

Лекция 8. Сеть. Поток в сети. Теорема о  
величине максимального потока в сети.  
Нахождение максимального потока в сети.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <https://mk.cs.msu.ru>

# Транспортная задача

*Задана сеть из  $p$  узлов, связанных направленными соединениями, среди которых выделены источник  $s$  и сток  $t$  ( $s \neq t$ ). По соединениям можно передавать данные, но на каждое соединение наложено ограничение — его максимально допустимая нагрузка. Необходимо определить **максимально возможное** количество данных, которое можно передать по этой сети из  $s$  в  $t$ . Также требуется выяснить, как можно устроить передачу этого максимально возможного количества данных.*

Эту задачу можно рассматривать для сетей компьютеров и т. д., сетей железнодорожных, автомобильных и т. д. дорог; сетей трубопроводов и т. д.

## Входящие и исходящие дуги вершины

Пусть  $G = (V, E)$  — орграф.

Для каждой вершины  $v \in V$  определим множества  $A(v)$  и  $B(v)$ :

$$A(v) = \{e \in E \mid e = (v, w), w \in V\},$$

т. е.  $A(v)$  — множество всех дуг, исходящих из вершины  $v$  в графе  $G$ ;

$$B(v) = \{e \in E \mid e = (w, v), w \in V\},$$

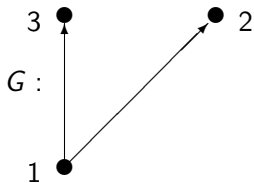
т. е.  $B(v)$  — множество всех дуг, входящих в вершину  $v$  в графе  $G$ .

# Источники и стоки

Если  $B(v) = \emptyset$ , т. е. в вершину  $v$  дуги не входят, то вершина  $v$  называется **ИСТОЧНИКОМ**.

Если  $A(v) = \emptyset$ , т. е. из вершины  $v$  дуги не исходят, то вершина  $v$  называется **СТОКОМ**.

Например, в графе  $G$  вершина 1 является источником, вершины 2 и 3 — стоками.



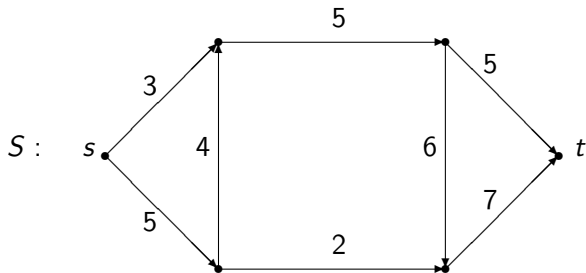
## Сеть

Пусть  $G = (V, E)$  — орграф с одним источником  $s \in V$  и одним стоком  $t \in V$ , где  $s \neq t$ .

**Сетью**  $S = (G; c)$  назовем орграф  $G$  с заданной функцией  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , сопоставляющей каждой дуге  $e \in E$  неотрицательное действительное число  $c(e)$ , называемое **пропускной способностью** этой дуги  $e$ .

# Пример сети

Сеть  $S = (G; c)$ :



# Поток в сети

**Потоком** в сети  $S = (G; c)$ , где  $G = (V, E)$ , называется такая функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , приписывающая каждой дуге  $e \in E$  неотрицательное число  $f(e)$ , называемое **потоком** по этой дуге  $e$ , для которой выполняются свойства:

- 1) для каждой дуги  $e \in E$  верно  $f(e) \leq c(e)$ , т. е. поток по любой дуге не превышает пропускную способность этой дуги;
- 2) для каждой вершины  $v \in V$ ,  $v \neq s, t$ , верно

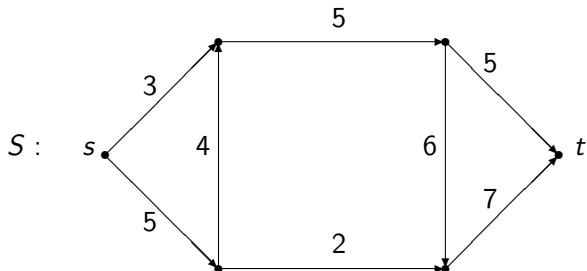
$$D_f(v) = \sum_{e \in A(v)} f(e) - \sum_{e \in B(v)} f(e) = 0,$$

т. е. поток, входящий в любую вершину, кроме источника и стока, без остатка выходит из нее (сохранение потока).

При этом неотрицательное число  $p_f = \sum_{e \in A(s)} f(e)$  называется **величиной потока**  $f$ .

