Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Лекции по основам кибернетики

Вариат 2016 г. (гр. 418), глава 5

Москва 2016

Оглавление

Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля. Данный вариант курса ориентирован на студентов, кафедры математической кибернетики (318, 418 группы), которые изучают его в 6 и 7 семестрах.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкретное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно пытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно пытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

В четвертой главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывается полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В пятой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем: построение тестов для таблиц; синтез самокорректирующихся контактных схем и схем из функциональных элементов (СФЭ) в некоторых базисах; синтез надёжных СФЭ из ненадёжных функциональных элементов.

В шестой главе излагаются основные вопросы, связанные с задачей синтеза схем для функций из специальных классов.

Заметим, что 2 и 3 главы программы 318 группы 2016 г. соответствуют, в основном, 2 главе программы 320–328 групп за 2016 г., а 4 глава программы 418 группы — 3 главе программы 320–328 групп.

Глава 5

Надежность и контроль управляющих систем

§1 Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста

Для управляющей системы (схемы) без памяти, функционирование которой описывается дискретной функцией или, в общем случае, вектор-функцией, может быть сформулирована следующая модель, в рамках которой обычно рассматриваются вопросы её надёжности и контроля (см. [27, 29, 30]). Предполагается, что имеется некоторый «внешний» источник неисправностей (источник помех) И, под действием которого рассматриваемая схема Σ может переходить в одно из своих «неисправных состояний» (схем), определяемых этим источником. Пусть схеме $\Sigma = \Sigma_1$, реализующей функцию $f = f_1$ от входных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и источнику неисправностей И соответствуют «неисправные» состояния (схемы) $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, где схема $\Sigma_i,\ i = 2, \ldots, s$, реализует функцию f_i от переменных x. При этом все состояния (как исправное $\Sigma = \Sigma_1$, так и неисправные $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$) разбиваются на классы (функционально) неотличимых состояний, то есть классы эквивалентности по отношению равенства реализуемых функций, и рассматриваются далее с точностью до неотличимости. В дальнейшем, говоря о ненадежной схеме Σ, будем иметь в виду пару $(\Sigma, \text{И})$ и (или) соответствующее ей множество схем вместе с теми функциями, которые они реализуют. Для простоты рассмотрения будем считать, что все переменные и функции являются булевскими, хотя многие излагаемые далее результаты без существенных изменений переносятся на случай многозначных функций, случай вектор-функций и другие более общие случаи.

Пусть $(\Sigma, \text{И})$ — указанная выше модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, в которых реализуются ФАЛ $f = f_1, f_2, \ldots, f_s$ соответственно от БП $X(n)$, определенные на множестве наборов $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу M, $M \in B^{p,s}$, где

$$M\langle i, j\rangle = f_j(\alpha_i),$$

считая, что i-й строке (j-му столбцу) этой таблицы соответствует набор α_i (соответственно функция f_j и состояние Σ_j). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется *отделимой по столбцам* (соответственно *строкам*) матрицей. Заметим, что каждому классу неотличимых состояний модели $(\Sigma, \text{И})$ соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M и рассмотрим отделимую по столбцам матрицу $\widehat{M}$, состоящую из всех различных столбцов матрицы M. При этом будем считать, что каждый столбец матрицы $\widehat{M}$ связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели $(\Sigma, \text{И})$, и будем называть $\widehat{M}$ *таблицей контроля* данной модели. Для простоты будем, как правило, предполагать, что все состояния модели $(\Sigma, \text{И})$ попарно отличимы, то есть, $M = \widehat{M}$. Это предположение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений.

Пусть, далее, помимо таблицы контроля M для модели $(\Sigma, \text{И})$ задана цель контроля, то есть указано множество $\mathcal{N}$, состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары состояний (столбцов матрицы M) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности, если $\mathcal{N}$ состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является *диагностика схемы*, а если $\mathcal{N} = \{(1,2), \ldots, (1,t)\}$, то — *проверка исправности схемы*. Множество строк матрицы M с номерами из T, $T \subseteq [1,p]$, называется *тестом для матрицы M относительно множества $\mathcal{N}$*, или, иначе, *тестом для* $(M, \mathcal{N})$, если для любой пары (i,j) из $\mathcal{N}$ существует t, $t \in T$, такое, что $M\langle t,i\rangle \neq M\langle t,j\rangle$. Мощность теста называется также его *длиной*.

