

Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 7

Общая схема метода резолюций
Предварённая нормальная форма
Сколемовская стандартная форма
Системы дизъюнктов
Задача унификации

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Напоминание

Проблему общезначимости формул логики предикатов

$$\models \varphi?$$

можно до некоторой степени решить с помощью
метода семантических таблиц

Но этот метод оказался **неэффективным**:

- ▶ приходится перебирать много формул
- ▶ и подставлять много термов

На ближайших лекциях будет обсуждаться более эффективный метод проверки общезначимости формул логики предикатов:

метод резолюций

Общая схема метода резолюций

$$\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)?$$

Этап 1: $\varphi(\tilde{x}^n) \rightsquigarrow \psi = \neg \forall \tilde{x}^n \varphi(\tilde{x}^n)$

$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi$ (это очевидно?)
 $\dots \rightsquigarrow \neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$

Этап 2: $\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf}$ — предварённая нормальная форма (ПНФ)
 $\psi \sim \psi_{pnf}$ $\dots \rightsquigarrow \forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$

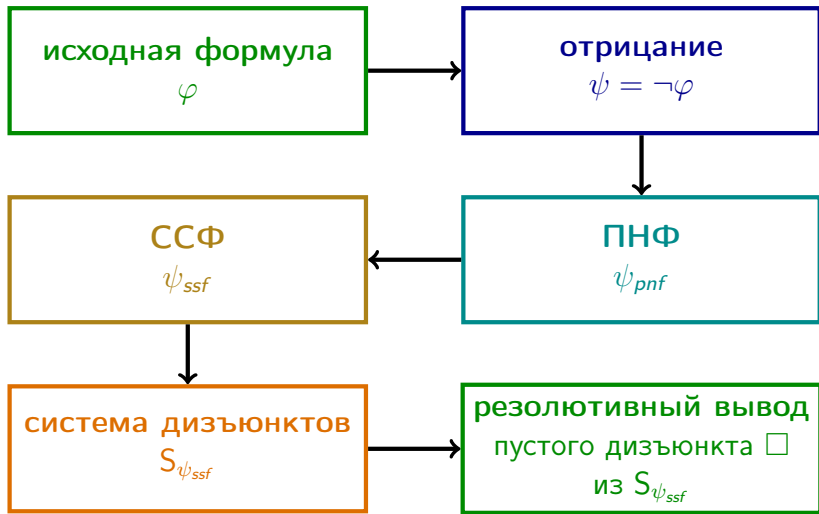
Этап 3: $\psi_{pnf} \rightsquigarrow \psi_{ssf}$ — сколемовская стандартная форма (ССФ)
 $\not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf}$ (но в общем случае $\psi_{pnf} \not\sim \psi_{ssf}$)
 $\dots \rightsquigarrow \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$

Этап 4: $\psi_{ssf} \rightsquigarrow S_{\psi_{ssf}}$ — система дизъюнктов
 $\not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$ $\dots \rightsquigarrow \{P(x), \neg P(f(x)) \vee R(x, g(x)), \neg R(x, u)\}$

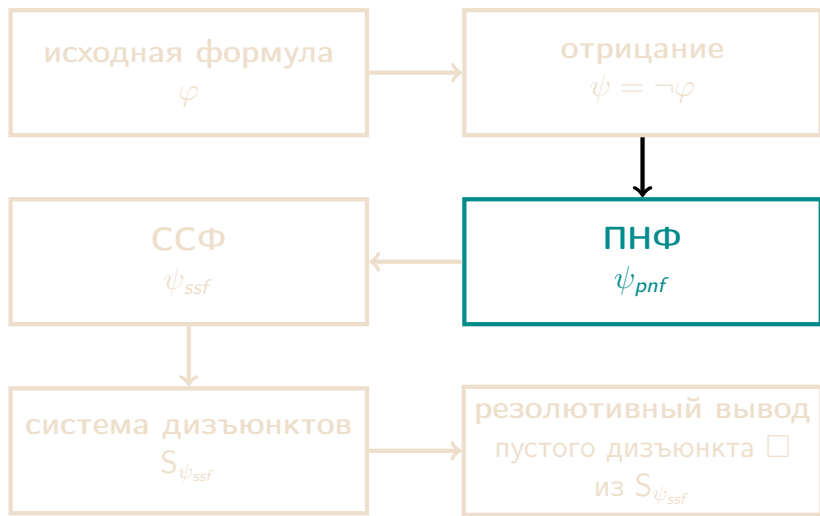
Этап 5: резолютивный вывод противоречия из $S_{\psi_{ssf}}$
 $\not\models S_{\psi_{ssf}} \Leftrightarrow$ из $S_{\psi_{ssf}}$ выводим противоречивый дизъюнкт \square
$$\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x)) \quad P(x') \rightarrow R(x, g(x)) \quad \neg R(x', u') \rightarrow \square$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\{x'/f(x)\}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\{x'/x, u'/f(x)\}}$