# Пример потока в сети

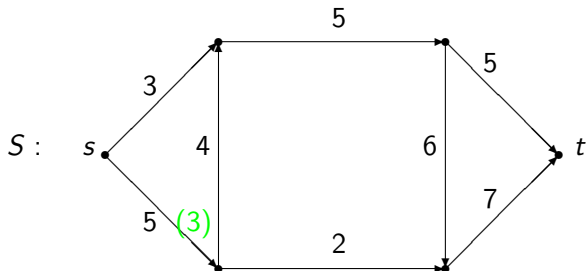
Поток  $f_1$  в сети  $S = (G; c)$ :





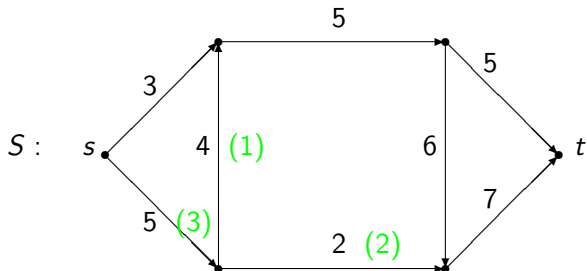
# Пример потока в сети

Поток  $f_1$  в сети  $S = (G; c)$ :



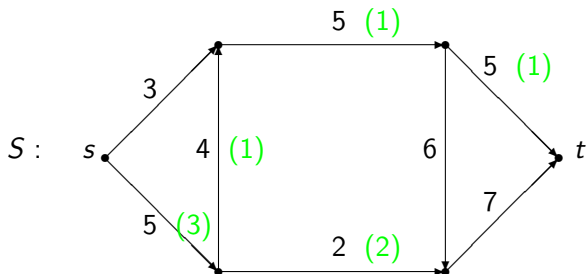
# Пример потока в сети

Поток  $f_1$  в сети  $S = (G; c)$ :



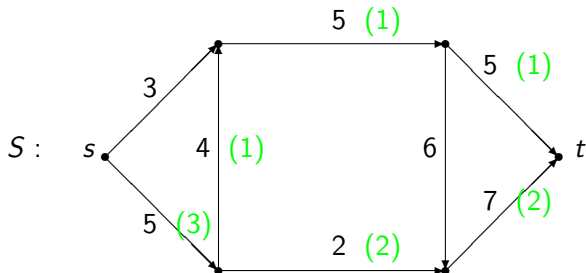
# Пример потока в сети

Поток  $f_1$  в сети  $S = (G; c)$ :



# Пример потока в сети

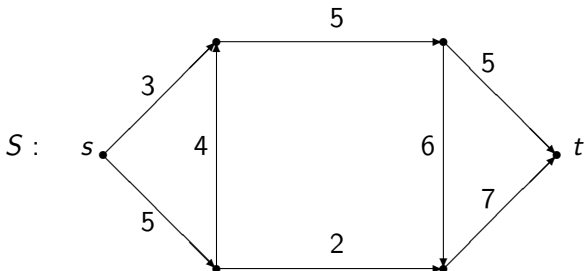
Поток  $f_1$  в сети  $S = (G; c)$ :



Получаем:  $p_{f_1} = 3$ .

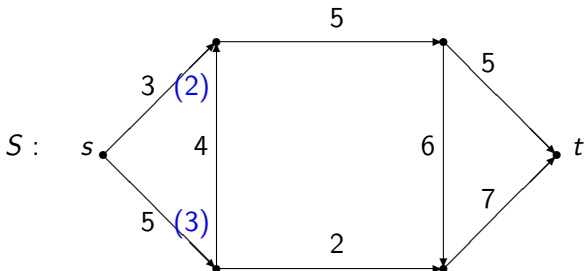
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток  $f_2$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



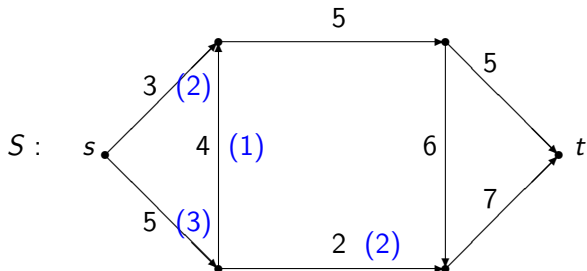
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток  $f_2$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



