

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 6

Логика предикатов (ЛП):
выполнимые и общезначимые формулы
модели формул
логическое следствие
проблема общезначимости формул (постановка)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

Продолжаем обсуждение **логики предикатов** (ЛП)

Вспомним на примере, что есть что

Сигнатура:

$$\langle \{\mathbf{c}\}, \{\mathbf{f}^{(1)}\}, \{\mathbf{P}^{(1)}\} \rangle$$

Формула:

$$\varphi = P(\mathbf{c}) \rightarrow \forall x P(\mathbf{f}(x))$$

Интерпретация \mathcal{I} :

предметная область: $\{d_1, d_2\}$

$$\bar{\mathbf{c}} = d_1 \quad \bar{\mathbf{f}}(d_1) = \bar{\mathbf{f}}(d_2) = d_1 \quad \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathfrak{t}, \quad \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathfrak{f}$$

Отношение выполнимости:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ **выполнима** в интерпретации \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi^1$),
если **существует** набор предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I} ,
такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ **истинна** в интерпретации \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi$),
если **для любого** набора предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I}
верно $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула φ **выполнима** ($\models \varphi^1$),
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ **общезначима**
(**тождественно истинна**; является **тавтологией**; $\models \varphi$),
если она истинна в любой интерпретации

Про невыполнимую формулу также часто говорят,
что она **тождественно ложна**

¹ Как и раньше, это необщепотребимое обозначение

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$\varphi: \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\psi: \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$\chi: \forall x P(x) \& \forall x \neg P(x)$$

Интерпретация \mathcal{I}_1 : $D = \{d\}$, $\bar{P}(d) = \text{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_1 \models \psi$$

$$\mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация \mathcal{I}_2 : $D = \{d_1, d_2\}$, $\bar{P}(d_1) = \text{t}$, $\bar{P}(d_2) = \text{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \psi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что было показано, что

1. формулы φ , ψ **выполнимы**
2. формулы ψ , χ **необщезначимы**

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ ?

ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, в которых записана некоторая «нетривиальная» («полезная») информация

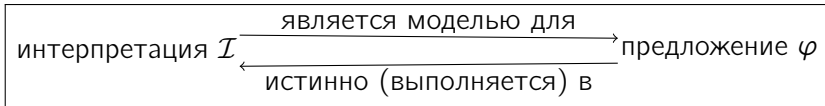
Общезначимые формулы — это (*казалось бы*) банальности, тавтологии, формы, не содержащие в себе никакой «полезной» информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

ЛП: модели

Интерпретация \mathcal{I} называется **моделью для предложения** φ , если $\mathcal{I} \models \varphi$



Интерпретация \mathcal{I} называется **моделью для множества предложений** Γ ($\mathcal{I} \models \Gamma$), если она является моделью для каждого предложения из Γ , и в этом случае также говорят, что Γ **выполняется** в \mathcal{I}

Наряду с «модель для формулы/множества» будем также говорить «**модель формулы/множества**» (без «для»)

Относительно каждой интерпретации \mathcal{I} все предложения делятся на

- ▶ выполнимые в \mathcal{I} («верные») и
- ▶ невыполнимые в \mathcal{I} («неверные»)

Относительно каждого предложения φ все интерпретации делятся на

- ▶ модели для φ (адекватно подходящие под устройство φ) и
- ▶ не являющиеся моделями для φ (неподходящие)

ЛП: модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$C(x)$: « x — круг»

$B(x)$: « x — чёрный предмет»

$S(x)$: « x — квадрат»

$W(x)$: « x — белый предмет»

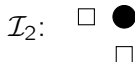
$U(x, y)$: «предмет x лежит под предметом y »

Рассмотрим такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

«любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом»

и такие интерпретации:



Тогда \mathcal{I}_1 является моделью для φ , а \mathcal{I}_2 не является:

- ▶ $\mathcal{I}_1 \models \varphi$: оба белых квадрата лежат под чёрными кругами
- ▶ $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$: левый белый квадрат **не** лежит под чёрным кругом

ЛП: логическое следствие

Предложение φ называется **логическим следствием** множества предложений Γ ($\Gamma \models \varphi$), если любая модель Γ является моделью φ

Другими словами — если для любой интерпретации \mathcal{I} верно

$$\mathcal{I} \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi$$

Содержательно — если независимо от смысла символов сигнатуры из справедливости всех утверждений, записанных в Γ , **обязательно** следует справедливость утверждения φ

Отношение \models , используемое в таком смысле, будем называть **отношением логического следования**

Наряду с « $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \models \varphi$ » будем также писать « $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ »

ЛП: логическое следствие

Небольшое пояснение:

▶ $\forall x P(x) \models P(c)$:

если все предметы обладают свойством P , то **обязательно** предмет, обозначенный символом c , обладает свойством P

▶ $P(c) \not\models \forall x P(x)$:

если предмет, обозначенный символом c , обладает свойством P , то из этого **в общем случае не следует**, что все предметы обладают свойством P

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это

извлечение логических следствий из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей «разумной деятельности»: **экспертные системы**, (автоматическое и ручное) **доказательство теорем**, **формальный анализ программ**, ..., ...

