Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 9

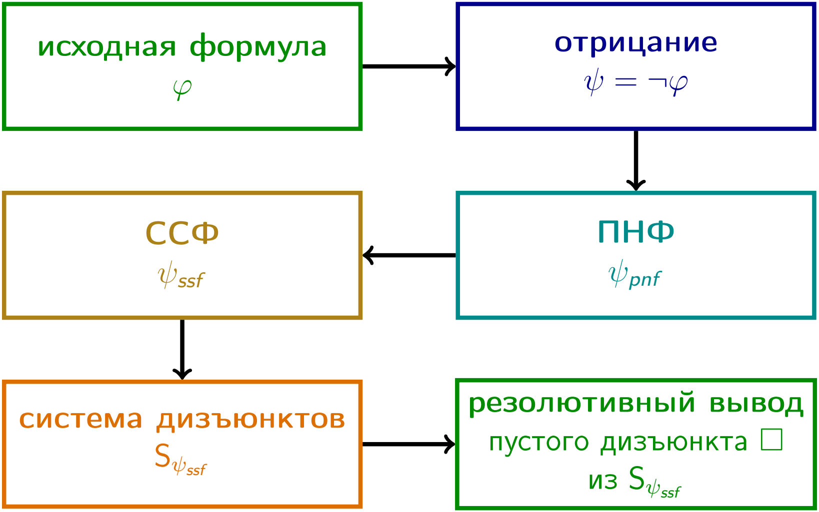
Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода
Применение метода резолюций
Эрбрановские интерпретации
Теорема Эрбрана

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

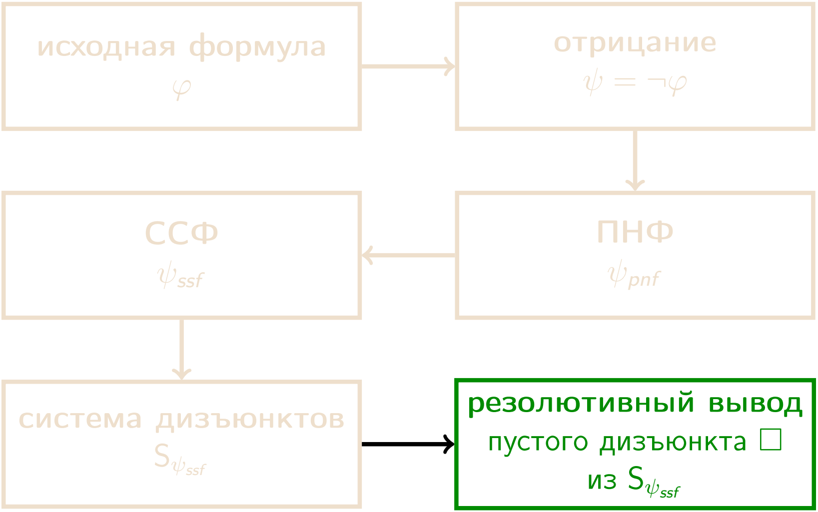
ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Общая схема метода резолюций



$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ система S_φ невыполнима

Общая схема метода резолюций



$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ система S_φ невыполнима

Резолютивный вывод

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Пусть E — логическое выражение и θ — подстановка

Тогда

- $E\theta$ — пример выражения E
- если $\mathsf{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- если $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Var}$ — биекция, то
  - θ — переименование
  - $E\theta$ — вариант выражения E

Резолютивный вывод

Пример

Рассмотрим выражение E: $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathbf{c})$
и подстановки

$$\begin{aligned}
\theta &= \{\mathrm{x}/\mathrm{u}, \mathrm{y}/\mathrm{z}, \mathrm{u}/\mathrm{x}, \mathrm{z}/\mathrm{y}\} \\
\eta &= \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathrm{y}/\mathrm{z}\} \\
\mu &= \{\mathrm{z}/\mathbf{c}\} \\
\varepsilon &= \{\}
\end{aligned}$$

Тогда:

