлежат некоторому простому циклу;*
4) *любые два ребра* $e_1, e_2 \in E$ *принадлежат какому-то простому циклу;*
5) *для любых двух вершин* $u, w \in V$ *и любого ребра* $e \in E$ *в графе* G *найдется простая* (u, w)*-цепь, проходящая через ребро* e*;*
6) *для любых трех вершин* $u, v, w \in V$ *в графе* G *найдется простая* (u, w)*-цепь, проходящая через вершину* v*;*
7) *для любых трех вершин* $u, v, w \in V$ *в графе* G *найдется простая* (u, w)*-цепь, не проходящая через вершину* v*.*

G — двусвязен $\Rightarrow$ простой цикл с v, w

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.
Пусть C_0 — простой цикл, содержащий вершину v.
Если C_0 содержит вершину w, то он искомый.

G — двусвязен $\Rightarrow$ простой цикл с v, w

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.
Иначе выберем на C_0 такую вершину $u \in V$, $u \neq v$, что простая (u, w)-цепь P_0 пересекается с C_0 только по вершине u.
Т. к. u — не точка сочленения, найдется простая (v, w)-цепь Q, не проходящая через вершину u.
Пусть v_1 — первая вершина, принадлежащая циклу C_0, при движении по цепи Q от вершины w к вершине v и Q_0 — соответствующая простая (w, v_1)-цепь.
Пусть R_1 — часть цикла C_0 от вершины v до вершины v_1, не содержащая вершину u, и R_2 — часть цикла C_0 от вершины v до вершины u, не содержащая вершину v_1.

G — двусвязен $\Rightarrow$ простой цикл с v, w

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.
Пусть u_1 — первая вершина, принадлежащая цепи P_0, при движении по цепи Q_0 от вершины v_1 к вершине w и Q_1 — соответствующая простая (v_1, u_1)-цепь.
Пусть R_3 и P_1 — соответственно (u, u_1) и (u_1, w) части цепи P_0.
Отметим, что длина простой цепи P_1 меньше длины простой цепи P_0.
Рассмотрим простой цикл $C_1 = vR_1v_1Q_1u_1R_3uR_2v$.
Повторим рассуждения для простого цикла C_1, вершины u_1 и простой цепи P_1.
Через конечное число шагов получим простой цикл, проходящий через вершины v, w.

простой цикл с $v, w \Rightarrow$ простой цикл с v, e

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$.
Пусть $e = (u, w)$. Тогда найдется простой цикл C_1, содержащий v, u.

Если вершина w лежит на цикле C_1, то пусть P_1 — простая (u, w)-цепь, образованная частью цикла C_1 от вершины v_1 к вершине u, содержащей вершину v.
Тогда искомый цикл $C = uP_1w(w, u)u$.

Если вершина w не лежит на цикле C_1, то найдем простой цикл C_2, содержащий вершины v, w. Пусть v_1 — первая вершина на цикле C_1 при движении от вершины w к вершине v по циклу C_2 и P_2 — соответствующая простая (w, v_1)-цепь.
Пусть P_3 — простая (v_1, u)-цепь, образованная частью цикла C_1 от вершины v_1 к вершине u, содержащей вершину v.
Тогда искомый цикл $C = u(u, w)wP_2v_1P_3u$.

простой цикл с v, e $\Rightarrow$ простой цикл с e_1, e_2

Доказательство. $3 \Rightarrow 4$.
Доказывается, как предыдущий случай.

простой цикл с $e_1, e_2 \Rightarrow$ простая (u, w)-цепь с e

Доказательство. $4 \Rightarrow 5$.
Пусть $e_1 = (u, v_1) \in E$, $e_2 = (w, v_2) \in E$. Тогда найдутся простой цикл C_1, содержащий ребра e_1, e, и простой цикл C_2, содержащий ребра e_2, e.
Пусть u_1 — первая вершина, принадлежащая циклу C_2, при движении от вершины u по циклу C_1 и P_1 — соответствующая простая (u, u_1)-цепь.
Пусть P_2 — простая (u_1, w)- цепь, образованная частью цикла C_2, содержащей ребро e.
Тогда искомая простая цепь $C = uP_1u_1P_2w$.

простая (u, w)-цепь с $e \Rightarrow$ простая (u, w)-цепь с v

Доказательство. $5 \Rightarrow 6$.
Пусть $e = (v, v_1) \in E$.
Тогда искомая простая цепь — простая (u, w)-цепь, проходящая через ребро e.

простая (u, w)-цепь с $v \Rightarrow$ простая (u, w)-цепь без v

Доказательство. $6 \Rightarrow 7$.
Рассмотрим простую (v, w)-цепь P, проходящую через вершину u.
Тогда искомая простая цепь — часть цепи P от вершины u до вершины w.

простая (u, w)-цепь без $v \Rightarrow G$ — двусвязен

Доказательство. $7 \Rightarrow 1$.
Если для каких-то вершин $u, v, w \in V$ каждая простая (u, w)-цепь проходит через вершину v, то v — точка сочленения, чего не может быть.