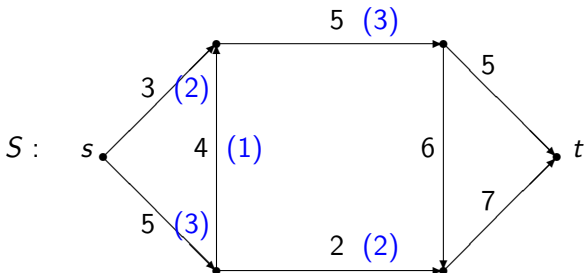
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток  $f_2$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



# Пример потока в сети

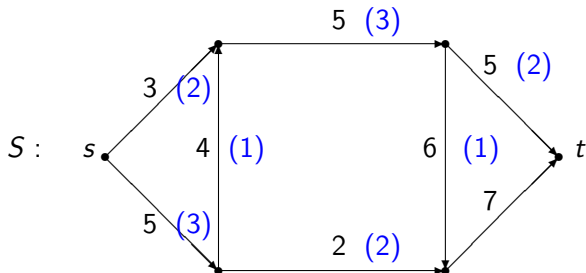
Можно построить другой поток  $f_2$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :





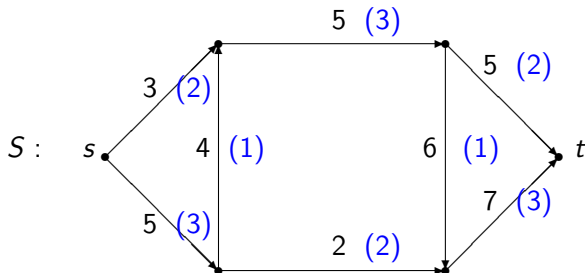
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток  $f_2$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



# Пример потока в сети

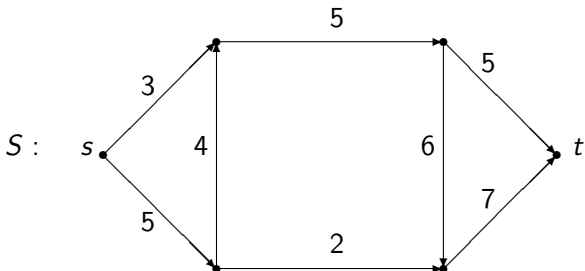
Можно построить другой поток  $f_2$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



Получаем:  $p_{f_2} = 5$ .

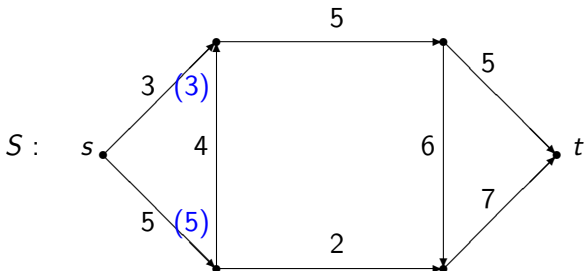
# Пример потока в сети

Попытаемся построить поток  $f_3$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



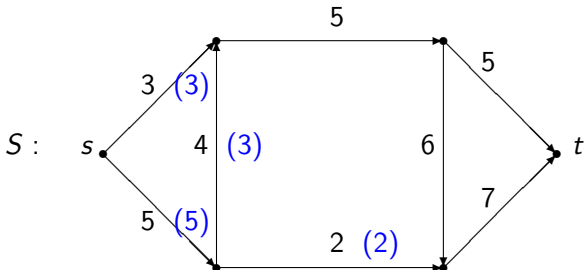
# Пример потока в сети

Попытаемся построить поток  $f_3$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



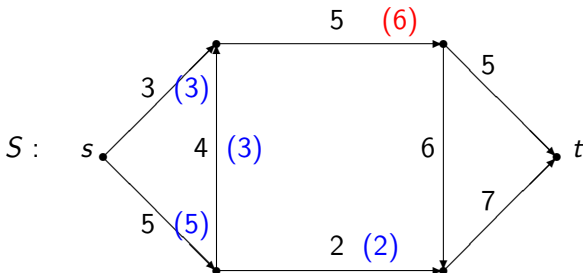
# Пример потока в сети

Попытаемся построить поток  $f_3$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



# Пример потока в сети

Попытаемся построить поток  $f_3$  в этой же сети  $S = (G; c)$ :



Поток  $f_3$  с  $p_{f_3} = 8$  построить не удалось.

# Постановка транспортной задачи

Задана сеть  $S = (G; c)$ .