- $E\eta$: $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{z}, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- $E\eta\mu$: $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- подстановки θ и ε — переименования
- $E\theta$: $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{z}, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Резолютивный вывод

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ \ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z})}{\neg R(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}), \mathbf{f}(\mathrm{y})), \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}))}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}),\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{y})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})), \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z}))$$

резольвента: $(\neg \mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x},\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathrm{y}),\mathrm{z})}{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathrm{z}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathrm{z})),\mathrm{z})}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{z}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathrm{z})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x},\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathrm{z})),\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{x}))$$

резольвента: $(\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathrm{y}),\mathrm{z}))\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$P(\mathbf{f}(x), y) \qquad \neg P(u, \mathbf{g}(v))$$

$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(???)\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\frac{[\mathsf{false} \vee]\, P(\mathbf{f}(x), y) \qquad \neg P(u, \mathbf{g}(v))\, [\vee\, \mathsf{false}]}{\square}$$

резольвента

$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(\mathsf{false} \vee \mathsf{false})\theta$

Резолютивный вывод

Лемма(о корректности правила резолюции)

Если D — резольвента дизъюнктов D_1, D_2, то $D_1, D_2 \models D$

Доказательство. (кванторные приставки опущены)

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$,

$D = (D_1' \vee D_2')\theta$ и $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда будет верно следующее:

$D_1 \models D_1\theta$	$D_2 \models D_2\theta$
$D_1 \models D_1'\theta \vee L_1\theta$	$D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta$
$D_1 \models D_1'\theta \vee L$	$D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L$
$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L$	$D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L$
$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L$	$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L$

Заметим, что (очевидно?)

если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$

Тогда $D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D$ ▼

Резолютивный вывод

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести $\square$ из противоречивой системы

Например:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathbf{c})$$
$$\neg\mathrm{P}(\mathbf{c}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathrm{y})$$

Система из таких двух дизъюнктов противоречива, но все резольвенты, резольвенты резольвент, ... этих дизъюнктов имеют ровно две литеры

Необходимо иметь правило, которое позволяет работать и с такими системами дизъюнктов

Резолютивный вывод

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Резолютивный вывод

Пример

склеиваемая пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x}) \quad \vee \quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathbf{f}(\mathrm{x})) \quad \vee \quad \neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathbf{c}),\mathrm{z})}{\mathrm{P}(\mathbf{c}) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{c},\mathbf{f}(\mathbf{c}),\mathbf{f}(\mathbf{c}))}$$

склейка

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{c}, \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathbf{c})\} \in \text{НОУ}(\neg\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathbf{f}(\mathrm{x})), \neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathbf{c}),\mathrm{z}))$$

склейка: $(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathbf{f}(\mathrm{x})))\theta$

Лемма(*о корректности правила склейки*)

Если D — склейка дизъюнкта D_1, то $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$\mathrm{D}_1, \ \dots, \ \mathrm{D}_i, \ \dots, \ \mathrm{D}_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводим из S, если существует
резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{z}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}) \\ \neg \mathrm{R}(\mathrm{y}) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод из S:

$$\begin{array}{rl} \text{вариант} & \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \mathbf{f}(\mathrm{y}_1)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}_1) \\ \text{вариант} & \neg \mathrm{R}(\mathrm{y}_2) \\ \text{резольвента} & \mathrm{P}(\mathrm{x}_3, \mathbf{f}(\mathrm{y}_3)) \\ \text{вариант} & \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_4), \mathrm{z}_4) \vee \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}_4, \mathrm{y}_4) \\ \text{склейка} & \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_5), \mathbf{f}(\mathrm{x}_5)) \\ \text{резольвента} & \square \end{array}$$

Пустой дизъюнкт **резолютивно выводим** из системы S

Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов системы наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например:

$$S = \{\neg P(x),\ P(\mathbf{f}(x))\}$$

НОУ$(P(x), P(\mathbf{f}(x))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S противоречива:

у формул $\forall x\ \neg P(x)$ и $\forall x\ P(\mathbf{f}(x))$ **нет общих моделей**

