

Лекция 3. Последовательности, определяемые рекуррентными соотношениями. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные уравнения (ЛОРУ и ЛНРУ). Общие решения ЛОРУ и ЛНРУ.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по дискретной математике 2.
1-й курс, группа 141,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.su>

Последовательности

Часто при решении различных задач, как прикладных, так и теоретических, появляются **последовательности**.

Это могут быть последовательности чисел или элементов какого-то другого множества.

Последовательности могут быть как конечными, так и, вообще говоря, бесконечными.

Явное описание последовательностей

Часто при решении содержательных задач возникает такая ситуация: мы знаем, как определяются элементы последовательности a_n при каждом значении n .

Такое описание последовательностей называется **явным**.

Например, мы нашли явное выражение для биномиальных коэффициентов: $C_n^k = \frac{(n)_k}{k!}$.

Однако явное описание не всегда удобно. Мы доказали **рекуррентное соотношение** между биномиальными коэффициентами $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Заметим, что если задать начальные условия $C_n^0 = 1$, $C_n^k = 0$ при $n < k$, то **рекуррентным соотношением** $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ последовательность биномиальных коэффициентов определяется **однозначно**.

Рекуррентное описание последовательностей

Но часто при решении содержательных задач ситуация бывает обратной: мы получаем **рекуррентное** описание последовательности, а нужно найти ее явное описание.

Например, последовательность чисел **Фибоначчи** f_n :

$$f_0 = f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Как найти явное выражение чисел f_n при $n \geq 0$?

Т.е. можно ли по рекуррентному описанию находить **явное** выражение для элементов a_n ?

Решение рекуррентных соотношений

Итак, можно ли рекуррентные соотношения **решать**?

Мы увидим, что в некоторых случаях это возможно.

Линейные однородные рекуррентные уравнения

Введем некоторые определения.

Линейным однородным рекуррентным уравнением (ЛОРУ) (порядка k) называется соотношение вида

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + p_1x_{n+1} + p_0x_n = 0,$$

где p_0, p_1, \dots, p_{k-1} – некоторые числа.

Если последовательность $\{x_n\}$ задается некоторым ЛОРУ, то такая последовательность называется **возвратной**.

Например, последовательность чисел Фибоначчи f_n является возвратной, т.к. она задается ЛОРУ порядка 2:

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0.$$

Однозначное определение последовательностей

Несложно заметить, что если последовательность задается ЛОРУ порядка k , то она однозначно определяется своими первыми k элементами. Эти первые k элементов называются **начальными значениями** последовательности.

Например, последовательность чисел Фибоначчи f_n однозначно определяется двумя первыми элементами $f_0 = f_1 = 1$. А далее,

$$f_2 = f_1 + f_0 = 2; \quad f_3 = f_2 + f_1 = 3; \quad f_4 = f_3 + f_2 = 5; \dots$$

Частное решение рекуррентного соотношения

Что является **решением** рекуррентного соотношения?

Частным решением рекуррентного соотношения называется такая последовательность $\{a_n\}$, что при подстановке в это уравнение соответствующих элементов этой последовательности при каждом n получается верное равенство.

Лемма о частных решениях ЛОРУ

Как много решений может быть у ЛОРУ?

Лемма 1. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – частные

решения ЛОРУ $x_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j}x_{n+k-j} = 0$, и C_1, C_2 –

произвольные (комплексные) числа, то последовательность $\{C_1a_n + C_2b_n\}$, также является частным решением этого ЛОРУ.

Доказательство. Подставим элементы рассматриваемой последовательности в ЛОРУ и выполним преобразования:

$$(C_1a_{n+k} + C_2b_{n+k}) + \sum_{j=1}^k p_{k-j}(C_1a_{n+k-j} + C_2b_{n+k-j}) =$$

$$C_1 \left(a_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j}a_{n+k-j} \right) + C_2 \left(b_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j}b_{n+k-j} \right) = 0.$$

Общее решение рекуррентного соотношения

Множество всех частных решений называется **общим решением** рекуррентного соотношения.

Из леммы 1 следует, что общее решение ЛОРУ является линейным пространством относительно операции умножения на комплексное число.

Характеристический многочлен ЛОРУ

Решать линейные рекуррентные уравнения можно при помощи их **характеристических многочленов**.