ЛП: логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом показательном примере

Известно, что:

- ▶ Даша любит Сашу,
- ▶ а Саша любит пиво,
- ▶ а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита: в неё войдут

- ▶ константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво** и
- ▶ предикатный символ $L^{(2)}$: $L(x, y) = \text{«икс любит игрека»}$

ЛП: логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- ▶ Даша любит Сашу

$$\varphi_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$$

- ▶ Саша любит пиво

$$\varphi_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$$

- ▶ Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:

$$\varphi_3 = L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

$$\varphi_4 = \forall x (\exists y (L(\text{Паша}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\text{Паша}, x))$$

- ▶ Любит ли кто-нибудь Дашу?

Правда ли, что из знаний $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ необходимо следует знание

$$\varphi_0 = \exists x L(x, \text{Даша}) ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

$$\text{проверить соотношение } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_0$$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_1 \& \psi_2 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

Доказательство. (\Rightarrow) Предположим, что $\Gamma \models \varphi$

Рассмотрим произвольную интерпретацию \mathcal{I}

Если $\mathcal{I} \not\models \Gamma$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \Gamma$

Так как $\Gamma \models \varphi$, верно и $\mathcal{I} \models \varphi$ —

а значит, снова верно $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Итог: для любой интерпретации \mathcal{I} верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

По определению общезначимости, это означает $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Теорема о логическом следствии

Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_1 \& \psi_2 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

Доказательство. (\Leftarrow) Предположим, что $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Рассмотрим произвольную модель \mathcal{I} для множества Γ :

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \quad \dots, \quad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$

Так как формула $\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$ общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

Согласно семантике \rightarrow , верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, произвольная модель \mathcal{I} множества Γ является и моделью формулы φ , то есть $\Gamma \models \varphi$ ▼

ЛП: проблема общезначимости формул

Чтобы уметь извлекать логические следствия и в целом анализировать достоверность утверждений, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных утверждений

Общезначимые формулы представляют собой один из способов записи таких законов — например, закон вида «**если верны утверждения ψ_1, \dots, ψ_n , то верно и φ** » записывается в виде общезначимой формулы

$$\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

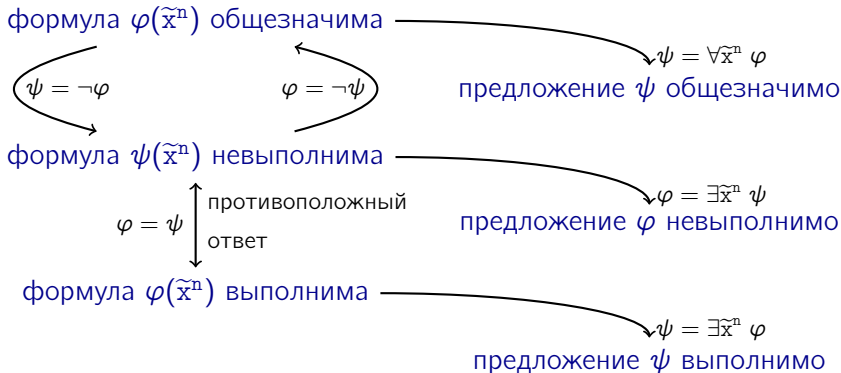
В связи с этим оказывается важна **проблема общезначимости формул**:

**для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:**

$$\models \varphi ?$$

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:



$\forall \tilde{x}^n$ — сокращение для $\forall x_1 \dots \forall x_n$

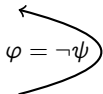
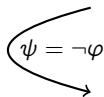
$\exists \tilde{x}^n$ — сокращение для $\exists x_1 \dots \exists x_n$

ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

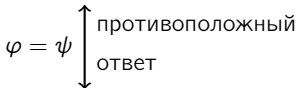
Утверждение

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ общезначима



$\psi = \forall \tilde{x}^n \varphi$
предложение ψ общезначимо

формула $\psi(\tilde{x}^n)$ невыполнима



$\varphi = \exists \tilde{x}^n \psi$
предложение φ невыполнимо

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ выполнима

$\psi = \exists \tilde{x}^n \varphi$
предложение ψ выполнимо

Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости ▼