К **вариантам** дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{x_1/\mathbf{f}(x_2)\} \in \text{НОУ}(P(x_1), P(\mathbf{f}(x_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$\forall x\ \varphi \sim \forall y\ (\varphi\{x/y\})$, если <...>

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод успешен,
если он оканчивается пустым дизъюнктом $\square$

Успешный резолютивный вывод также называется резолютивным опровержением:

- предположим, что
  исходная система дизъюнктов выполнима
- тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода, также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов есть тождественно ложный ($\square$), а значит, расширенная система дизъюнктов невыполнима
- полученное противоречие
  опровергает выполнимость исходной системы (*доказывает невыполнимость методом "от противного"*)

Корректность резолютивного вывода

Теорема(*о корректности резолютивного вывода*)

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт, то система S противоречива

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносилен D, а значит, $\mathrm{D} \models \mathrm{D}'$

Корректность правила резолюции:

если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2, то $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \models \mathrm{D}''$

Корректность правила склейки:

если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3, то $\mathrm{D}_3 \models \mathrm{D}'''$

Заметим, что (очевидно?)

если $S \models \psi_1, \dots, S \models \psi_k$ и $\psi_1, \dots, \psi_k \models \psi$, то $S \models \psi$

Значит, любой дизъюнкт, выводимый из S, является логическим следствием S, и в частности, $S \models \square$

При этом дизъюнкт $\square$ не имеет ни одной модели, а значит, и система S не имеет ни одной модели ▼

Применение метода резолюций

Вспомним, для чего вводился резолютивный вывод

Рассмотрим такую формулу:

$$\varphi : \exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Задача: проверить общезначимость φ

$$\models \varphi\ ?$$

Покажем, как эта задача решается с помощью

метода резолюций

Применение метода резолюций

Решение

Этап 1. Перейти к проверке противоречивости отрицания $\psi = \neg\varphi$

$$\neg\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Этап 2. Построить равносильную предварённую нормальную форму ψ_{pnf}

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{z}\ \exists \mathrm{y}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))\,\&\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Этап 3. Построить равновыполнимую сколемовскую стандартную форму ψ_{ssf}

$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x})))\,\&\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Этап 4. Перейти к проверке противоречивости системы $S_{\psi_{ssf}}$

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathbf{g}(\mathrm{x})) \\ \neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}) \end{array}\right\}$$

Применение метода резолюций

Решение

Этап 5. Резолютивно вывести пустой дизъюнкт из $S_{\psi_{ssf}}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) \\ \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rl} \text{вариант} & \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_1)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)) \\ \text{вариант} & \mathrm{P}(\mathrm{x}_2) \\ \text{резольвента} & \mathrm{R}(\mathrm{x}_3, \mathbf{g}(\mathrm{x}_3)) \\ \text{вариант} & \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}_4, \mathrm{u}_4) \\ \text{резольвента} & \square \end{array}$$

Применение метода резолюций

Решение

Построен успешный резолютивный вывод пустого дизъюнкта из $S_{\psi_{ssf}}$

Следовательно,

- $\not\models S_\varphi$ (*теорема о корректности резолютивного вывода*)
- $\not\models \psi_{ssf}$ (*теорема о переходе к дизъюнктам*)
- $\not\models \psi_{pnf}$ (*теорема о сколемизации*)
- $\not\models \psi$ (*теорема о предварённой нормальной форме*)
- $\models \varphi$ (так как $\psi = \neg\varphi$)

Интерлюдия

Для *метода семантических таблиц* были исследованы

- корректность: верно ли, что наличие успешного вывода означает общезначимость формулы
- полнота: верно ли, что отсутствие успешных выводов означает необщезначимость формулы

Построение системы дизъюнктов S_φ по формуле φ — это несложная процедура, и вся “творческая” часть метода резолюций сконцентрирована в построении успешного резолютивного вывода

Если удалось показать, что из S_φ резолютивно выводим $\square$, то формула φ признаётся общезначимой (это корректность)

