

# Распределенные алгоритмы и системы

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

## Блок 10

Как обосновывать корректность  
распределённых алгоритмов

Свойства безопасности и живости

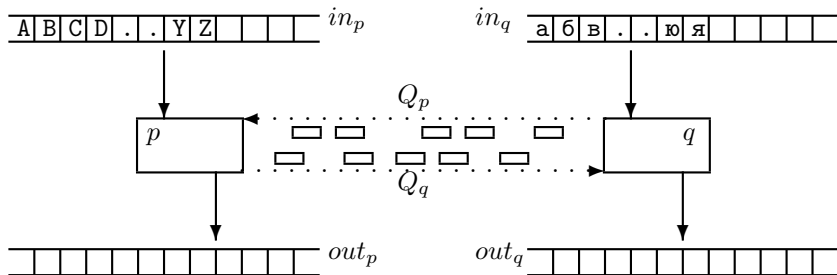
Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)**

## Напоминание: симметричный протокол раздвижного окна



Узлам  $p$  и  $q$  требуется передать друг другу потоки данных  $in_p$ ,  $in_q$ , записав их в массивы  $out_q$  и  $out_p$  соответственно

Как показать, что распределённый протокол раздвижного окна правильно решает поставленную задачу?

Можно поставить вопрос шире:

А как в целом можно доказывать корректность распределённых алгоритмов?

# Свойства безопасности и живости

Поведение распределённого алгоритма (в том числе *BSWP*) задаётся системой переходов, и для обоснования свойств правильности поведения алгоритма достаточно

- ▶ сформулировать эти свойства относительно соответствующей системы переходов и
- ▶ доказать, что эта система переходов удовлетворяет сформулированному так свойству

**Свойством** тех или иных объектов (например, конфигураций или систем переходов) будем называть произвольное множество  $P$  таких объектов: объект  $x$  **обладает свойством**  $P$ , если  $x \in P$

Соотношение  $x \in P$  для свойства  $P$  будем также записывать в виде  $P(x)$

Свойства объектов будем естественным образом представлять в виде **утверждений**, разбивающих объекты на обладающие этим свойством (те, для которых утверждение верно), и не обладающие (для которых утверждение неверно)

# Свойства безопасности и живости

Для лаконичной записи утверждений иногда будем использовать элементы языка логики предикатов:

- ▶  $(P_1 \& P_2)$ : верны оба утверждения  $P_1$  и  $P_2$
- ▶  $(P_1 \vee P_2)$ : верно хотя бы одно из утверждений  $P_1, P_2$
- ▶  $(\neg P)$ : утверждение  $P$  неверно
- ▶  $(P_1 \Rightarrow P_2)$ : если верно утверждение  $P_1$ , то обязательно верно и  $P_2$
- ▶  $(\forall x \in X : P)$ : для любого элемента  $x$  множества  $X$  верно утверждение  $P$
- ▶  $(\exists x \in X : P)$ : существует элемент  $x$  множества  $X$ , для которого верно утверждение  $P$
- ▶  $(\forall x \in X, Q_1, \dots, Q_n : P) = (\forall x \in X : (Q_1 \& \dots \& Q_n \Rightarrow P))$
- ▶  $(\exists x \in X, Q_1, \dots, Q_n : P) = (\exists x \in X : (Q_1 \& \dots \& Q_n \& P))$

**Приоритеты операций** по убыванию:  $\neg$ ;  $\&$ ;  $\vee$ ;  $\Rightarrow$ ;  $\forall$  и  $\exists$

# Свойства безопасности и живости

$\mathfrak{R}(S)$  — так будем обозначать множество всех достижимых конфигураций с.п.  $S$

$\Pi(S)$  — так будем обозначать множество всех вычислений с.п.  $S$

Свойство систем переходов  $S$  и соответствующих распределённых алгоритмов называется

- ▶ **свойством безопасности**, если оно представлено в виде утверждения о том, что все достижимые конфигурации с.п. обладают заданным свойством  $P$ :

$$\mathfrak{R}(S) \subseteq P$$

- ▶ **свойством живости**, если оно представлено в виде утверждения о том, что в каждом вычислении с.п. хотя бы одна конфигурация обладает заданным свойством  $P$ :

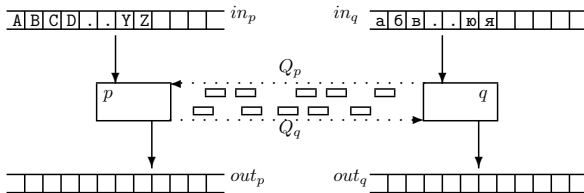
$$\forall \pi \in \Pi(S) : \exists \gamma \in \pi : P(\gamma)$$