Требуется найти **максимальный поток**  $f$  в сети  $S$ , т. е. такой поток, при котором достигается наибольшее значение величины потока среди всех потоков этой сети.

# Разрез

Пусть  $S = (G; c)$  — сеть, где  $G = (V, E)$ .

Если  $X \subseteq V$ ,  $s \in X$ ,  $t \notin X$  и  $Y = V \setminus X$ , то

$$R = \{e \in E \mid e = (v, w), v \in X, w \in Y\},$$

называется **разрезом** сети  $S$  и обозначается  $R = (X, Y)$ .

Если удалить из сети  $S$  все дуги разреза  $R$ , то останется сеть, в которой нет ни одного направленного пути из  $s$  в  $t$ .



# Пропускная способность разреза

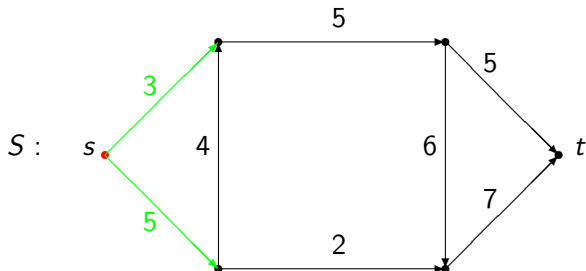
**Пропускной способностью разреза**  $R(X, Y)$  называется неотрицательное число

$$c(R) = \sum_{e \in R} c(e),$$

т. е. равное сумме пропускных способностей его дуг.

# Пример разреза

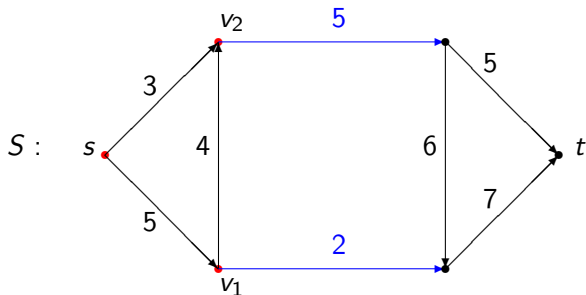
Рассмотрим разрез  $R_1 = (X_1, Y_1)$  в сети  $S$ , где  $X_1 = \{s\}$ :



Получаем:  $c(R_1) = 5 + 3 = 8$ .

# Пример разреза

Рассмотрим разрез  $R_2 = (X_2, Y_2)$  в сети  $S$ , где  $X_2 = \{s, v_1, v_2\}$ :



Получаем:  $c(R_2) = 2 + 5 = 7$ .

# Лемма о величине потока в сети

**Лемма 1 (о величине потока в сети).** Пусть  $S = (G; c)$  — сеть, где  $G = (V, E)$ . Величина любого потока в сети  $S$  не превосходит пропускной способности любого ее разреза.

**Доказательство.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  — произвольный поток в сети  $S$ , а  $R = (X, Y)$  — произвольный ее разрез, где  $X \subseteq V$ ,  $s \in X$ ,  $t \notin X$ ,  $Y = V \setminus X$ .

# Лемма о величине потока в сети

Доказательство. По определению

$$p_f = \sum_{e \in A(s)} f(e) - \sum_{e \in B(s)=\emptyset} f(e).$$

В промежуточных вершинах поток не остается, поэтому эту сумму можно добавить все вершины из  $X$  ( $t \notin X$ ):

$$\begin{aligned} p_f &= \sum_{v \in X} \left( \sum_{e \in A(v)} f(e) - \sum_{e \in B(v)} f(e) \right) = \\ &= \sum_{v \in X, (v,w) \in A(v)} f(v,w) - \sum_{v \in X, (w,v) \in B(v)} f(w,v). \end{aligned}$$

# Лемма о величине потока в сети

**Доказательство.** Если  $v, w \in X$ , то  $f(v, w)$  в полученной сумме встречается и со знаком «+», и со знаком «-». Поэтому ненулевой вклад вносят потоки по дугам, в которых одна из вершин лежит в  $X$ , а другая вершина — в  $Y$ . Значит,

$$\begin{aligned} p_f &= \sum_{v \in X, w \in Y, (v, w) \in E} f(v, w) - \sum_{v \in X, w \in Y, (w, v) \in E} f(w, v) \leq \\ &\leq \sum_{v \in X, w \in Y, (v, w) \in E} f(v, w) \leq \sum_{v \in X, w \in Y, (v, w) \in E} c(v, w) = c(R). \end{aligned}$$

Поэтому  $p_f \leq c(R)$ .