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 x_1 \dots Q_n x_n}_{\text{кванторная приставка}} \underbrace{(D_1 \& \dots \& D_k)}_{\text{матрица}}, \text{ где}$$

- ▶ $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- ▶ матрица — это бескванторная формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
 - ▶ $D_i = L_1^i \vee \dots \vee L_{m_i}^i$ — множитель
 - ▶ L_j^i — литерa: атом или его отрицание

Наряду с “находится в ПНФ” будем говорить “является ПНФ”

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x \exists y \exists z \forall u (P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- ▶ кванторная приставка: $\forall x \exists y \exists z \forall u$
- ▶ матрица: $P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z))$
 - ▶ множители: $P(x), \neg R(x, u), \neg P(y) \vee R(x, z)$
 - ▶ литеры: $P(x), \neg R(x, u), \neg P(y), R(x, z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

Опишем общую схему приведения произвольной замкнутой формулы φ к ПНФ φ_{pnf} (с помощью равносильных преобразований и *теоремы о равносильной замене*) и проиллюстрируем эту схему на примере:

$$\varphi = \neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

1. Переименование переменных

Используя равносильности $\forall x \varphi \sim \forall y \varphi \{x/y\}$, переименуем переменные, связанные кванторами, так, чтобы кванторами связывались попарно различные переменные

$$\begin{aligned} \neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) &\rightarrow \exists y R(x, y)) \\ &\sim \\ \neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y))) &\rightarrow \exists y R(x, y)) \\ &\sim \\ \neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y))) &\rightarrow \exists u R(x, u)) \end{aligned}$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

2. Удаление импликаций

Используя равносильность $\psi \rightarrow \chi \sim \neg\psi \vee \chi$, удалим из формулы все импликации

$$\begin{aligned} & \neg\exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u)) \\ & \sim \\ & \neg\exists x (P(x) \& (\neg\forall z P(z) \vee \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists u R(x, u)) \\ & \sim \\ & \neg\exists x (\neg(P(x) \& (\neg\forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u)) \end{aligned}$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

3. Продвижение отрицаний

Используя равносильности $\neg(\psi \& \chi) \sim \neg\psi \vee \neg\chi$, $\neg\exists x \varphi \sim \forall x \neg\varphi$ и $\neg\neg\psi \sim \psi$, преобразуем формулу так, чтобы отрицания стояли только над атомами

$$\begin{aligned}
& \neg\exists x (\neg(P(x) \& (\neg\forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u)) \\
& \forall x \neg(\neg(P(x) \& (\neg\forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u)) \\
& \forall x (\neg\neg(P(x) \& (\neg\forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \& \neg\exists u R(x, u)) \\
& \forall x (P(x) \& (\neg\forall z P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \neg\exists u R(x, u)) \\
& \forall x (P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))
\end{aligned}$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

4. Вынесение кванторов

Используя равносильности $\forall x \varphi \& \psi \sim \forall x (\varphi \& \psi)$ и $\varphi \& \psi \sim \psi \& \varphi$, преобразуем формулу так, чтобы все кванторы расположились “снаружи” (были собраны в *кванторную приставку*)

$$\begin{aligned} & \forall x (P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u)) \\ & \quad \sim \\ & \forall x (P(x) \& \exists z (\neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u)) \\ & \quad \sim \\ & \forall x (\exists z (P(x) \& (\neg P(z) \vee \exists y R(x, y))) \& \forall u \neg R(x, u)) \\ & \quad \sim \\ & \forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u)) \end{aligned}$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