Характеристическим многочленом ЛОРУ

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + p_1x_{n+1} + p_0x_n = 0$$

называется многочлен **комплексной** переменной

$$P(x) = x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1x + p_0.$$

Степень характеристического многочлена совпадает с порядком линейного рекуррентного уравнения.

Характеристический многочлен последовательности чисел Фибоначчи

Например, характеристическим многочленом ЛОРУ, задающего последовательность чисел Фибоначчи

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0,$$

является многочлен комплексной переменной

$$P(x) = x^2 - x - 1.$$

Лемма о корне характеристического многочлена

Лемма 2. Пусть λ – корень характеристического многочлена

$P(x)$ ЛОРУ $x_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$. Тогда

последовательность $\{\lambda^n\}$ является частным решением этого ЛОРУ.

Доказательство. Подставим элементы рассматриваемой последовательности в ЛОРУ и выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j} \lambda^{n+k-j} &= \lambda^n \left(\lambda^k + \sum_{j=1}^k p_{k-j} \lambda^{k-j} \right) = \\ &= \lambda^n P(\lambda) = 0. \end{aligned}$$



Общее решение ЛОРУ с простыми корнями

Теорема 3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – различные (простые) корни характеристического многочлена $P(x)$ ЛОРУ

$x_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$\{C_1 \lambda_1^n + \dots + C_k \lambda_k^n\},$$

где C_1, \dots, C_k – произвольные (комплексные) числа.

Доказательство. По лемме 2 каждая из последовательностей $\{\lambda_j^n\}$ является частным решением этого ЛОРУ. По лемме 1 указанная линейная комбинация частных решений является также решением этого ЛОРУ. Значит, осталось доказать, что других решений нет. Т.е., что произвольное частное решение этого ЛОРУ представимо в таком виде.

Общее решение ЛОРУ с простыми корнями

Доказательство (продолжение). Пусть последовательность $\{a_n\}$ является частным решением этого ЛОРУ.

Покажем, что можно найти такие коэффициенты C_1, \dots, C_k , что $a_n = C_1 \lambda_1^n + \dots + C_k \lambda_k^n$.

Для этого составим систему линейных уравнений относительно коэффициентов C_1, \dots, C_k :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + \dots + C_k = a_0 \\ \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_k C_k = a_1 \\ \lambda_1^2 C_1 + \dots + \lambda_k^2 C_k = a_2 \\ \dots \\ \lambda_1^{k-1} C_1 + \dots + \lambda_k^{k-1} C_k = a_{k-1} \end{array} \right.$$

Общее решение ЛОРУ с простыми корнями

Доказательство (продолжение). Рассмотрим матрицу этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & 1 \\ \lambda_1, & \dots, & \lambda_k \\ \lambda_1^2, & \dots, & \lambda_k^2 \\ \dots & & \dots \\ \lambda_1^{k-1}, & \dots, & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

Определитель $|A|$ матрицы A – это определитель Вандермонда:
 $|A| = \prod_{s < t} (\lambda_s - \lambda_t)$. Несложно заметить, что он не равен нулю, если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ попарно различны.

Значит, при любых значениях a_0, a_1, \dots, a_{k-1} эта система имеет единственное решение.

Т.е. последовательность $\{a_n\}$ выражается линейной комбинацией последовательностей $\{\lambda_j^n\}$.

Решение задачи о числах Фибоначчи

Пример 1. Найдем явное выражение чисел Фибоначчи f_n , где $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$, $f_0 = f_1 = 1$.

Решение. Найдем корни характеристического многочлена этого ЛОРУ:

$$P(x) = x^2 - x - 1 = 0.$$

Получаем

$$D = 1 + 4 = 5; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

По теореме 3 выписываем общее решение ЛОРУ:

$$f_n = C_1 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

где C_1 и C_2 – произвольные комплексные числа.

Решение задачи о числах Фибоначчи

Решение (продолжение). Подставляем начальные значения $f_0 = f_1 = 1$ и записываем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ и $C_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Отсюда находим явное выражение чисел Фибоначчи:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Обратим внимание, что при каждом значении n число f_n является натуральным.

Лемма о кратном корне характеристического многочлена

Если характеристический многочлен ЛОРУ имеет кратные корни, то существуют другие частные решения такого ЛОРУ.

Лемма 4. Пусть λ – корень кратности r , $1 \leq r \leq k$, характеристического многочлена $P(x)$ ЛОРУ

$x_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$. Тогда последовательность $\{n^m \lambda^n\}$, где $0 \leq m < r$, является частным решением этого ЛОРУ.