$\square$

Свойства графов без мостов

Теорема 4. *Пусть* $G = (V, E)$ *— связный граф,* $|V| \geqslant 3$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*
1) *в графе* G *нет мостов;*
2) *любые две вершины* $v, w \in V$ *принадлежат какому-то циклу;*
3) *любая вершина* $v \in V$ *и любое ребро* $e \in E$ *принадлежат некоторому циклу;*
4) *любые два ребра* $e_1, e_2 \in E$ *принадлежат какому-то циклу;*
5) *для любых двух вершин* $u, w \in V$ *и любого ребра* $e \in E$ *в графе* G *найдется* (u, w)*-цепь, проходящая через ребро* e*;*
6) *для любых двух вершин* $u, w \in V$ *и любого ребра* $e \in E$ *в графе* G *найдется* (u, w)*-цепь, не проходящая через ребро* e*;*
7) *для любых трех вершин* $u, v, w \in V$ *в графе* G *найдется* (u, w)*-цепь, проходящая через вершину* v.

Компоненты двусвязности

Максимальный (по включению) двусвязный подграф связного графа $G = (V, E)$ называется его **компонентой двусвязности**, или **блоком**.

Каждая компонента двусвязности связного графа либо содержит не менее трех вершин, либо совпадает с графом K_2, либо совпадает с графом K_1 (если исходный граф совпадает с K_1).

Если граф G — двусвязный, то он является своей единственной компонентой двусвязности.

Компоненты двусвязности

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф. Рассмотрим отношение $R \subseteq E^2$ на множестве его ребер E: если $e_1, e_2 \in E$, то $R(e_1, e_2)$ в том случае, когда либо $e_1 = e_2$, либо в графе G найдется простой цикл, содержащий ребра e_1 и e_2.

Несложно проверить, что R — отношение эквивалентности на множестве ребер E.

Пусть $E_1, \ldots, E_s \subseteq E$ — все классы эквивалентности множества E по отношению R, и $V_1, \ldots, V_s \subseteq V$ — множества вершин из V, являющихся концами ребер соответственно из этих множеств.

Тогда $B_i = (V_i, E_i)$ — компонента двусвязности графа G, $i = 1, \ldots, s$, и $B_1, \ldots, B_s$ — все его компоненты двусвязности.

Свойства компонент двусвязности

Предложение 1. *Пусть* $G = (V, E)$ *— связный граф. Тогда*
1) *если компонента двусвязности* B *графа* G *содержит вершины* u, w*, то она содержит и любую простую* (u, w)*-цепь графа* G;
2) *если компонента двусвязности* B *графа* G *содержит вершины* u, w*, то она содержит и любой простой цикл, проходящий через вершины* u, w *в графе* G;
3) *любые две компоненты двусвязности* B_1, B_2 *графа* G *имеют не более одной общей вершины, и если общая вершина есть, то она является точкой сочленения в графе* G.

Свойства компонент двусвязности

Доказательство. 1. Пусть P — простая (u, w)-цепь в графе G.

Вершины u, w принадлежат компоненте двусвязности B графа G. Поэтому для некоторых ребер $e_1 = (u, v_1)$ и $e_2 = (w, v_2)$ в графе G найдется цикл C, содержащий e_1, e_2.

Пусть P_1 — часть цикла C от вершины u по ребру e_1 до первой вершины u_1, принадлежащей цепи P.

Пусть P_2 — часть цепи P от вершины u_1 до вершины u.

Тогда $C_1 = uP_1v_1P_2u$ — простой цикл в графе G, содержащий ребро e_1.

Значит, все ребра цепи P_2 принадлежат компоненте двусвязности B.

Далее повторяем рассуждения для простой (u_1, w)-цепи, состоящей из части цепи P от вершины u_1 до вершины w.

Свойства компонент двусвязности

Доказательство. 2. Следует из п. 1, т. к. каждый простой цикл, проходящий через вершины u, w, разбивается на две простые (u, w)-цепи.

Свойства компонент двусвязности

Доказательство. 3. Пусть u, w — две общие вершины компонент двусвязности B_1, B_2. Рассмотрим произвольную вершину v компоненты B_1.

Граф B_1 — двусвязный, поэтому в нем найдется простая (u, w)-цепь P, проходящая через вершину v.

Вершины u, w принадлежат компоненте двусвязности B_2, поэтому ей принадлежит и любая простая (u, w)-цепь, в том числе и цепь P.

Значит, вершина v принадлежит компоненте B_2.

В обратную сторону аналогично.

Следовательно, компоненты B_1 и B_2 совпадают.

Свойства компонент двусвязности

Доказательство.
Если v — единственная общая точка компонент двусвязности B_1, B_2, то рассмотрим произвольное ребро $e_1 = (v, u_1)$ в B_1 и произвольное ребро $e_2 = (v, u_2)$ в B_2.

