Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 7

Метод семантических таблиц
в логике высказываний

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Чтобы избежать проблем, возникших при попытке адаптировать переборный метод проверки общезначимости формул, попробуем предложить другой метод решения этой задачи, опирающийся **только** на логическую (индуктивную) семантику связок

Начнём с примера: попробуем доказать таким способом, что

$$\models x \,\&\, y \to x$$

1. Предположим, что $\not\models x \,\&\, y \to x$
2. Тогда существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \not\models x \,\&\, y \to x$
3. Из “$\mathcal{I} \not\models x \,\&\, y \to x$” и семантики “$\to$” следует $\mathcal{I} \models x \,\&\, y$ и $\mathcal{I} \not\models x$
4. Из $\mathcal{I} \models x \,\&\, y$ и семантики $\&$ следует $\mathcal{I} \models x$ и $\mathcal{I} \models y$
5. Получены соотношения $\mathcal{I} \not\models x$ и $\mathcal{I} \models x$ — такого быть не может, а значит, исходное предположение неверно ▼

Попробуем систематизировать ход таких рассуждений и избавиться от лишних слов доказательства

Семантические таблицы

Семантическая таблица T — это упорядоченная пара множеств формул:

$$T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$$

Множество формул $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ в каждой из частей таблицы будем также записывать без скобок (как последовательность): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$

Содержательное пояснение

На каждом шаге рассуждений в последнем примере имелся набор *положительных* фактов "$\mathcal{I} \models \psi$" и *отрицательных* фактов "$\mathcal{I} \not\models \psi$"

В левой части таблицы (Γ) записываются формулы из положительных фактов, а в правой (Δ) — из отрицательных фактов

Например, набор фактов $\mathcal{I} \models \mathrm{y}$, $\mathcal{I} \models \mathrm{x}$, $\mathcal{I} \not\models \mathrm{x}$ записывается в виде таблицы $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle$

Семантические таблицы

Таблица T выполнима, если существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что

- для каждой формулы ψ из Γ верно $\mathcal{I} \models \psi$ и
- для каждой формулы χ из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi$

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T атомарна, если все формулы из Γ и Δ атомарны

Содержательное пояснение

Выполнимость таблицы — это отсутствие
явных и неявных противоречий в имеющемся наборе фактов

В закрытой таблице содержится явное противоречие:
про некоторую формулу χ утверждается одновременно $\mathcal{I} \models \chi$ и $\mathcal{I} \not\models \chi$

В атомарной незакрытой таблице содержится непротиворечивое
описание того, что должно быть истинно и ложно в интерпретации $\mathcal{I}$

Например,

- таблица $\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{y} \rangle$ выполнима, незакрыта и атомарна
- таблица $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle$ невыполнима, закрыта и атомарна
- таблица $\langle \ \mid \mathrm{x} \,\&\, \mathrm{y} \to \mathrm{x} \rangle$ невыполнима, незакрыта и неатомарна

Семантические таблицы

Утверждение. **Для любой формулы φ**

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима}$$

Утверждение. **Любая закрытая таблица невыполнима**

Утверждение. **Любая незакрытая атомарная таблица выполнима**

Доказательство. А попробуйте сами

Теперь перейдём к тому, как можно преобразовывать таблицы,
извлекая явные противоречия из невыполнимых таблиц
и явное обозначение выполнимости из выполнимых

Преобразовывать таблицы будем до получения желаемого исхода по особым заранее сформулированным **правилам**, начав с таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$

Доказательства такого вида принято называть логическим выводом

Логический вывод, в котором преобразуются семантические таблицы,
принято называть табличным выводом,
а соответствующие правила — правилами табличного вывода

Табличный вывод

Будем использовать правила табличного вывода двух видов:

$$(*)\colon\ \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**)\colon\ \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Согласно правилу, рассматриваемая таблица T_0 преобразуется в

(*) в таблицу T_1 для последующего рассмотрения

(**) в таблицы T_1 и T_2 для поочерёдного рассмотрения

При этом правила будут подобраны так, чтобы

(*) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и T_1

(**) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и **хотя бы одна** из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют альтернативами

Табличный вывод

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\to: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

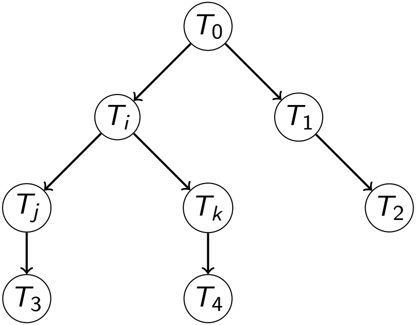
Здесь

- φ, ψ — формулы (*логики высказываний*)
- Γ, Δ — множества формул

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

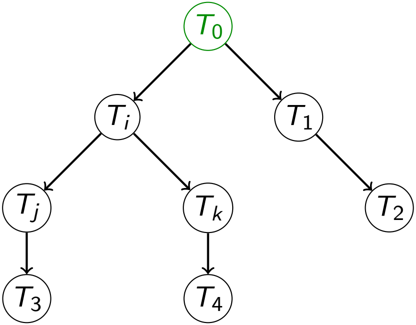
1. его вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