Заметим, что множество, состоящее из всех строк таблицы контроля, всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется *тупиковым*, а тест, который имеет минимальную мощность, — *минимальным*. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется *диагностическим* (соответственно *проверяющим*).

Будем говорить, что множество наборов τ, $\tau \subseteq A$, образует *тест для модели* $(\Sigma, \text{И})$ *относительно цели контроля* $\mathcal{N}$, или, иначе, *тест для* $(\Sigma, \text{И}, \mathcal{N})$, если соответствующие наборам из τ строки матрицы M образуют тест для $(M, \mathcal{N})$. Все введенные выше понятия, которые касаются тестов для таблиц, без изменений переносятся на случай тестов для ненадежных схем.

Для описания тестов можно ввести функцию, аналогичную функции покрытия из §6 главы 1. Пусть M, $M \in B^{p,s}$, — отделимая по столбцам матрица, а $\mathcal{N}$ — связанная с ней цель контроля. Сопоставим i-й строке, $i \in [1,p]$, матрицы M БП y_i, а каждому набору β, $\beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, \ldots, y_p)$ — множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1,p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta\langle i\rangle = 1$. Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой

$F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует тест для $(M, \mathcal{N})$, и будем называть эту ФАЛ *функцией теста* для $(M, \mathcal{N})$. Сопоставим паре $(M, \mathcal{N})$ матрицу $\mathcal{M}$ из множества $B^{p,S}$, $S = |\mathcal{N}|$, столбцы которой пронумерованы парами из $\mathcal{N}$, а ее столбец с номером $(i, j) \in \mathcal{N}$ получается в результате поразрядного сложения по модулю 2 столбцов с номерами i и j матрицы M. Заметим, что строки матрицы M с номерами из множества T, $T \subseteq [1, p]$, образуют тест (тупиковый тест, минимальный тест) для пары $(M, \mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $\mathcal{M}$ с номерами из T образуют покрытие (тупиковое покрытие, покрытие минимальной длины) матрицы $\mathcal{M}$. Отсюда вытекает, в частности, что ФАЛ теста F для пары $(M, \mathcal{N})$ является одновременно ФАЛ покрытия для матрицы $\mathcal{M}$ и обратно, а значит для нее, в силу леммы 6.1 главы 1, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Функция теста $f(y_1, \ldots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ*

$$f(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{(i,j)\in\mathcal{N}} \Bigg(\bigvee_{\substack{1\leqslant t\leqslant p \\ M\langle t,i\rangle \neq M\langle t,j\rangle}} y_t \Bigg), \tag{1.1}$$

Следствие. *Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \ldots, y_p)$, получающаяся из КНФ* (1.1) *в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$ и обратно.*

На данной лемме основан следующий алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы M относительно цели контроля $\mathcal{N}$:

1. выписываем для функции теста КНФ вида (1.1);

2. раскрывая в ней скобки и приводя подобные, получаем сокращенную ДНФ функции теста;
3. сопоставляем каждой элементарной конъюнкции этой сокращенной ДНФ тупиковый тест.

Так, например, для построения всех тупиковых диагностических тестов матрицы M вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

выпишем соответствующую ей КНФ (1.1):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \cdot (y_2 \vee y_4) \cdot (y_1 \vee y_3 \vee y_4).$$

Раскрывая в этой КНФ скобки и приводя подобные, получим сокращенную ДНФ для функции теста:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2 \vee y_1y_4 \vee y_2y_3 \vee y_2y_4 \vee y_3y_4.$$

Следовательно, тупиковыми диагностическими тестами матрицы M являются множества ее строк с номерами

$$\{1,2\}, \ \{1,4\}, \ \{2,3\}, \ \{2,4\}, \ \{3,4\}.$$

Для упрощения преобразований, связанных с применением описанного алгоритма, вместо исходной матрицы M можно рассматривать отделимую по строкам матрицу $\check{M}$, получающуюся из M удалением повторных вхождений одинаковых строк. При этом, очевидно, любой тупиковый тест матрицы M получается из тупикового теста той же длины матрицы $\check{M}$ в результате замены каждой его строки равной ей строкой матрицы M и обратно.

Рассмотрим, далее, некоторые оценки длины диагностических тестов для матриц с заданным числом столбцов.