Если в графе $G - v$ вершины u_1, u_2 находятся в одной компоненте связности, то в $G - v$ найдется простая (u_1, u_2)-цепь P.

Значит, в графе G найдется простой цикл $C = ve_1u_1Pu_2e_2v$, т. е. ребра e_1, e_2 принадлежат одной компоненте двусвязности графа G, что не так.

Поэтому в графе $G - v$ вершины u_1, u_2 находятся в разных компонентах связности, т. е. $G - v$ — несвязный граф.

Значит, вершина v — точка сочленения. $\square$

Граф блоков и точек сочленения

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф, B_G, C_G — соответственно множества его блоков (компонент двусвязности) и точек сочленения.

Тогда двудольный граф

$$BC(G) = (V', E'),$$

где $V' = B_G \cup C_G$ и $(b, c) \in E'$, $b \in B_G$, $c \in C_G$, если блок b содержит точку сочленения c, называется его **графом блоков и точек сочленения**.

Граф блоков и точек сочленения

Теорема 5. *Для каждого связного графа $G = (V, E)$ его граф $BC(G)$ блоков и точек сочленения является деревом, в котором висячими вершинами являются только блоки.*

Граф блоков и точек сочленения

Доказательство. 1. Сначала покажем от обратного, что в графе $BC(G)$ отсутствуют циклы. Пусть в графе $BC(G)$ найдется простой цикл

$$C' = c_1, b_1, c_2, b_2, \dots, c_m, b_m, c_1,$$

где $b_1, \dots, b_m \in B_G$, $c_1, \dots, c_m \in C_G$. Тогда в каждом блоке b_i, $i = 1, \dots, m$, выделим простую (c_i, c_{i+1})-цепь P_i. Получим простой цикл в графе G:

$$C = c_1 P_1 c_2 P_2 \dots c_m P_m c_1.$$

Значит, вершины $c_1, \dots, c_m$ принадлежат одной компоненте двусвязности графа G, т. е. $m = 1$.

Граф блоков и точек сочленения

Доказательство. 2. Граф $BC(G)$ является связным, т. к. граф G является связным.

3. Теперь покажем, что любая вершина $c \in C_G$ не может быть висячей в графе $BC(G)$. Если $c \in C_G$, то граф $G - c$ — не связный. Значит, найдутся вершины $u, w \in V$, принадлежащие разным компонентам связности графа $G - c$, а значит, разным компонентам двусвязности графа G.

Поэтому в графе $BC(G)$ вершина c смежна по меньшей мере с двумя вершинами, т. е. не является висячей.

$\square$

Дерево блоков и точек сочленения

Дерево блоков и точек сочленения $BC(G)$ связного графа G называется его *bc*-**деревом**.

Каждая висячая вершина дерева $BC(G)$ является блоком (т. е. компонентой двусвязности) связного графа G.

Компонента двусвязности графа G, являющаяся висячей вершиной в дереве $BC(G)$, называется **висячим**, или **концевым блоком** графа G.

Каждый связный граф хотя бы с двумя компонентами двусвязности содержит не менее двух висячих блоков.

Краткий итог лекции

1. Двусвязность — желательное свойство графов. Если связный граф не является двусвязным, то в нем можно выделить компоненты двусвязности (блоки) и точки сочленения. Любые два блока графа содержат не более одной общей вершины, являющейся точкой сочленения.

2. Граф блоков и точек сочленения $BC(G)$ связного графа G является деревом.

3. В любом связном графе все компоненты двусвязности и точки сочленения (а значит, и его bc-дерево) можно найти быстрым (полиномиальным) алгоритмом (поиском в глубину в графе).

Задачи

1. Найти число неизоморфных неразделимых графов $G = (V, E)$, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 5$;
4) $|E| = 6$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

3. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ без мостов, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 5$;
4) $|E| = 6$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

Задачи

3. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ без мостов, если:

1) $|V| = 5$ и в G хотя бы одна точка сочленения;
2) $|V| = 6$ и в G хотя бы одна точка сочленения;
3) $|V| = 7$ и в G ровно одна точка сочленения;
4) $|V| = 8$ и в G ровно одна точка сочленения.

Изобразить эти неизоморфные графы.

4. Найти все блоки, точки сочленения и мосты в графе $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \ldots, 10\}$, при этом граф G содержит ребро $(7, 8) \in E$ и еще циклы $C_1 = 1, 2, 3, 1$, $C_2 = 3, 4, 5, 3$, $C_3 = 3, 6, 7, 3$, $C_4 = 8, 9, 10$. Найти дерево $BC(G)$ и висячие блоки графа G.

Задачи

5. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа G, чтобы оставшийся граф
а) содержал точку сочленения; б) содержал мост, если
1) $G = K_4$;
2) $G = K_5$.

6. Доказать теорему 2.

7. Обосновать переход $3 \Rightarrow 4$ в теореме 3.

8. Доказать теорему 4.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 133–134, 137–141, 327–334.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 41–44, 53–54.

3. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. С. 101–105.