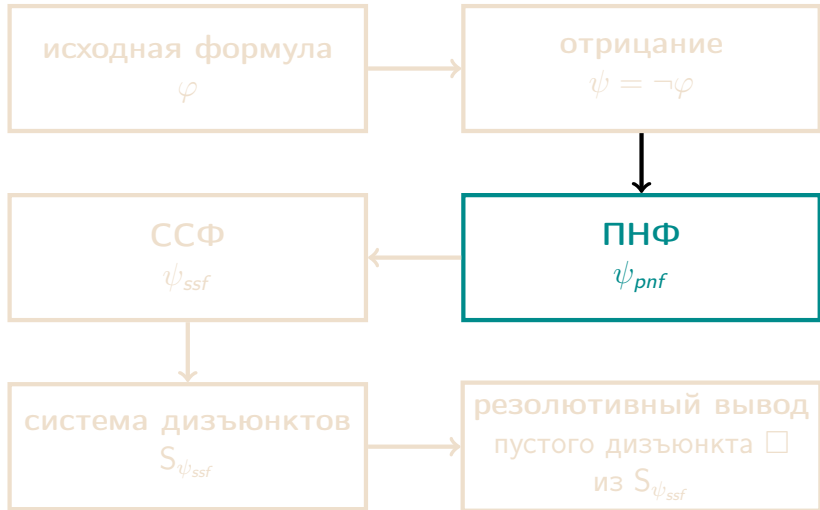
5. Получение КНФ

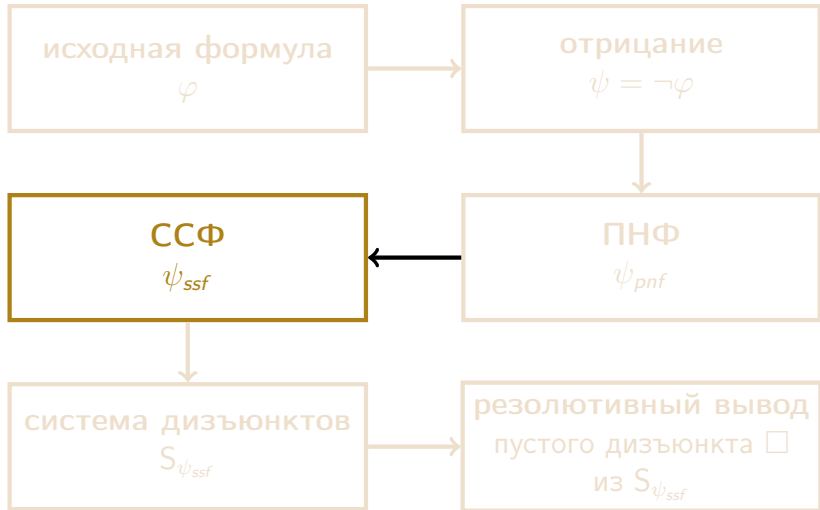
Используя законы булевой алгебры, преобразуем формулу так, чтобы бескванторная часть формулы представляла собой КНФ

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

В рассматриваемом примере никакие преобразования не нужны, а методы построения КНФ по произвольной (булевой) формуле изучались вами ранее в других курсах

Итог: после применения обозначенных равносильностей согласно обозначенной схеме произвольная замкнутая формула φ становится ПНФ ▼





Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула находится в
сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- ▶ она находится в предварённой нормальной форме и
- ▶ её кванторная приставка не содержит кванторов \exists :

$$\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

Например, формула

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с “находится в ССФ” будем говорить “является ССФ”

Один из этапов метода резолюций —
сведение ПНФ к настолько же (не)выполнимой ССФ

Сколемовская стандартная форма

Лемма (об удалении квантора существования). Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ \mathbf{f} не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi \{x_{n+1}/\mathbf{f}(\tilde{x}^n)\})$$

Доказательство (леммы).

(\Leftarrow): Пусть \mathcal{I} — модель для формулы $\psi = \forall \tilde{x}^n (\chi \{x_{n+1}/\mathbf{f}(\tilde{x}^n)\})$

Тогда для любого набора предметов \tilde{d}^n верно:

$$\mathcal{I} \models \chi \{x_{n+1}/\mathbf{f}(\tilde{x}^n)\} [\tilde{d}^n]$$

Рассмотрим предмет $d_{n+1} = \bar{\mathbf{f}}(\tilde{d}^n)$

Будет верно следующее: $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, d_{n+1}]$

Значит, $\mathcal{I} \models (\exists x_{n+1} \chi)[\tilde{d}^n]$, и $\mathcal{I} \models \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$

Сколемовская стандартная форма

Лемма (об удалении квантора существования). Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ \mathbf{f} не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi \{x_{n+1}/\mathbf{f}(\tilde{x}^n)\})$$

Доказательство (леммы).

