Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 23

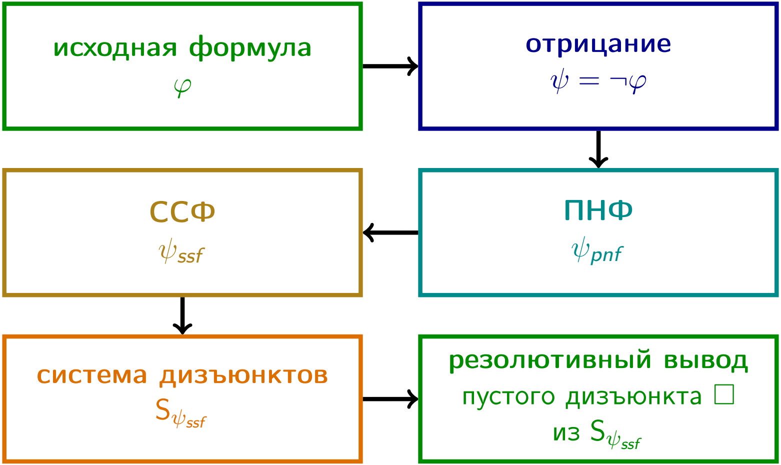
Эрбрановские интепретации
Теорема об эрбрановских интерпретациях

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Краткое вступление



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$\Rightarrow$ существует вывод $\square$ из $S_{\psi_{ssf}}$

Последняя недостающая деталь метода резолюций — “$\Leftrightarrow$” на месте “$\Rightarrow$”

Краткое вступление

Временно забудем про метод резолюций
и попробуем выделить *общую часть* рассуждений “в лоб”
о невыполнимости системы дизъюнктов S в заданной интерпретации $\mathcal{I}$

Для примера рассмотрим такую систему: $S = \{\mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$

Для обоснования невыполнимости S достаточно заметить,
что в любой модели $\mathcal{I}$ для S предмет, описываемый термом $\mathbf{f}(\mathbf{c})$,
и обладает свойством P $(\mathcal{I} \models \forall\mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}))$, и не обладает $(\mathcal{I} \models \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})))$

В этом замечании не используются
природа предметной области $\mathcal{I}$ и устройство оценок $\bar{\mathbf{c}}$ и $\bar{\mathbf{f}}$,
и важно лишь то, каким термом задаётся “противоречивый” предмет

Если в интерпретации $\mathcal{I}$ заменить каждый предмет
множеством основных термов, описывающих этот предмет,
и сохранить устройство оценки P, то в результате получится
эрбрановская интерпретация

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановская интерпретация (она же $\mathcal{H}$-интерпретация) сигнатуры $\sigma = \langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$ состоит из

- **стандартной** предметной области $\mathcal{H}_\sigma$:
  эрбрановского универсума ($\mathcal{H}$-универсума)
  - $\mathcal{H}_\sigma$ — это множество всех основных термов сигнатуры
    - σ, если $\mathrm{Const} \neq \emptyset$
    - $\langle \{\mathbf{c}_\mathcal{H}\}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$, если $\mathrm{Const} = \emptyset$ ($\mathbf{c}_\mathcal{H}$ — эрбрановская константа)
- **стандартной** оценки констант $\overline{\mathrm{Const}}_\mathcal{H}$:
  - $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathrm{Const}$)
- **стандартной** оценки функциональных символов $\overline{\mathrm{Func}}_\mathcal{H}$:
  - $\bar{\mathbf{f}}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$ ($\mathbf{f}^{(n)} \in \mathrm{Func};\ t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$)
- **произвольной** оценки предикатных символов $\overline{\mathrm{Pred}}$

Первые три пункта означают, что $\mathcal{H}$-интерпретация — это интерпретация, построенная над *свободной алгеброй термов*

Все $\mathcal{H}$-интерпретации заданной сигнатуры отличаются друг от друга **только** выбором оценки $\overline{\mathrm{Pred}}$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский базис ($B_{\mathcal{H}}$) — это множество всех атомов, построенных над термами $\mathcal{H}$-универсума