□

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Теорема 1 (Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, 1962).** Пусть  $S = (G; c)$  — сеть, где  $G = (V, E)$ . Величина максимального потока  $p_{\max}$  в сети  $S$  совпадает с минимальной пропускной способностью  $r_{\min}$  ее разрезом.

**Доказательство.** Пусть  $R_{\min} = (X, Y)$  — разрез сети  $S$  с минимальной пропускной способностью  $c(R_{\min}) = r_{\min}$  и  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  — поток в сети  $S$  с максимальной величиной  $p_f = p_{\max}$ .

По лемме 1 выполняется  $p_f \leq c(R_{\min})$ .

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство.** Покажем, что  $p_f = c(R_{min})$ .

По индукции определим множество вершин  $X \subseteq V$ .

*Базис индукции:*  $s \in X$ .

*Индуктивный переход:*

- 1) если  $v \in X$ ,  $(v, w) \in E$  и  $f(v, w) < c(v, w)$ , то  $w \in X$ ;
- 2) если  $v \in X$ ,  $(w, v) \in E$  и  $f(w, v) > 0$ , то  $w \in X$ .

Т.е.  $X$  — множество вершин, в которые можно перейти из источника  $s$  по прямым дугам с **ненасыщенным** потоком (т.е. который меньше пропускной способности этой дуги) и по обратным дугам с **ненулевым** потоком. Положим  $Y = V \setminus X$ .



# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство.** 1. Если  $t \notin X$ , то  $R = (X, Y)$  — разрез.  
Тогда по доказательству леммы 1:

$$p_f = \sum_{v \in X, w \in Y, (v, w) \in E} f(v, w) - \sum_{v \in X, w \in Y, (w, v) \in E} f(w, v).$$

Но если  $v \in X$ ,  $w \in Y$  и  $(v, w) \in E$ , то  $f(v, w) = c(v, w)$ , т. к. иначе вершину  $w$  добавили бы в  $X$ .

Также если  $v \in X$ ,  $w \in Y$  и  $(w, v) \in E$ , то  $f(w, v) = 0$ , т. к. иначе вершину  $w$  добавили бы в  $X$ .

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство.** Поэтому

$$p_f = \sum_{v \in X, w \in Y, (v, w) \in E} c(v, w) = c(R).$$

Из  $c(R_{min}) \leq c(R)$  и  $p_f \leq c(R_{min})$  получаем  $p_f = c(R_{min})$ .

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство.** 2. Если  $t \in X$ , то в  $S$  найдется путь  $P$  (без учета направлений дуг) из  $s$  в  $t$ , состоящий только из прямых дуг с ненасыщенным потоком и из обратных дуг с ненулевым потоком:

$$P = se_1v_1e_2v_2 \dots v_{m-1}e_mt,$$

где для каждого  $j = 1, \dots, m$  выполняется:

- 1) если  $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$ , то  $f(e_j) < c(e_j)$ ;
- 2) если  $e_j = (v_j, v_{j-1}) \in E$ , то  $f(e_j) > 0$ .

# Теорема Форда, Фалкерсона

Доказательство. Положим:

$$\begin{aligned}a &= \min_{e_j=(v_{j-1}, v_j) \in E} (c(e_j) - f(e_j)); \\b &= \min_{e_j=(v_j, v_{j-1}) \in E} f(e_j); \\d &= \min(a, b).\end{aligned}$$

Отметим, что  $d > 0$ .

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство.** Теперь построим новый поток  $f'$  в сети  $S$ , изменив потоки по дугам пути  $P$ : для каждого  $j = 1, \dots, m$  положим:

- 1) если  $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$ , то  $f'(e_j) = f(e_j) + d$ ;
- 2) если  $e_j = (v_j, v_{j-1}) \in E$ , то  $f'(e_j) = f(e_j) - d$ .

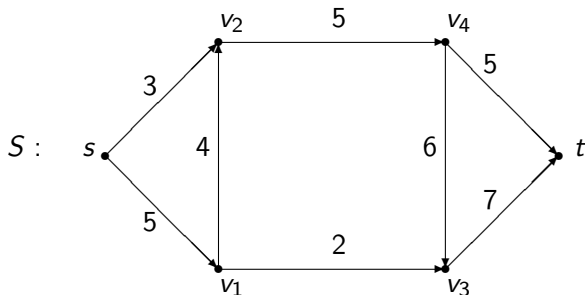
Получаем:  $p_{f'} = p_f + d > p_{max}$ , чего не может быть. Значит, случай 2 не возможен, выполняется случай 1 и  $p_f = p_{max} = c(R_{min})$ .