А верно ли, что из любой противоречивой системы дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт? (это полнота)

Эрбрановские интерпретации

Временно забудем про метод резолюций и попробуем выделить *общую часть* рассуждений о невыполнимости системы дизъюнктов S в заданной интерпретации $\mathcal{I}$

Для примера рассмотрим такую систему S: $\{\mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$

Для обоснования невыполнимости S достаточно заметить, что предмет, описываемый термом $\mathbf{f}(\mathbf{c})$, обладает свойством P согласно первому дизъюнкту и не обладает согласно второму

При этом неважно, как именно устроены предметная область и оценки $\bar{\mathbf{c}}$ и $\bar{\mathbf{f}}$, а важно только то, обладает ли свойством P предмет, описываемый каждым конкретным основным термом

Если в интерпретации $\mathcal{I}$ заменить каждый предмет на множество основных термов, описывающих этот предмет, и сохранить устройство оценки P, то в результате получится **эрбрановская интерпретация**

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановская интерпретация (она же $\mathcal{H}$-интерпретация) сигнатуры $\sigma = \langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$ состоит из

- **стандартной** предметной области $\mathcal{H}_\sigma$: эрбрановского универсума ($\mathcal{H}$-универсума)
  - $\mathcal{H}_\sigma$ — это множество всех *основных термов* сигнатуры
    - σ, если $\mathsf{Const} \neq \emptyset$
    - $\langle \{\mathbf{c}\}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$, если $\mathsf{Const} = \emptyset$ ($\mathbf{c}$ — эрбрановская константа)
- **стандартной** оценки констант $\overline{\mathsf{Const}_\mathcal{H}}$:
  - $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathsf{Const}$)
- **стандартной** оценки функциональных символов $\overline{\mathsf{Func}_\mathcal{H}}$:
  - $\bar{\mathbf{f}}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$ ($\mathbf{f}^{(n)} \in \mathsf{Func};\ t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$)
- **произвольной** оценки предикатных символов $\overline{\mathsf{Pred}}$

Первые три пункта означают, что $\mathcal{H}$-интерпретация — это интерпретация, построенная над *свободной алгеброй термов*

Все $\mathcal{H}$-интерпретации заданной сигнатуры отличаются друг от друга **только** выбором оценки $\overline{\mathsf{Pred}}$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский базис ($B_{\mathcal{H}}$) — это множество всех атомов, построенных над термами эрбрановского универсума

$\mathcal{H}$-интерпретация $\mathcal{I}$ **полностью** определяется тем, какие атомы из $B_{\mathcal{H}}$ в ней истинны, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}},\ \mathcal{I} \models A\}$$

Например,

- если $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$, то все основные атомы **ложны** в $\mathcal{I}$
- если $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$, то все основные атомы **истинны** в $\mathcal{I}$
- множество $B^{\mathcal{I}} \cap B^{\mathcal{J}}$ определяет интерпретацию, в которой истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$

Далее эрбрановские интерпретации будем отождествлять с подмножествами эрбрановского базиса

Эрбрановские интерпретации

Теорема(*об эрбрановских интерпретациях*)
Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель

Доказательство.

($\Leftarrow$): очевидно

($\Rightarrow$):

Каждой интерпретации $\mathcal{I} = \langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \rangle$ сопоставим такую эрбрановскую интерпретацию $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ той же сигнатуры σ:

- Если $\mathsf{Const} = \emptyset$, то добавим в $\mathcal{I}$ и произвольно оценим *эрбрановскую константу*
- Рассмотрим соответствие $\alpha : \mathcal{H}_\sigma \to \mathsf{D}$ следующего вида: $\alpha(t)$ — значение терма t в интерпретации $\mathcal{I}$
- $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k) \mid \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k) \in B_{\mathcal{H}}, \ \overline{\mathrm{P}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) = \mathbf{t}\}$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство. ($\Rightarrow$):