Обозначенное выше множество конфигураций  $P$  будем называть **целевым множеством** свойства

# Свойства безопасности и живости

Свойства правильности распределённых алгоритмов на практике нетрудно разбиваются на системы свойств безопасности и живости

## Пример



Правильность BSWP можно выразить следующими свойствами

**Безопасность BSWP:** в каждой достижимой конфигурации для каждого номера  $i$  верно  $out_p[i] \in \{in_q[i], \perp\}$  и значение  $out_q[i] \in \{in_p[i], \perp\}$

$$\forall x \in \mathfrak{R}(S) : \forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \in \{in_q[i], \perp\} \ \& \ out_q[i] \in \{in_p[i], \perp\}$$

**Живость BSWP** для номера  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ :

в любом вычислении содержится конфигурация, в которой все значения  $out_p[0], \dots, out_p[k], out_q[0], \dots, out_q[k]$  отличны от  $\perp$

$$\forall \pi \in \Pi(S) : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \dots, k\} : out_p[i] \neq \perp \ \& \ out_q[i] \neq \perp$$

# Обоснование свойств безопасности

Для множеств конфигураций  $P$  и  $Q$  с.п.  $S = (\mathcal{C}, \mathcal{I}, \rightarrow)$  записью  $P \rightarrow Q$  обозначим тот факт, что любой переход, исходящий из конфигурации, обладающей свойством  $P$ , обязательно ведёт в конфигурацию, обладающую свойством  $Q$ :

$$\forall (\gamma, \delta) \in \rightarrow: P(\gamma) \Rightarrow Q(\delta)$$

Множество конфигураций  $P$  с.п.  $S$  будем называть **инвариантом** с.п.  $S$ , если верно следующее:

1.  $\mathcal{I} \subseteq P$

► Все начальные конфигурации обладают свойством  $P$

2.  $P \rightarrow P$

► Переход из конфигурации, обладающей свойством  $P$ , обязательно ведёт в конфигурацию, также обладающую свойством  $P$

Основные способы обоснования того, что с.п. обладает свойством безопасности, основаны на том, чтобы предложить (с обоснованием) подходящий инвариант

# Обоснование свойств безопасности

## Теорема (о безопасности инварианта)

Если  $P$  — инвариант с.п.  $S$ , то  $\mathfrak{R}(S) \subseteq P$

### Доказательство

*Предположим от противного*, что  $P$  — инвариант, но  $\mathfrak{R}(S) \not\subseteq P$

Тогда  $\exists \gamma \in \mathfrak{R}(S) : \neg P(\gamma)$

Так как  $\gamma \in \mathfrak{R}(S)$ , то существует вычисление  $\gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n$  с.п.  $S$ , такое что  $\gamma_n = \gamma$

По **определению инварианта**, для всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , верно  $P(\gamma_i)$

Значит, в частности, верно  $P(\gamma_n)$

Но  $\gamma_n = \gamma$ , а значит, верно  $\neg P(\gamma_n)$  (*противоречие*) ▼

Таким образом, если целевое множество свойства безопасности оказалось инвариантом с.п., то с.п. обязательно обладает этим свойством



# Обоснование свойств безопасности

## Теорема (о проверке безопасности с.п.)

Если  $P$  — инвариант с.п.  $S$  и  $Q$  — свойство конфигураций  $S$ , такое что  $P \subseteq Q$ , то верно  $\mathfrak{R}(S) \subseteq Q$

## Доказательство

Согласно безопасности инварианта, верно  $\mathfrak{R}(S) \subseteq P$

Значит, если  $P \subseteq Q$ , то верно  $\mathfrak{R}(S) \subseteq P \subseteq Q$  и, следовательно,  $\mathfrak{R}(S) \subseteq Q$  ▼

Таким образом, чтобы обосновать, что с.п.  $S = (\mathcal{C}, \mathcal{I}, \rightarrow)$  обладает свойством безопасности с целевым множеством  $Q$ , достаточно найти инвариант  $P$ , такой что  $P \subseteq Q$

В терминологии, применяющейся к утверждениям,  $P \subseteq Q$  означает, что из утверждения  $P$ , сформулированного относительно заданной конфигурации  $\gamma$ , следует утверждение  $Q$  для той же  $\gamma$ :

$$\forall \gamma \in \mathcal{C} : P \Rightarrow Q$$

# Обоснование свойств безопасности

**Задача 1.** Верно ли, что любое свойство, которым обладают все достижимые конфигурации с.п., является инвариантом? (Ответ обосновать.)

