Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 29

Вычислительные возможности
метода резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Пусть

- S **— система D-правил,**
- Q_1 **— D-запрос,**
- $Q_1, R_1, Q_2, R_2, \dots, Q_k, R_k, \square$**,** $k \geq 0$**, — успешный входной резолютивный вывод из** $S \cup \{Q_1\}$**,**
- $\theta_1, \dots, \theta_k$ **— наиболее общие унификаторы, согласно которым в выводе строятся резольвенты** $Q_2, \dots, Q_k, \square$ **соответственно, и**

Тогда $S \models ((\neg Q_1)\theta_1 \dots \theta_k)^{\forall}$

Здесь и далее $\varphi^{\forall} = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi$, где $\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n\} = \mathrm{Var}_{\varphi}$

Доказательство (индукцией по k).

База: $k = 0$

Тогда $Q_1 = \square$, $\mathrm{Var}_{Q_1} = \emptyset$ и $S \not\models \square$, а значит, $S \models \neg Q_1$

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Доказательство (индуктивный переход).

$$(Q_1, R_1 \xrightarrow{\theta_1} Q_2, R_2 \xrightarrow{\theta_2} \ldots \xrightarrow{\theta_{k-1}} Q_k, R_k \xrightarrow{\theta_k} \square)$$

Пусть утверждение справедливо для $k < N$ для заданного N, $N \geq 1$; покажем, что оно справедливо и для $k = N$

Пусть, для ясности, $Q_1 = \neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_q \,\&\, B)$, $Q_2 = \neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_p)\theta_1$, $R_1 = A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \rightarrow C$, $B\theta_1 = C\theta_1$ и $\eta = \theta_2 \ldots \theta_k$

По индуктивному предположению, верно $S \models ((\neg Q_2)\eta)^\forall$

Значит, верно

$S \models ((A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_q)\theta_1\eta)^\forall$ и $S \models ((A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p)\theta_1\eta)^\forall$ (почему?)

При этом $S \models (A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \rightarrow C)^\forall$, (почему?)
а значит, и $S \models ((A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \rightarrow C)\theta_1\eta)^\forall$ (почему?)

Тогда, $S \models (C\theta_1\eta)^\forall$ (почему?)

При этом $C\theta_1 = B\theta_1$, а значит, $S \models (B\theta_1\eta)^\forall$

Следовательно, $S \models ((\neg Q_1)\theta_1\eta)^\forall$ ▼

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: Даша, Саша, Паша и пиво

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{L}(\mathbf{Д}, \mathbf{С}), \qquad \mathrm{L}(\mathbf{С}, \mathbf{п}), \qquad \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathbf{п}), \\ \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{x}) \end{array} \right\} \qquad Q_1 = \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \mathbf{Д})$$

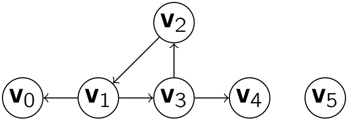
$$\begin{array}{rcll}
 & & \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \mathbf{Д}) & \\
 & & \downarrow & \theta_1 = \{\mathrm{z}/\mathbf{П}, \mathrm{x}'/\mathbf{Д}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\
\mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{x}) & \longrightarrow & \neg(\mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathbf{Д}, \mathrm{y})) & \\
 & & \downarrow & \theta_2 = \{\mathrm{y}/\mathbf{С}\} \\
\mathrm{L}(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) & \longrightarrow & \neg \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathbf{С}) & \\
 & & \downarrow & \theta_3 = \{\mathrm{x}'/\mathbf{С}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\
\mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{x}) & \longrightarrow & \neg(\mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathbf{С}, \mathrm{y})) & \\
 & & \downarrow & \theta_4 = \{\mathrm{y}/\mathbf{п}\} \\
\mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathbf{п}) & \longrightarrow & \neg \mathrm{L}(\mathbf{С}, \mathbf{п}) & \\
 & & \downarrow & \theta_5 = \varepsilon \\
\mathrm{L}(\mathbf{С}, \mathbf{п}) & \longrightarrow & \square &
\end{array}$$

По только что доказанной теореме, верно $S \models \mathrm{L}(\mathrm{z}, \mathbf{Д})\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5$

То есть $S \models \mathrm{L}(\mathbf{П}, \mathbf{Д})$: Паша действительно любит Дашу