Пример соответствия $\mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$ сигнатуры $\sigma = \left\langle \{0, 1\}, \left\{+^{(2)}\right\}, \left\{=^{(2)}\right\} \right\rangle$:

- предметная область — множество всех целых чисел
- все символы сигнатуры оцениваются естественным арифметическим способом (числа 0, 1, операция сложения и отношение равенства чисел)

Тогда соответствующая интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ устроена так:

- $\mathcal{H}_\sigma = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ 0+0,\ 1+0,\ 0+(0+0),\ 0+(1+0), \\ 1,\ 0+1,\ 1+1,\ 0+(0+1),\ 0+(1+1), \dots \end{array} \right\}$
- $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \left\{ \begin{array}{l} 0=0,\ 0+1=0+1,\ 1+1=(1+0)+(0+1), \\ 1=1,\ 0+1=1+0,\ (1+1)+(0+0)=1+1, \dots \end{array} \right\}$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство. ($\Rightarrow$):

Пусть система дизъюнктов S выполнима, и $\mathcal{I}$ — модель для S

Предположим (*от противного*), что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$

Тогда в S содержится дизъюнкт D, такой что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models D$

Пусть, для ясности, $D = \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$,
где $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m$ — атомы

Тогда существуют термы $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$, такие что

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n] & \dots & \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_k[t_1, \dots, t_n] \\ \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n] & \dots & \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_m[t_1, \dots, t_n] \end{array}$$

По заданию интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$, верно и

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \dots & \mathcal{I} \not\models A_k[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \\ \mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \dots & \mathcal{I} \models B_m[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \end{array}$$

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$, что *противоречит* выбору $\mathcal{I}$

Значит, предположение “$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$” неверно, то есть $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models S$ ▼

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов противоречива

$\Leftrightarrow$

существует конечное противоречивое множество основных примеров дизъюнктов этой системы

Эта теорема — отправная точка обоснования полноты резолютивного вывода (в следующей лекции) согласно такой схеме:

- Рассмотрим противоречивую систему дизъюнктов S
- *По теореме Эрбрана*, существует конечная противоречивая система S' основных примеров дизъюнктов из S
- система S' устроена настолько просто, что из неё можно легко вывести $\square$
- Вывод $\square$ из S' можно (*не так легко, но всё же*) преобразовать в вывод $\square$ из S

Теорема Эрбрана (доказательство)

Система дизъюнктов S (*сигнатуры* σ) противоречива

$\Leftrightarrow$ (*теорема об эрбрановских интерпретациях*)

S не выполняется ни в одной $\mathcal{H}$-интерпретации

$\Leftrightarrow$ (*определение выполнимости и семантика квантора* $\forall$)

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существуют дизъюнкт $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \mathrm{D} \in S$ и предметы $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$, такие что $\mathcal{I} \not\models \mathrm{D}[t_1, \ldots, t_n]$

$\Leftrightarrow$ (*устройство $\mathcal{H}$-интерпретаций*)

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существует
основной пример D' дизъюнкта $\mathrm{D} \in S$, такой что $\mathcal{I} \not\models \mathrm{D}'$

$\Leftrightarrow$ (*то же другими словами*)

Множество $\mathcal{G}_S$ всех основных примеров дизъюнктов из S не выполняется ни в одной $\mathcal{H}$-интерпретации

$\Leftrightarrow$ (*теорема об эрбрановских интерпретациях*)

$\not\models \mathcal{G}_S$

Теорема Эрбрана (доказательство)

Вспомним *теорему компактности Мальцева:*
$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует **конечное** подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$

Если на место φ подставить произвольную противоречивую формулу, то немедленно получается такое *следствие*:
$\not\models \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad$ существует конечное подмножество Γ' множества Γ, такое что $\not\models \Gamma'$

Применим это *следствие* к множеству $\mathcal{G}_S$:

$(\not\models S \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow) \not\models \mathcal{G}_S$
$\Leftrightarrow$
существует **конечное** противоречивое
подмножество $\mathcal{G}'$ множества $\mathcal{G}_S$ ▼