$\mathcal{H}$-интерпретация $\mathcal{I}$ **полностью** определяется тем, какие атомы из $B_{\mathcal{H}}$ в ней истинны, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}},\ \mathcal{I} \models A\}$$

Например,

- $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$: все основные атомы **ложны** в $\mathcal{I}$
- $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$: все основные атомы **истинны** в $\mathcal{I}$
- $B^{\mathcal{I}} = B^{\mathcal{J}'} \cap B^{\mathcal{J}''}$: в $\mathcal{I}$ истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях $\mathcal{J}'$, $\mathcal{J}''$

Для удобного использования теоретико-множественной нотации будем отождествлять $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{I}$ с множеством $B^{\mathcal{I}}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель

Доказательство.

Рассмотрим произвольную систему дизъюнктов S, докажем равносильность для этой системы

($\Leftarrow$): очевидно:
S выполняется в эрбрановской интерпретации
$\Rightarrow$ S выполняется хотя бы в одной интерпретации

($\Rightarrow$):

Пусть система S выполнима

Тогда для неё существует модель $\mathcal{I} = \left\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle$

Построим по интерпретации $\mathcal{I}$ эрбрановскую модель $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ для S той же сигнатуры σ

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ($\Rightarrow$): $\mathcal{I} = \left\langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \right\rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Предметная область $\mathcal{H}_\sigma$ интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ — это множество основных термов сигнатуры σ (если $\mathsf{Const} = \emptyset$, то сигнатуры $\langle \{\mathbf{c}_{\mathcal{H}}\}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$)

Если $\mathsf{Const} = \emptyset$, то добавим и произвольно оценим константу $\mathbf{c}_{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{I}$

Поставим такое соответствие $\alpha : \mathcal{H}_\sigma \to D$:

$$\alpha(t) \text{ — } \textit{значение терма } t \text{ в } \mathcal{I} \ (t[])$$

Зададим оценку $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ каждого предикатного символа P в $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\overline{\overline{\mathrm{P}}}(t_1, \dots, t_k) = \overline{\mathrm{P}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$$

То же самое другими словами — зададим интерпретацию $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k) \mid \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k) \in B_{\mathcal{H}}, \overline{\mathrm{P}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) = \mathbb{t}\}$$

Покажем, что такая интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ является моделью для S

Но для начала приведём пример, чтобы стало *содержательно понятнее*, как соотносятся $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ($\Rightarrow$): $\mathcal{I} = \left\langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \right\rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Пример: рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I}$ сигнатуры $\langle \{1\}, \{+\}, \{=\} \rangle$ с *естественным* арифметическим устройством:

- предметная область — множество всех целых чисел
- $\overline{1}$ — число 1; $\overline{+}$ — операция сложения чисел;
  $\overline{=}$ — отношение равенства чисел

Тогда:

- $\mathcal{H}_\sigma = \{1,\ 1+1,\ 1+(1+1),\ (1+1)+1,\ 1+(1+(1+1)), \dots\}$
- $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 = 1, & 1+1 = 1+1, \\ 1+(1+1) = 1+(1+1), & (1+1)+1 = 1+(1+1), \\ (1+1)+1 = 1+(1+1), & (1+1)+1 = (1+1)+1, \\ \multicolumn{2}{c}{(1+1)+(1+1) = 1+((1+1)+1), \dots} \end{array} \right\}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. ($\Rightarrow$): $\mathcal{I} = \left\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Предположим (*от противного*), что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$

Тогда в S содержится дизъюнкт D, такой что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models D$

Пусть, для ясности, $D = \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$,
где $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m$ — атомы

Тогда существуют термы $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$, такие что

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n] & \dots & \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_k[t_1, \dots, t_n] \\ \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n] & \dots & \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_m[t_1, \dots, t_n] \end{array}$$

По заданию интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$, верно и

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \dots & \mathcal{I} \not\models A_k[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \\ \mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \dots & \mathcal{I} \models B_m[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \end{array}$$

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$, что *противоречит* выбору $\mathcal{I}$ как **модели** для S

Значит, предположение "$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$" неверно, то есть $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models S$ ▼