(\Rightarrow): Пусть \mathcal{I} — модель для φ

Тогда для любого набора предметов \tilde{d}^n существует предмет d_{n+1} , такой что $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, d_{n+1}]$

По \mathcal{I} построим **новую** интерпретацию \mathcal{J} :

если в сигнатуре был функциональный символ \mathbf{f} , удалим его добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$

оценим \mathbf{f} так, чтобы выполнялось: $\bar{\mathbf{f}}(\tilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi \{x_{n+1}/\mathbf{f}(\tilde{x}^n)\} [\tilde{d}^n]$,

а значит, $\mathcal{J} \models \forall \tilde{x}^n (\chi \{x_{n+1}/\mathbf{f}(\tilde{x}^n)\}) \quad \blacktriangledown$

Сколемовская стандартная форма

Лемма (об удалении квантора существования). Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi \{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Небольшая вольность: если слева от \exists не стоит ни одного \forall , то, согласно лемме, f — **0-местный функциональный символ**, то есть **константа**, и ψ имеет вид $\chi \{x_{n+1}/f\}$

Сколемизация — это устранение кванторов \exists с введением новых символов с целью получить более простую “хорошую” формулу (*здесь — сохраняющую выполнимость и невыполнимость*)

При устранении \exists на место удаляемой переменной подставляются **сколемовские термы** (*здесь — $f(\tilde{x}^n)$*)

Сколемовская стандартная форма

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \iff Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Как работает алгоритм:

$$\varphi_{pnf} : \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots \chi$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots (\chi \{x_k / \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{k-1})\})$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \dots$$
$$(\chi \{x_k / \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{k-1}), x_m / \mathbf{g}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{m-1})\})$$

...

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

Требования к выбору функциональных символов:

формула χ не содержит вхождений символа \mathbf{f}

символы \mathbf{f} и \mathbf{g} различны

формула χ не содержит вхождений символа \mathbf{g} , ...

Сколемовская стандартная форма

Пример

$$\varphi_{pnf} : \quad \forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\forall x \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

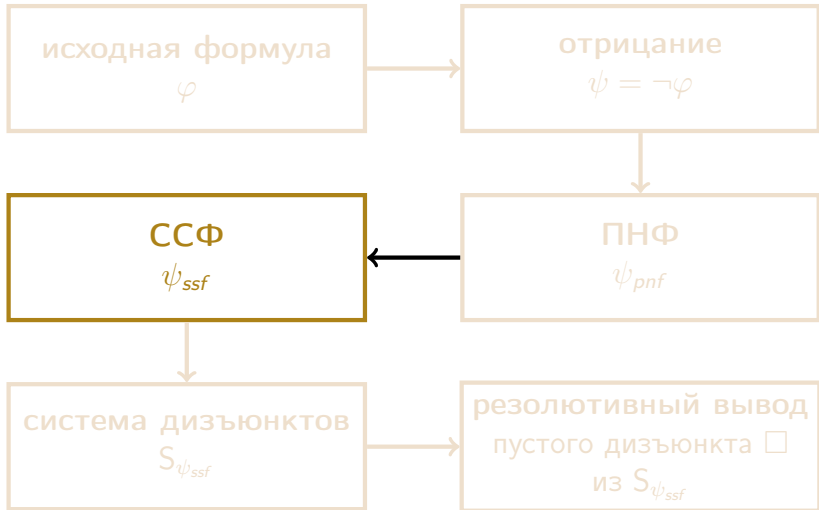
$$Sk(\varphi_{pnf}) : \quad \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$$

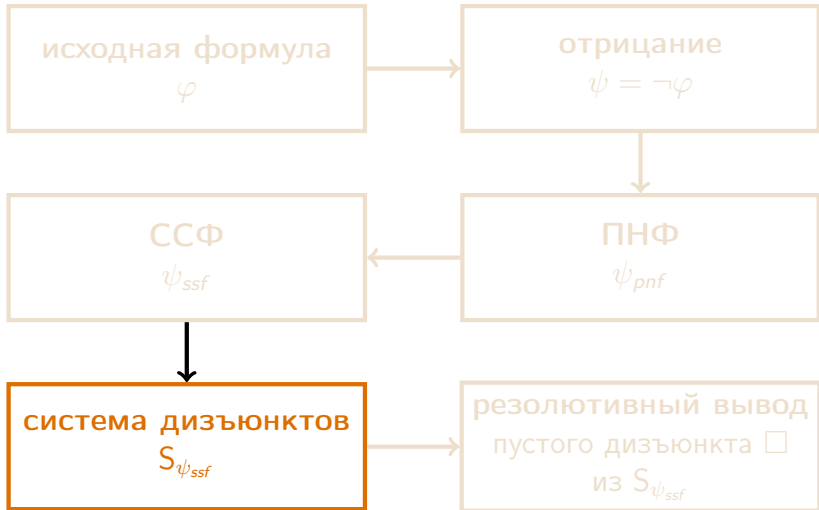
Теорема (о сколемизации). Если φ_{pnf} — ПНФ, то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:

$$\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство. Достаточно конечное число раз применить лемму об удалении квантора существования ▼

А если в формулировке теоремы заменить “выполнима” (\models) на “общезначима” (\models), останется ли она справедливой?