Доказательство. Положим $p_k = 1$ и подставим элементы рассматриваемой последовательности в ЛОРУ:

$$\begin{aligned} (n+k)^m \lambda^{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j} (n+k-j)^m \lambda^{n+k-j} &= \\ &= \lambda^n \left(\sum_{j=0}^k p_{k-j} (n+k-j)^m \lambda^{k-j} \right). \end{aligned}$$

Лемма о кратном корне характеристического многочлена

Доказательство (продолжение). По биному Ньютона верно, что $(n + k - j)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i n^{m-i} (k - j)^i$. Выполним преобразования:

$$\lambda^n \left(\sum_{j=0}^k p_{k-j} \sum_{i=0}^m C_m^i n^{m-i} (k - j)^i \lambda^{k-j} \right) =$$

$$\lambda^n \left(\sum_{i=0}^m C_m^i n^{m-i} \sum_{j=0}^k p_{k-j} (k - j)^i \lambda^{k-j} \right) = \lambda^n n^m \left(\sum_{i=0}^m C_m^i n^{-i} P_i(\lambda) \right),$$

где $P_i(x) = \sum_{j=0}^k p_{k-j} (k - j)^i x^{k-j}$. Заметим, что $P_0(x) = P(x)$ — характеристический многочлен исходного ЛОРУ.

Лемма о кратном корне характеристического многочлена

Доказательство (продолжение). По условию леммы λ – корень кратности r многочлена $P_0(x)$. Поэтому многочлен $P_0(x)$ можно записать в виде:

$$P_0(x) = (x - \lambda)^r Q_0(x), \quad (1)$$

где $Q_0(x)$ – некоторый многочлен. Заметим, что при $1 \leq i < r$ верно

$$P_i(x) = x \cdot (P_{i-1}(x))'. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) заключаем, что

$$P_i(x) = (x - \lambda)^{r-i} Q_i(x),$$

где $Q_i(x)$ – некоторый многочлен, $0 \leq i < r$. Отсюда получаем, что $P_i(\lambda) = 0$ при $0 \leq i < r$. Значит, последовательность $n^m \lambda^n$ является частным решением исходного ЛОРУ. \square

Общее решение произвольных ЛОРУ

Теперь можно сформулировать и доказать теорему об общем решении произвольных ЛОРУ.

Теорема 5. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – все различные (комплексные) корни характеристического многочлена $P(x)$ ЛОРУ

$x_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$, причем кратность корня λ_j равна r_j ,

и $r_1 + \dots + r_s = k$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$\left\{ \sum_{j=1}^s \sum_{l=0}^{r_j-1} C_{j,l} n^l \lambda_j^n \right\},$$

$C_{j,l}$ – произвольные (комплексные) числа, $l = 0, \dots, r_j - 1$,
 $j = 1, \dots, s$.

Доказательство. По леммам 4 и 1 указанные последовательности являются решением исходного ЛОРУ.

Общее решение произвольных ЛОРУ

Доказательство (продолжение). Поэтому осталось доказать, что каждое частное решение исходного ЛОРУ имеет такой вид. Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 4.



Пример об арифметической прогрессии

Пример 2. Как известно, арифметическая прогрессия a_n определяется свойством $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$.

А значит, она задается ЛОРУ порядка 2:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0.$$

Найдем общее решение этого ЛОРУ. Его характеристический многочлен $P(x)$ имеет вид:

$$P(x) = x^2 - 2x + 1.$$

У него один корень $x = 1$ кратности 2.

Следовательно, по теореме 4 общее решение этого ЛОРУ

$$(C_0 + C_1 n) \cdot 1^n = C_0 + C_1 n,$$

где C_0, C_1 – произвольные (комплексные) числа. А это общий вид элементов арифметической прогрессии с первым членом C_0 разностью C_1 .

Линейные неоднородные рекуррентные уравнения

А что делать, если в правой части рекуррентного соотношения не ноль?

Линейным неоднородным рекуррентным уравнением (ЛНРУ) (порядка k) называется соотношение вида

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + p_1x_{n-1} + p_0x_n = g(n),$$

где p_0, p_1, \dots, p_{k-1} – некоторые числа, а $g(n)$ – некоторая числовая функция, не равная тождественно нулю.

Общее решение ЛНРУ

Если в ЛНРУ правую часть заменить на 0, мы получим соответствующее ему ЛОРУ.