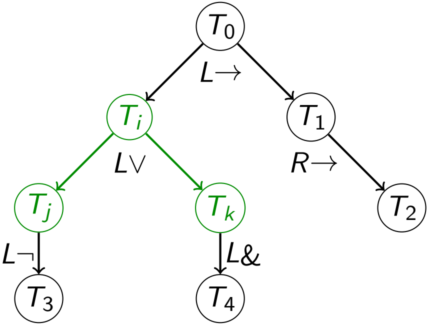
2. его корню приписана таблица T_0



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

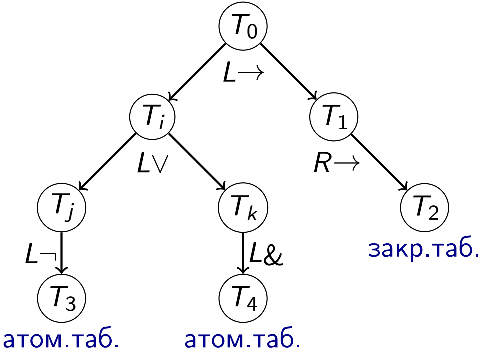
3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) $\quad\Leftrightarrow$
   $\dfrac{T_i}{T_j(,\,T_k)}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

4. все таблицы, приписанные листьям, закрыты или атомарны



Табличный вывод

Табличный вывод успешен, если
он конечен и **всем** его листьям приписаны закрытые таблицы

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица,
для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

Тогда если этот вывод построен для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$, то $\models \varphi$

Семантическая таблица $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ конечна,
если $\Gamma \cup \Delta$ — конечное множество формул

Утверждение. Любой табличный вывод в логике высказываний для любой конечной таблицы конечен

Доказательство.
Глубина вывода для таблицы $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ не превосходит $(N + 1)$,
где N — суммарное число связок в формулах из $\Gamma \cup \Delta$ ▼

Табличный вывод: примеры

$$
\begin{array}{c}
\langle\ \mid \mathrm{x} \to \mathrm{x} \lor \mathrm{y}\rangle \\
\Big\downarrow R\to \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \lor \mathrm{y}\rangle \\
\Big\downarrow R\lor \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle
\end{array}
$$

закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models \mathrm{x} \to \mathrm{x} \lor \mathrm{y}$

Табличный вывод: примеры

$$\begin{tikzcd}
& \langle\ \mid \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \to \mathrm{x}\rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
& \langle \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \mid \mathrm{x}\rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\vee"] & \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x}\rangle & & \langle \mathrm{y} \mid \mathrm{x}\rangle
\end{tikzcd}$$

незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

При этом $\not\models \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \to \mathrm{x}$

Табличный вывод: примеры

$$\langle\ |\ (x \to \neg y) \to (y \to \neg x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\to$$

$$\langle x \to \neg y\ |\ y \to \neg x\rangle$$

$$\Big\downarrow R\to$$

$$\langle x \to \neg y, y\ |\ \neg x\rangle$$

$$\Big\downarrow R\neg$$

$$\langle x \to \neg y, y, x\ |\ \rangle$$

$$L\to$$

$$\langle \neg y, y, x\ |\ \rangle \qquad\qquad \langle y, x\ |\ x\rangle$$

закрытая таблица

$$\Big\downarrow L\neg$$

$$\langle y, x\ |\ y\rangle$$

закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models (x \to \neg y) \to (y \to \neg x)$

Табличный вывод

Лемма(*о корректности правил табличного вывода*)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$

$$(L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg)$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство.

Подробно остановимся только на правиле $L\to$: $\frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$

Пусть верхняя таблица выполнима —
покажем, что тогда выполнима хотя бы одна из нижних таблиц

Определение выполнимости таблицы:
существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что

- для любой формулы χ' из Γ верно $\mathcal{I} \models \chi'$
- для любой формулы χ'' из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi''$
- $\mathcal{I} \models \varphi \to \psi$

Табличный вывод

Лемма(*о корректности правил табличного вывода*)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$

$$(L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\rightarrow,\ R\rightarrow,\ L\neg,\ R\neg)$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $\chi' \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \chi'$ $\quad \chi'' \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi''$ $\quad \mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$

Так как $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$, верно хотя бы одно из двух:

- $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- $\mathcal{I} \models \psi$

Значит, хотя бы одна из таблиц $\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle$, $\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle$ выполнима

Рассуждения в обратную сторону
и для остальных связок аналогичны ▼

Табличный вывод

Теорема(*о табличном выводе в логике высказываний*)
Пусть D — табличный вывод для конечной таблицы T. Тогда

$$\text{таблица } T \text{ невыполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{вывод } D \text{ успешен}$$

Доказательство. Следует из
леммы о корректности правил табличного вывода,
конечности табличного вывода и
невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие. Для любой формулы φ
$\models \varphi \Leftrightarrow$ **для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод**

Следствие. Для любой формулы φ
$\models \varphi \Leftrightarrow$ **все выводы для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ успешны**