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



Достижима ли вершина $\mathbf{v}_4$ из $\mathbf{v}_1$, и если да, то по какому пути?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов и решить при помощи входной резолюции

Вершины графа $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots)$ — это константы

Ещё так получится, что вершинами графа можно считать все термы, но в рассматриваемом примере это неважно

Тот факт, что (u, w) — дуга графа, будет записываться в виде атома $\mathrm{Arc}(u, w)$

Тогда в нашем распоряжении есть пять фактов, отвечающих пяти дугам:

$$\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) \quad \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \quad \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2)$$
$$\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

Путь $u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k$ будет записываться так (*чтобы не путать дýги и импликации*):

$$u_1 \hookrightarrow u_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow u_k$$

$\hookrightarrow$ — это функциональный символ местности 2

Символ $\hookrightarrow$ положим ассоциативным вправо: $x \hookrightarrow y \hookrightarrow z = x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z)$

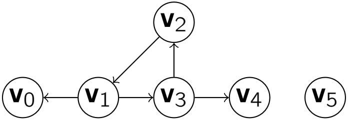
Тот факт, что вершина w достижима из u по пути π, будем записывать в виде атома $\mathrm{Reach}(u, w, \pi)$

Тогда для такого трёхместного отношения достижимости справедливы следующие свойства (*индуктивное определение*):

- Любая вершина достижима из себя по тривиальному пути
$$\forall \mathrm{x}\ \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x})$$
- Если в графе есть дуга $\mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{y}$ и из y по пути π достижима вершина z, то из x по пути $\mathrm{x} \hookrightarrow \pi$ достижима вершина z
$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ \forall \mathrm{p}\ (\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ \&\ \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{p}))$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



$\mathbf{v}_1 \rightsquigarrow \mathbf{v}_4$?

Входные данные задачи можно записать в виде системы дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \multicolumn{3}{l}{\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \hookrightarrow \mathrm{p})} \end{array} \right\}$$

Вопрос к задаче можно записать в виде формулы $\exists \mathrm{p}\ \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})$

Отрицание этой формулы — это D-запрос

$$\varphi = \neg \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})$$

Чтобы убедиться, что вершина $\mathbf{v}_4$ достижима из $\mathbf{v}_1$, и найти соответствующий путь, достаточно построить успешный входной вывод $\square$ из $S \cup \{\varphi\}$, инициированный φ, и применить недавно доказанную теорему

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \multicolumn{3}{l}{\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x}\hookrightarrow\mathrm{p})} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl}
& \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) & \\
\theta_1 = \{\mathrm{x}/\mathbf{v}_1, \mathrm{z}/\mathbf{v}_4, \mathrm{p}/\mathbf{v}_1\hookrightarrow\mathrm{p}'\} \downarrow & & \mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}') \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x}\hookrightarrow\mathrm{p}') \\
& \neg(\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}')) \longleftarrow & \\
\theta_2 = \{\mathrm{y}/\mathbf{v}_3\}\{\mathrm{p}'/\mathrm{p}, \mathrm{p}'/\mathrm{p}\} \downarrow & & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \\
& \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) \longleftarrow & \\
\theta_3 = \{\mathrm{x}/\mathbf{v}_3, \mathrm{z}/\mathbf{v}_4, \mathrm{p}/\mathbf{v}_3\hookrightarrow\mathrm{p}'\} \downarrow & & \mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}') \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x}\hookrightarrow\mathrm{p}') \\
& \neg(\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}')) \longleftarrow & \\
\theta_4 = \{\mathrm{y}/\mathbf{v}_4\}\{\mathrm{p}'/\mathrm{p}, \mathrm{p}/\mathrm{p}'\} \downarrow & & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \\
& \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) \longleftarrow & \\
\theta_5 = \{\mathrm{p}/\mathbf{v}_4, \mathrm{x}/\mathbf{v}_4\} \downarrow & & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\
& \square \longleftarrow &
\end{array}$$

$$\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1\hookrightarrow\mathbf{v}_3\hookrightarrow\mathbf{v}_4)$$

Следовательно, вершина $\mathbf{v}_4$ достижима из $\mathbf{v}_1$ по пути $\mathbf{v}_1\hookrightarrow\mathbf{v}_3\hookrightarrow\mathbf{v}_4$