**Задача 2.** Докажите, что для любых инвариантов  $P_1$ ,  $P_2$  свойства конфигураций, представляющиеся утверждениями  $(P_1 \vee P_2)$  и  $(P_1 \& P_2)$ , также являются инвариантами

# Обоснование свойств живости

$$(\forall \pi \in \Pi(S) : \exists \gamma \in \pi : P(\gamma))$$

$\mathfrak{T}(S)$  — так будем обозначать множество всех тупиковых конфигураций с.п.  $S$

Будем говорить, что с.п.  $S$  **правильно завершает вычисления** относительно свойства конфигураций  $P$ , если  $\mathfrak{T}(S) \subseteq P$

Для обоснования живости конечных вычислений  $\pi$  с.п.  $S$  достаточно убедиться, что  $S$  правильно завершает вычисления относительно целевого множества  $P$

Если, кроме того, целевое множество  $P$  **монотонно** относительно переходов  $\rightarrow$  с.п. (т.е. верно  $P \rightarrow P$ ), то это достаточное условие оказывается и необходимым для конечных вычислений

А для проверки живости бесконечных вычислений с.п. придётся воспользоваться другим приёмом

# Обоснование свойств живости

Частично упорядоченное множество (ЧУМ)  $(W, <)$  называется **фундированным** (или, по-другому, обладающим свойством **обрыва убывающих цепей**), если не существует бесконечной последовательности, убывающей относительно  $<$  ( $w_1 > w_2 > w_3 > \dots$ ;  $a > b \Leftrightarrow b < a$ )

**Примеры** фундированных множеств:

- ▶  $(\mathbb{N}_0, <)$  с естественным отношением  $<$  сравнения чисел
- ▶  $(2^X, \subset)$ , где  $X$  — конечное множество и  $2^X$  — множество всех подмножеств  $X$
- ▶  $(\mathbb{N}_0^n, <)$ , где  $n \in \mathbb{N}$  и  $<$  — (линейное) отношение лексикографического порядка или (нелинейное) отношение покомпонентного сравнения наборов

**Примеры** нефундированных множеств:

- ▶  $(\mathbb{N}_0, >)$
- ▶ Множество всех целых чисел  $(\mathbb{Z})$  с естественным отношением  $<$  сравнения чисел
- ▶  $(2^{\mathbb{N}_0}, \subset)$

# Обоснование свойств живости

Пусть заданы с.п.  $S = (\mathcal{C}, \mathcal{I}, \rightarrow)$ , целевое множество  $P$  и фундированное ЧУМ  $(W, <)$

Тогда отображение  $f : \mathcal{C} \rightarrow W$  называется **функцией нормировки** (относительно  $S$ ,  $P$  и  $(W, <)$ ), если для каждого перехода  $\gamma \rightarrow \delta$  верно хотя бы одно из двух:

- ▶  $f(\gamma) > f(\delta)$
- ▶  $P(\delta)$

Иными словами, функция нормировки сопоставляет конфигурациям характеристику из  $W$ , строго убывающую в вычислениях системы до тех пор, пока не станет верно  $P$

# Обоснование свойств живости

**Теорема (о проверке живости с.п.).** Для любой с.п.  $S$  и любого целевого множества конфигураций  $P$  верно следующее: если  $S$  правильно завершает вычисления и для  $S$  существуют фундированное ЧУМ и функция нормировки, то верно утверждение  $\forall \pi \in \Pi(S) : \exists \gamma \in \pi : P(\gamma)$

*Доказательство.*

*Предположим от противного*, что  $S$  правильно завершает вычисления и существуют фундированное ЧУМ  $(W, <)$  и функция нормировки  $f$ , но при этом неверно  $\forall \pi \in \Pi(S) : \exists \gamma \in \pi : P(\gamma)$

Тогда существует вычисление  $\pi = (\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots)$  с.п.  $S$ , все конфигурации  $\gamma_i$  которого не обладают свойством  $P$

Так как  $S$  правильно завершает вычисления, то последовательность  $\pi$  обязана быть бесконечной

Тогда  $(f(\gamma_1), f(\gamma_2), \dots)$  — бесконечная убывающая последовательность фундированного ЧУМ  $(W, <)$ , чего быть не может по определению фундированности (*противоречие*) ▼

# Обоснование свойств живости

Последней теоремой задаётся популярный способ обоснования живости распределённых алгоритмов и соответствующих систем переходов

Для обоснования живости достаточно сделать следующее:

1. Убедиться (обоснованно), что все тупиковые конфигурации обладают целевым свойством
2. Предложить (с обоснованием) какую-либо функцию нормировки