Оказывается, существует связь между ЛНРУ и соответствующим ему ЛОРУ.

Теорема 6. *Общим решением ЛНРУ является сумма какого-то его частного решения $\{b_n\}$ и общего решения соответствующего ему ЛОРУ.*

Доказательство. Понятно, что указанная сумма является решением исходного ЛНРУ. Рассмотрим теперь произвольное частное решение $\{a_n\}$ исходного ЛНРУ. Тогда последовательность $\{a_n - b_n\}$ является частным решением соответствующего ЛОРУ. А значит, входит в общее решение соответствующего ЛОРУ. □

Частное решение ЛНРУ

Как находить частное решение ЛНРУ?

В общем случае, нельзя предложить универсальный метод.

Но если правая часть имеет вид λ^n , умноженное на многочлен переменной n , частное решение можно искать в определенном образом.

Частное решение некоторых ЛНРУ

Теорема 7. *Для ЛНРУ*

$$x_{n+k} + \sum_{j=1}^k p_{k-j} x_{n+k-j} = \left(\sum_{l=0}^m d_l n^l \right) \cdot \lambda^n,$$

в котором $p_{k-1}, \dots, p_1, p_0, d_0, d_1, \dots, d_m, \lambda$ – некоторые числа, $\lambda \neq 0, k \geq 1$, существует частное решение вида

1) $\left\{ \left(\sum_{i=0}^m c_i n^i \right) \cdot \lambda^n \right\}$, где c_0, c_1, \dots, c_m – некоторые числа, если λ не является корнем характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ;

2) $\left\{ n^r \cdot \left(\sum_{l=0}^m c_l n^l \right) \cdot \lambda^n \right\}$, где c_0, c_1, \dots, c_m – некоторые числа, если λ – корень кратности r характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ.

Сложность построения полинома Жегалкина

Часто рекуррентные соотношения появляются при оценке сложности алгоритмов. Вспомним **быстрый метод** построения полинома Жегалкина функции алгебры логики.

Пример 3. Рассмотрим функцию алгебры логики $f(y, x_1, \dots, x_n) \in P_2$. Разложим ее по первой переменной и выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} f(y, x_1, \dots, x_n) &= \bar{y}f(0, x_1, \dots, x_n) \oplus yf(1, x_1, \dots, x_n) = \\ &= y(f(0, x_1, \dots, x_n) \oplus f(1, x_1, \dots, x_n)) \oplus f(0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Пусть для функций $f(0, x_1, \dots, x_n)$ и $f(1, x_1, \dots, x_n)$ полиномы Жегалкина уже построены.

Тогда для того, чтобы получить полином Жегалкина функции $f(y, x_1, \dots, x_n)$, надо сложить (по mod 2) коэффициенты при каждой из 2^n монотонных элементарных конъюнкций в этих полиномах.

Сложность построения полинома Жегалкина

Пример 3 (продолжение). Пусть $L(n)$ – число операций сложения по mod 2, которые надо выполнить для построения этим методом полинома Жегалкина функции алгебры логики, зависящей от n переменных.

Тогда для последовательности натуральных чисел $L(n)$ верно рекуррентное соотношение:

$$L(n + 1) = 2 \cdot L(n) + 2^n.$$

Кроме того, $L(1) = 1$, т.к.

$$f(y) = (f(0) \oplus f(1)) \cdot y \oplus f(0).$$

Т.е. последовательность $L(n)$ задается ЛНРУ порядка 1:

$$L(n + 1) - 2L(n) = 2^n.$$

Сложность построения полинома Жегалкина

Решение примера 3. Рассмотрим ЛНРУ

$$L(n+1) - 2L(n) = 2^n.$$

Для соответствующего ему ЛОРУ

$$L_{\text{одн.}}(n+1) - 2L_{\text{одн.}}(n) = 0$$

найдем корни его характеристического многочлена:

$$P(x) = x - 2 = 0; \quad x = 2.$$

Сложность построения полинома Жегалкина

Решение (продолжение). По теореме 3 выписываем общее решение ЛОРУ:

$$L_{\text{одн.}}(n) = C \cdot 2^n$$

где C – произвольное комплексное число.

Заметим, что $g(n) = 2^n$, и $\lambda = 2$ – корень кратности 1 характеристического многочлена соответствующего ЛОРУ. Поэтому по теореме 7 частное решение ЛНРУ ищем в виде

$$L^*(n) = n \cdot (c_0 \cdot 2^n),$$

в котором надо найти коэффициент c_0 .