Лемма 1.2. *Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s-1)$.*

Доказательство. Пусть $M \in B^{p,s}$ и пусть, для определенности, первые t строк матрицы M образуют ее тупиковый диагностический тест. Очевидно, что в этом случае все столбцы матрицы $\widehat{M}$, состоящей из первых t строк матрицы M, различны и, следовательно, $s \leqslant 2^t$, то есть $t \geqslant \lceil \log s \rceil$, поскольку число различных булевых столбцов высоты t равно 2^t. Требуемая нижняя оценка длины диагностического теста установлена.

Докажем теперь, что $t \leqslant (s-1)$. Для этого на множестве столбцов матрицы $\widehat{M}$ при любом q, $q \in [1,t]$, определим отношение эквивалентности $\underset{q}{\sim}$ так, что $m' \underset{q}{\sim} m''$ тогда и только тогда, когда столбцы m' и m'' матрицы $\widehat{M}$ совпадают в строках с номерами из отрезка $[1,q]$. Будем считать, по определению, что $\underset{0}{\sim}$ — тривиальное отношение с одним классом эквивалентности, а число классов эквивалентности по отношению $\underset{q}{\sim}$, где $q \in [1,t]$, будем обозначать через $\theta\,(q)$.

Из общих свойств отношений эквивалентности вытекает, что при любом q, $q \in [1,t)$, каждый класс эквивалентности по отношению $\underset{q}{\sim}$ либо является классом эквивалентности по отношению $\underset{q+1}{\sim}$, либо представляет собой объединение двух таких классов и, следовательно, $\theta\,(q) \leqslant \theta\,(q+1)$. В силу тупиковости теста полученное неравенство является строгим, так как равенство $\theta\,(q) = \theta\,(q+1)$ возможно тогда и только тогда, когда каждый класс эквивалентности отношения $\underset{q}{\sim}$ является классом эквивалентности отношения $\underset{q+1}{\sim}$ и обратно, то есть строка с номером $(q+1)$ является «лишней» в рассматриваемом тесте.

Из диагностичности теста вытекает, что $\theta\,(t) = s$, и, таким образом, выполняются соотношения

$$1 = \theta(0) < \theta(1) < \cdots < \theta(t) = s,$$

из которых следует, что $t \leqslant (s-1)$.

Лемма доказана. □

Замечание 1. Указанные в лемме границы достигаются: нижняя — на любой отделимой по столбцам матрице из $B^{p,s}$, где $p = \lceil \log s \rceil$, а верхняя — на матрице из $B^{s-1,s}$, все столбцы которой различны и содержат не более одной единицы (обе матрицы имеют единственный диагностический тест, состоящий из всех строк).

Следующее утверждение характеризует «типичное» значение длины диагностического теста, то есть длину минимального диагностического теста у «почти всех» таблиц контроля.

Лемма 1.3. *Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ и $p(s)$ — целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента s, для которых*

$$t(s) = \lceil 2\log s \rceil + \varphi(s), \quad p(s) \geqslant t(s), \quad \varphi(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Доказательство. Заметим, что все матрицы из $B^{p,s}$, где $p = p(s)$, у которых первые $t = t(s)$ строк образуют диагностический тест, отделимы по столбцам. Легко видеть также, что число таких матриц равно

$$2^t\left(2^t-1\right)\cdots\left(2^t-s+1\right)\cdot 2^{(p-t)s} = \\ = 2^{ps}\left(1-\frac{1}{2^t}\right)\cdots\left(1-\frac{(s-1)}{2^t}\right),$$

а их доля среди всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ не меньше, чем

$$\left(1-\frac{1}{2^t}\right)\cdots\left(1-\frac{(s-1)}{2^t}\right)\geqslant 1-\frac{s^2}{2^t}\geqslant 1-2^{-2\varphi(s)},$$

и, следовательно, стремится к 1 при s стремящемся к бесконечности.

Лемма доказана. □

Следствие. *Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ длина минимального диагностического теста не больше, чем $2\log s+\varphi(s)$.*

§2 Самокорректирующиеся контактные схемы и методы их постороения. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, корректирующих один обрыв (одно замыкание)

Рассмотрим вопрос повышения надежности схем на примере т. н. самокорректирующихся КС. Будем считать, что контакты рассматриваемых КС могут выходить из строя, переходя в одно из двух возможных неисправных состояний: состояние *обрыва*, когда контакт не проводит, и состояние *замыкания*, когда контакт проводит при любых значениях управляющей им БП.