Системы дизъюнктов

Дизъюнкт — это ССФ с одним множителем в матрице:

$$\bigvee_{\tilde{x}^n} (L_1 \vee \dots \vee L_k)$$

Здесь L_j — это **литера**: атом или его отрицание

Для краткости **кванторные приставки дизъюнктов будем опускать**
(вместо дизъюнкта записывать его единственный множитель)

Небольшая вольность: чтобы упростить технические выкладки, будем считать, что дизъюнкт **не изменяется** при перестановке слагаемых; например, $L_1 \vee L_2$ и $L_2 \vee L_1$ — один и тот же дизъюнкт

Пустой дизъюнкт \square — это дизъюнкт, не содержащий
ни одной литеры

Пустой дизъюнкт считается **невыполнимым**:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k \sim L_1 \vee \dots \vee L_k \vee \mathbf{false}, \text{ а значит, } \square \sim \mathbf{false}$$

Система дизъюнктов S **выполнима** ($\models S$),
если она имеет хотя бы одну модель,
и **невыполнима** (**противоречива**; $\not\models S$) иначе

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall x (\varphi \& \psi) \sim \forall x \varphi \& \forall x \psi$

Доказательство. Очевидно

(достаточно применить *метод семантических таблиц*)

Теорема (о переходе к дизъюнктам)

$$\models \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \quad \Leftrightarrow \quad \models \{D_1, \dots, D_k\}$$

Доказательство.

По утверждению выше: $\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \sim \forall \tilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \tilde{x}^n D_k$

Значит, $\models \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$

$$\Leftrightarrow \models \forall \tilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \tilde{x}^n D_k$$

$$\Leftrightarrow \models \{\forall \tilde{x}^n D_1, \dots, \forall \tilde{x}^n D_k\} \quad \blacktriangledown$$

Системы дизъюнктов

Сводный итог:

$\models \varphi?$

φ общезначима

$\Leftrightarrow \psi = \neg\varphi$ невыполнима

\Leftrightarrow (равносильная) φ_{pnf} невыполнима

$\Leftrightarrow \varphi_{ssf} = Sk(\varphi_{ssf}) = \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$ невыполнима

\Leftrightarrow система $S_\varphi = \{D_1, \dots, D_k\}$ невыполнима

Проверка общезначимости формул сведена к проверке невыполнимости конечных систем дизъюнктов

Системы дизъюнктов

Пример

$$\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y) ?$$

Отрицание $\psi = \neg\varphi$:

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$

Предварённая нормальная форма ψ_{pnf} :

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

Сколемовская стандартная форма ψ_{ssf} :

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

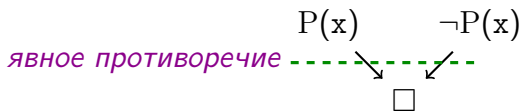
Система дизъюнктов S_φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x, u) \end{array} \right\}$$

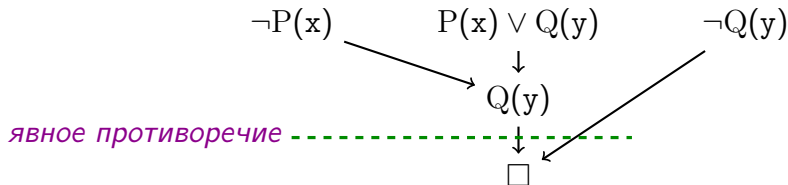
Следующий шаг метода резолюций —
проверка (не)выполнимости
конечной системы дизъюнктов

Противоречия в системах дизъюнктов

- ▶ $\{P(x), \neg P(x)\}$



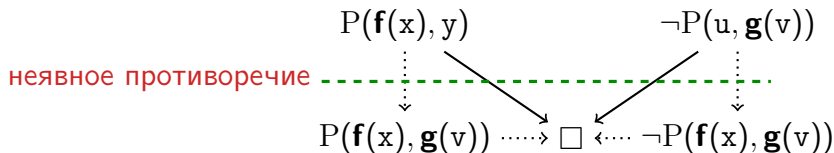
- ▶ $\{\neg P(x), \neg Q(y), P(x) \vee Q(y)\}$



$$\forall x \neg P(x), \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y Q(y)$$