# Алгоритм расстановки пометок

По доказательству теоремы 1 можно описать алгоритм построения максимального потока в сети. Он называется **алгоритмом расстановки пометок**.

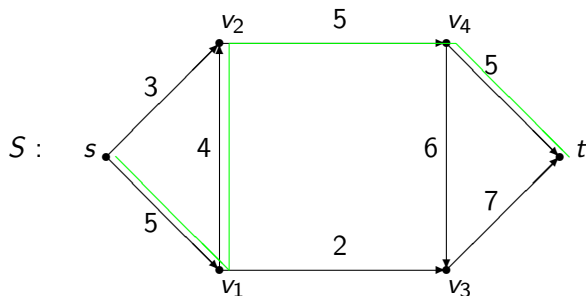
Рассмотрим сеть  $S$ , и пусть  $f_0$  — нулевой поток.



# Алгоритм расстановки пометок

По доказательству теоремы 1 можно описать алгоритм построения максимального потока в сети. Он называется **алгоритмом расстановки пометок**.

Рассмотрим сеть  $S$ , и пусть  $f_0$  — нулевой поток.

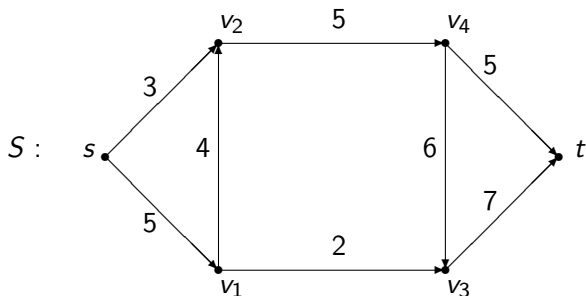


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли путь:

$$P_1 = s(s, v_1)v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем:  $d = a = \min(5, 4, 5, 5) = 4$ , и поток  $f_0$  можно увеличить до нового потока  $f_1$ ,  $p_{f_1} = 4$ .



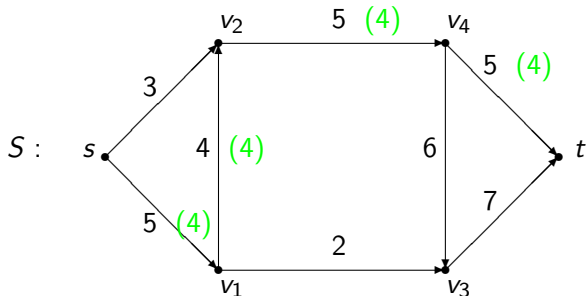


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли путь:

$$P_1 = s(s, v_1)v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем:  $d = a = \min(5, 4, 5, 5) = 4$ , и поток  $f_0$  можно увеличить до нового потока  $f_1$ ,  $p_{f_1} = 4$ .

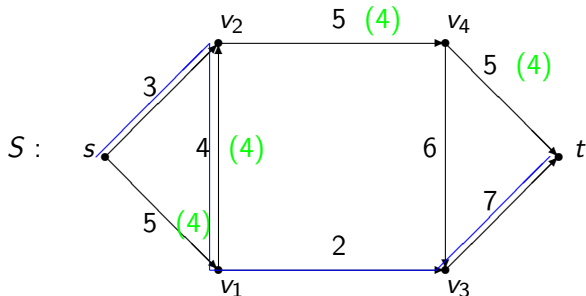


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли путь:

$$P_1 = s(s, v_1)v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем:  $d = a = \min(5, 4, 5, 5) = 4$ , и поток  $f_0$  можно увеличить до нового потока  $f_1$ ,  $p_{f_1} = 4$ .

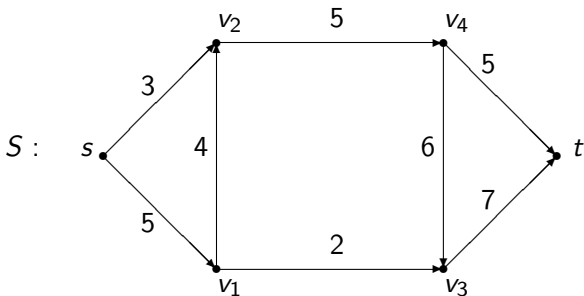


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем:  $a = \min(3, 2, 7) = 2$ ,  $b = \min(4) = 4$ ,  
 $d = \min(2, 4) = 2$ , и поток  $f_1$  можно увеличить до нового  
 потока  $f_2$ ,  $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$ .