Сложность построения полинома Жегалкина

Решение (продолжение). Подставляем элементы $L^*(n)$ в ЛНРУ и получаем

$$(n + 1) \cdot c_0 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot n \cdot c_0 \cdot 2^n = 2^n.$$

Отсюда

$$(n + 1) \cdot c_0 \cdot 2 - 2 \cdot n \cdot c_0 = 1; \quad 2 \cdot c_0 = 1; \quad c_0 = \frac{1}{2}.$$

Нашли частное решение ЛНРУ

$$L^*(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Сложность построения полинома Жегалкина

Решение (продолжение). Следовательно, по теореме 6 общее решение ЛНРУ уравнения имеет вид

$$L(n) = C \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1}.$$

Для того, чтобы найти неизвестный коэффициент C , подставим в общее решение начальное значение $L(1) = 1$. Получим

$$C \cdot 2 + 1 = 1; C = 0.$$

Следовательно, мы нашли сложность построения быстрым методом полиномов функций алгебры логики:

$$L(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Пример решения ЛОРУ

Пример 4. Решить рекуррентное уравнение

$$x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 0, \quad x_0 = 5, \quad x_1 = -22.$$

Решение. Найдем корни характеристического многочлена этого ЛОРУ:

$$P(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0.$$

Получаем один корень $x = -2$ кратности 2.

По теореме 4 выписываем общее решение ЛОРУ:

$$x_n = (C_0 + C_1 n) \cdot (-2)^n,$$

где C_0, C_1 – произвольные комплексные числа.

Пример решения ЛОРУ

Решение (продолжение). Подставляем начальные значения $x_0 = 5$, $x_1 = -22$ в общее решение $x_n = (C_0 + C_1 n) \cdot (-2)^n$ и записываем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_0 и C_1 :

$$\begin{cases} C_0 & = 5; \\ -2C_0 - 2C_1 & = -22. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_0 = 5$ и $C_1 = 6$.

Значит,

$$x_n = (5 + 6n) \cdot (-2)^n.$$

Пример решения ЛНРУ

Пример 5. Решить рекуррентное уравнение
 $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 4 \cdot 3^n, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 3.$

Решение. Найдем корни характеристического многочлена этого ЛОРУ:

$$P(x) = x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Получаем простые корни $x = -1$ и $x = 3$.

По теореме 3 выписываем общее решение ЛОРУ:

$$x_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n,$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные числа.

Пример решения ЛНРУ

Решение (продолжение). Правая часть имеет вид 3^n , и 3 – простой корень соответствующего ЛОРУ. Значит, по теореме 7 частное решение ищем в виде $n \cdot (c \cdot 3^n)$, где c – некоторое число. Получаем

$$(n+2) \cdot (c \cdot 3^{n+2}) - 2(n+1) \cdot (c \cdot 3^{n+1}) - 3n \cdot (c \cdot 3^n) = 4 \cdot 3^n.$$

Отсюда

$$(9cn - 6cn - 3cn) + (18c - 6c) = 4; \quad c = \frac{1}{3}.$$

Получили общее решение ЛНРУ

$x_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n + n \cdot 3^{n-1}$, где C_1, C_2 – произвольные комплексные числа.

Пример решения ЛНРУ

Решение (продолжение). Подставляем начальные значения $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ в общее решение $x_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n + n \cdot 3^{n-1}$ и записываем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ -C_1 + 3C_2 + 1 = 3. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = 1$ и $C_2 = 1$.

Следовательно,

$$x_n = (-1)^n + 3^n + n \cdot 3^{n-1} = (-1)^n + (3 + n) \cdot 3^{n-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить ЛОРУ $x_{n+3} - 3x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 21$, $x_3 = 55$.

2. Решить ЛНРУ $x_{n+1} - 3x_n = 2 \cdot 3^n$, $x_1 = 9$.

3. Доказать, что геометрическая прогрессия является возвратной последовательностью.

4. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = n^2$, $n \geq 0$, является возвратной последовательностью.

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. II, с. 198–200.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII с. 265–267.
3. Редькин Н.П. Дискретная математика. СПб., М., Краснодар: Лань, 2006. Гл. I с. 10–13.
3. Селезнева С.Н. Основы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2010. Ч. 4.1-4.2, с. 47–52.

Конец лекции