Будем говорить, что КС Σ является (p,q)-самокорректирующейся КС или, иначе, корректирует p обрывов и q замыканий, где $p\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$, если любая КС Σ', которая может быть получена из КС Σ в результате обрыва не более чем p, и замыкания не более, чем q, контактов, эквивалентна Σ. Обозначим через $\mathcal{U}^K_{(p,q)}$ множество всех (p,q)-самокорректирующхся КС и заметим, что $\mathcal{U}^K_{(0,0)}=\mathcal{U}^K$. Заметим, также, что для любой КС Σ КС $\Sigma^{(p,q)}$, получающаяся из Σ в результате замены любого ее контакта вида x_i^σ π-схемой, состоящей из $(q+1)$ последовательно соединенного пучка, каждый из которых, включает в себя $(p+1)$ параллельно соединённый контакт вида x_i^σ, принадлежит $\mathcal{U}_{(p,q)}^K$.

Построение КС $\Sigma^{(p,q)}$, основанное на последовательном и (или) параллельном дублировании контактов КС Σ, является простейшим способом получения самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной КС. Он дает следующую тривиальную верхнюю оценку сложности самокорректирующихся КС, эквивалентных данной.

Лемма 2.1. *Для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ', $\Sigma' \in \mathcal{U}_{(p,q)}^K$, для которой*

$$L(\Sigma') \leqslant (p+1)(q+1)L(\Sigma).$$

Рассмотрим, далее, нетривильный способ построения $(1,0)$- или $(0,1)$-самокорректирующихся КС, связанный с коррекцией одного обрыва или одного замыкания в т. н. однородных подсхемах. Этот метод был впервые предложен в работе С. В. Яблонского и Ю. Г. Потапова, а также в работе Х. А. Мадатяна (см., например, [30]).

Будем называть *однородной* любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. Заметим, что в любой такой КС, состоящей из контактов вида x_i^σ, ФАЛ проводимости между любыми двумя полюсами равна x_i^σ. Отсюда следует, в частности, что любые две однородные КС, состоящие из контактов одного типа и имеющие один и тот же набор полюсов, эквивалентны.

Обозначим через $C_m(x_i^\sigma)$ $(Z_m(x_i^\sigma))$ m-полюсную однородную КС, которая состоит из m контактов вида x_i^σ и представляет собой цикл, проходящий через все полюса (соответсвенно звезду из контактов, соединяющих ее центр с полюсами). Очевидно, что $C_m(x_i^\sigma) \in \mathcal{U}^K_{(1,0)}$ и $Z_m(x_i^\sigma) \in \mathcal{U}^K_{(0,1)}$.

Представление КС Σ в виде объединения её однородных подсхем без общих контактов будем называть *однородным разбиением* КС Σ, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$. Если $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\zeta$ — однородное разбиение КС Σ, а эквивалентная ей КС Σ' (КС Σ'') получается из КС Σ в результате замены каждой подсхемы Σ_i эквивалентной ей КС Σ_i' вида C_m (соответственно КС Σ_i'' вида Z_m), то $\Sigma' \in \mathcal{U}^K_{(1,0)}$ (соответственно $\Sigma'' \in \mathcal{U}^K_{(0,1)}$). Заметим, что при этом

$$L(\Sigma_i') \leqslant L(\Sigma_i) + 1, \ L(\Sigma_i'') \leqslant L(\Sigma_i) + 1$$

и, следовательно,

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta, \ L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta$$

Указанный нетривиальный способ построения $(0,1)$- или $(1,0)$-самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной, даёт следующую оценку их сложности.

Лемма 2.2. *Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1,0)$- и $(0,1)$-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что*

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma), \ L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma). \tag{2.1}$$

Этот способ позволяет установить асимптотику функции Шеннона для сложности КС из $\mathcal{U}^K_{(0,1)}$ и $\mathcal{U}^K_{(1,0)}$.

Для ФАЛ f и $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ определим её (p,q)-самокорректирующуюся контактную сложность $L^K_{(p,q)}(f)$ как минимальную сложность КС Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^K_{(p,q)}$, реализующей f, а затем введем соответствующую функцию Шеннона

$$L^K_{(p,q)}(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^K_{(p,q)}(f).$$

Очевидно, что

$$L^K(f) \leqslant L^K_{(p,q)}(f) \text{ и } L^K(n) \leqslant L^K_{(p,q)}(n) \qquad (2.2)$$

так как $\mathcal{U}^K_{(p,q)} \subseteq \mathcal{U}^K$.