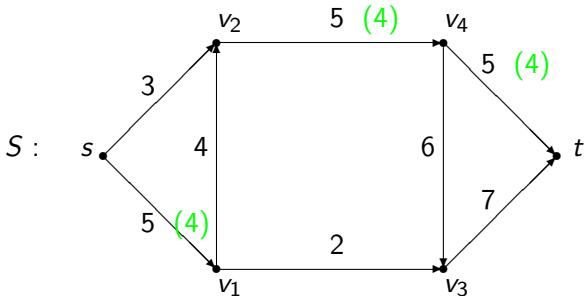


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем:  $a = \min(3, 2, 7) = 2$ ,  $b = \min(4) = 4$ ,  
 $d = \min(2, 4) = 2$ , и поток  $f_1$  можно увеличить до нового  
 потока  $f_2$ ,  $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$ .

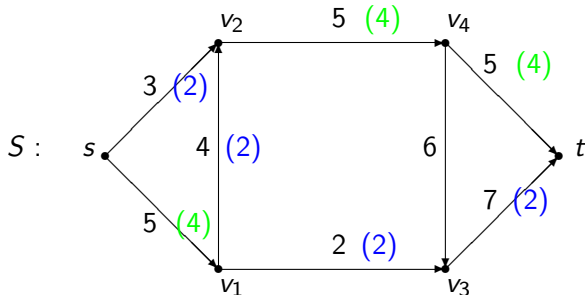


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем:  $a = \min(3, 2, 7) = 2$ ,  $b = \min(4) = 4$ ,  
 $d = \min(2, 4) = 2$ , и поток  $f_1$  можно увеличить до нового  
 потока  $f_2$ ,  $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$ .

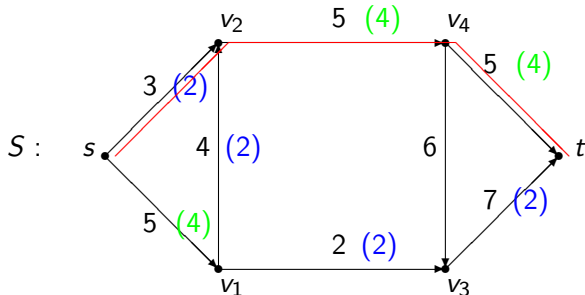


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем:  $a = \min(3, 2, 7) = 2$ ,  $b = \min(4) = 4$ ,  
 $d = \min(2, 4) = 2$ , и поток  $f_1$  можно увеличить до нового  
 потока  $f_2$ ,  $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$ .

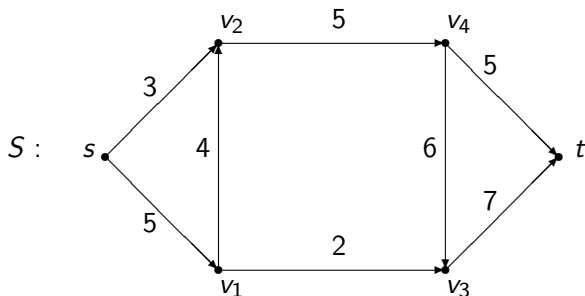


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем:  $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$ , и поток  $f_2$  можно увеличить до нового потока  $f_3$ ,  $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$ .

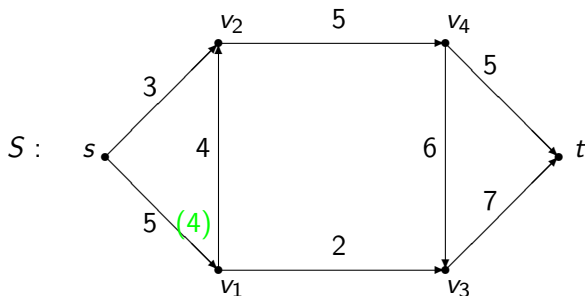


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем:  $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$ , и поток  $f_2$  можно увеличить до нового потока  $f_3$ ,  $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$ .