Противоречия в системах дизъюнктов

- ▶ $\{P(\mathbf{f}(x), y), \neg P(u, \mathbf{g}(v))\}$



$$\forall x \forall y P(\mathbf{f}(x), y) \models \forall x \forall v P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

$$\forall u \forall v \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \models \forall x \forall v \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

Чтобы обнаружить **неявное противоречие**, потребовалось выделить из атомов общий частный случай — привести их к общему виду

Приведение выражений к общему виду называется **унификацией**, и перед описанием последнего этапа метода резолюций

(**резолютивного вывода** □) необходимо строго сформулировать и научиться решать эту задачу

Задача унификации

Унификация атомов A , B достигается применением к ним *подстановки* θ , такой что $A\theta = B\theta$

Напоминание

Подстановка — это отображение $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством *связок*:

$$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$$

$E\theta$ — это результат применения подстановки θ к выражению E

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем *алгебраические свойства подстановок*

Задача унификации

Композиция подстановок θ, η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной x верно:

$$x(\theta\eta) = (x\theta)\eta$$

Утверждение. Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ и $\eta = \{y_1/s_1, \dots, y_k/s_k\}$. Тогда

$$\theta\eta = \{x_i/t_i\eta \mid 1 \leq i \leq n, x_i \neq t_i\eta\} \\ \cup \{y_j/s_j \mid 1 \leq j \leq k, y_j \notin \{x_1, \dots, x_n\}\}$$

Доказательство. Рассмотрим переменную $z \in \text{Var}$

Если $z \notin \text{Dom}_\theta \cup \text{Dom}_\eta$, то $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = z$

Если $z = y_j \in \text{Dom}_\eta \setminus \text{Dom}_\theta$, то $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = s_j$

Иначе $z = x_i \in \text{Dom}_\theta$, и $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = t_i\eta$



Задача унификации

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\}$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}$$

$$\theta\eta = ?$$

$$\{x/f(x, c)\eta, y/g(u)\eta, z/y\eta\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c), z/z\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c)\} \cup \{u/c\}$$

$$\theta\eta = \{x/f(g(y), c), y/g(c), u/c\}$$

Задача унификации

Подстановка θ называется **унификатором** выражений E_1, E_2 , если $E_1\theta = E_2\theta$

$\mathcal{U}(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Выражения E_1, E_2 **унифицируемы**, если $\mathcal{U}(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Подстановка η — **специализация** подстановки θ , если существует подстановка μ , такая что $\eta = \theta\mu$

Подмножество S множества подстановок Θ — **полное** в Θ , если любая подстановка из Θ является специализацией хотя бы одной подстановки из S

Подстановка θ — **наиболее общая** в множестве подстановок Θ , если $\theta \in \Theta$ и $\{\theta\}$ — множество, полное в Θ

$\text{НОУ}(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Задача унификации

Примеры

Подстановка $\eta = \{y/\mathbf{g}(\mathbf{g}(v)), u/\mathbf{f}(\mathbf{c}), v/\mathbf{g}(v), x/\mathbf{c}\}$ — унификатор атомов $P(\mathbf{f}(x), y)$, $P(u, \mathbf{g}(v))$:

$$P(\mathbf{f}(x), y)\eta = P(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{g}(\mathbf{g}(v))) = P(u, \mathbf{g}(v))\eta$$

А подстановка $\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\}$ — более общий их унификатор:

$$P(\mathbf{f}(x), y)\theta = P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) = P(u, \mathbf{g}(v))\theta$$

$$\eta = \theta \{v/\mathbf{g}(v), x/\mathbf{c}\}$$

Оказывается, что θ —

наиболее общий унификатор атомов $P(\mathbf{f}(x), y)$, $P(u, \mathbf{g}(v))$
(но как это доказать?)

А выражения $P(x, \mathbf{f}(x))$, $P(\mathbf{g}(y), y)$ неунифицируемы

(а это как доказать?)

Задача унификации

формулируется следующим образом:

для заданных выражений E_1, E_2
выяснить, унифицируемы ли эти выражения,
и если это так, то вычислить
множество унификаторов, полное в $\mathcal{U}(E_1, E_2)$