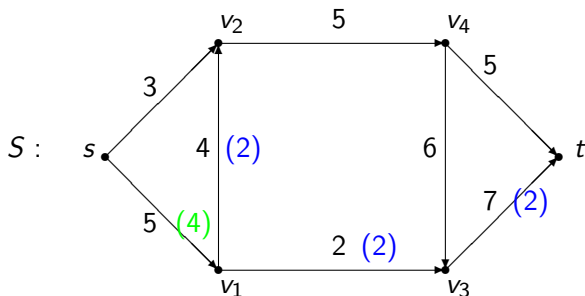


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем:  $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$ , и поток  $f_2$  можно увеличить до нового потока  $f_3$ ,  $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$ .

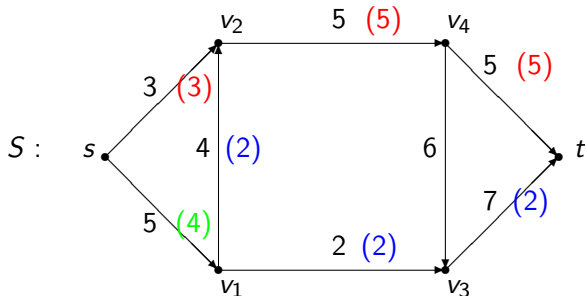


# Алгоритм расстановки пометок

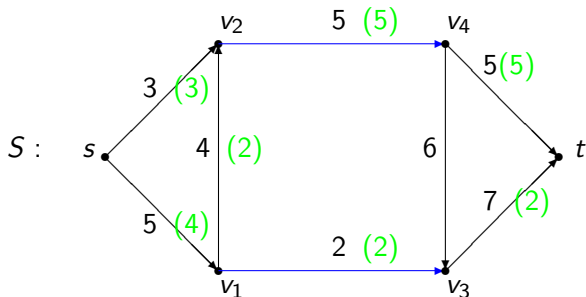
Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем:  $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$ , и поток  $f_2$  можно увеличить до нового потока  $f_3$ ,  $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$ .



# Алгоритм расстановки пометок



Находим:  $X = \{s, v_1, v_2\}$ ,  $t \notin X$ .

Тогда  $R = (X, V \setminus X)$  — разрез,  $c(R) = 2 + 5 = 7$ ,  $R = R_{min}$ .

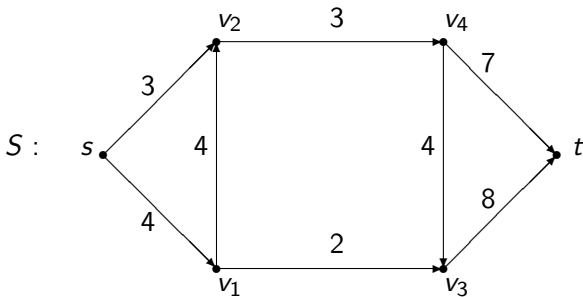
Поэтому  $p_{max} = pf_3 = c(R_{min}) = 7$ .

## Краткий итог лекции

1. Величина максимального потока в сети совпадает с минимальной пропускной способностью среди разрезов этой сети.
2. Максимальный поток в сети можно найти быстрым (полиномиальным) алгоритмом.

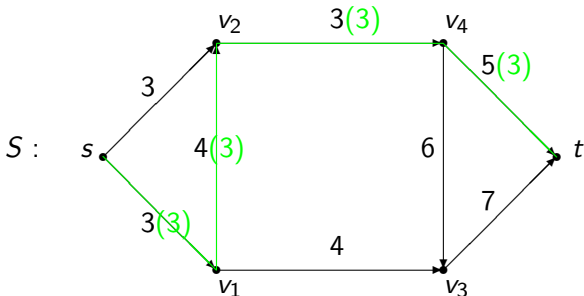
# Задачи

1. Начиная с нулевого потока, найти максимальный поток в сети  $S$  по алгоритму расстановки пометок.



# Задачи

2. В сети  $S$  увеличить поток, выделенный зеленым цветом, до максимального потока при помощи алгоритма расстановки пометок:



# Задачи

3. Пусть  $G = (V, E)$  — связный двудольный граф. Множество ребер  $P$ ,  $P \subseteq E$ , называется **паросочетанием** в графе  $G$ , если никакие два различных ребра из  $P$  не содержат общей вершины. Паросочетание  $P$  называется **максимальным**, если оно содержит наибольшее число ребер среди всех паросочетаний графа  $G$ .

Показать, как можно свести задачу о нахождении максимального паросочетания в связном двудольном графе  $G$  к задаче поиска максимального потока в сети.

## Литература к лекции

1. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.
2. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. С. 136–154.
3. Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы. М.: МЦНМО, 2014. С. 193–200.