Теорема 2.1. *Для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место следующие асимптотические равенства*

$$L^K_{(1,0)}(n) \sim L^K_{(0,1)}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемые нижние оценки для функций Шеннона $L^K_{(1,0)}(n)$ и $L^K_{(0,1)}(n)$ вытекают из (2.2) и мощностных нижних оценок функции Шеннона $L^K(n)$ из теоремы 2.1 главы 3.

Для получения соответствующих верхних оценок возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим для нее КС Σ_f по теореме 7.1 главы 4 [13]. Из замечания к этой теореме вытекает, что при указанных там значениях параметров

$$\zeta(\Sigma_f) = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

и поэтому, в соответствии с леммой 2.2 и (2.1), существуют КС $\Sigma'_f \in \mathcal{U}^K_{(1,0)}$ и КС $\Sigma''_f \in \mathcal{U}^K_{(0,1)}$, которые реализуют ФАЛ f со сложностью, асимптотически не превосходящей $\frac{2^n}{n}$.

Теорема доказана. □

Для построения нетривиальных КС, корректирующих более одного обрыва или замыкания, можно использовать следующую конструкцию. Пусть КС Σ_i, $i = 1, \ldots, r$, реализует ФАЛ f и корректирует t_i обрывов (замыканий), тогда КС Σ, которая получается в результате параллельного (последовательного) соединения $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, реализует ФАЛ f с коррекцией $t_1 + \ldots + t_r + r - 1$ обрывов (замыканий).

Интересный пример нетривиальной самокоррекции КС даёт контактная схема, реализующая ФАЛ ℓ_n и корректирующая один обрыв, которая получается из схемы Кардо добавлением 4 дополнительных контактов, проведённых следующим образом: для каждого σ, $\sigma \in B$, из входа (выхода) этой схемы, проведём контакт вида x_n^{σ} (соответственно x_1^{σ}) в вершину, соединённую контактом вида $x_n^{\bar{\sigma}}$ (соответственно $x_1^{\bar{\sigma}}$) с её выходом (соответственно входом). Указанная схема является минимальной в силу леммы 2.1 главы 3 и, следовательно, справедливо утверждение.

Лемма 2.3. *Для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место равенства*

$$L^{\text{К}}_{(0,1)}\big(\ell_n\big) = L^{\text{К}}_{(0,1)}\big(\bar{\ell}_n\big) = 4n.$$

§3 Оценка надёжности схем. Асимптотически наилучший метод синтеза сколь угодно надёжных СФЭ в базисе из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования

Для определения уровня надёжности схемы часто применяется вероятностный подход. Пусть $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ — ненадёжная схема Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, переходящая под действием источника неисправностей И в состояния $\Sigma = \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$, в которых реализуются функции $F = F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(t)}$ соответственно, определённые на множестве наборов $\mathcal{N} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$. Пусть далее вероятность того, что схема Σ находится в состоянии $\Sigma^{(i)}$, известна и равна π_i, где $i = 1, \ldots, t$, $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$ и $\sum_{i=1}^{t} \pi_i = 1$. Введём следующие величины, характеризующие ненадёжность схемы Σ в модели $\mathcal{M}$:

$$\xi(\mathcal{M}) = \sum_{\substack{F^{(j)} \neq F \\ 2 \leqslant j \leqslant t}} \pi_j, \tag{3.1}$$

$$\xi(\mathcal{M}, \beta) = \sum_{\substack{F^{(j)}(\beta) \neq F(\beta) \\ 2 \leqslant j \leqslant t}} \pi_j, \tag{3.2}$$

где $\beta \in \mathcal{N}$, а затем положим

$$\eta(\mathcal{M}) = \max_{\beta \in \mathcal{N}} \xi(\mathcal{M}, \beta), \tag{3.3}$$

$$q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n) = \xi\big(\mathcal{M}, (x_1, \ldots, x_n)\big). \tag{3.4}$$

Заметим, что величина $\xi(\mathcal{M})$ ($\xi(\mathcal{M}, \beta)$) задаёт вероятность того, что схема Σ реализует функцию, не равную F (соответственно не равную F на наборе β), и поэтому

$$\eta(\mathcal{M}) \leqslant \xi(\mathcal{M}) \leqslant p\eta(\mathcal{M}),$$

откуда следует, в частности, что $\eta(\mathcal{M}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi(\mathcal{M}) = 0$. Схема Σ считается *абсолютно надёжной* в модели $\mathcal{M}$, если $\eta(\mathcal{M}) = 0$ (или $\xi(\mathcal{M}) = 0$). Это означает, что все состояния схемы Σ, имеющие положительную вероятность, эквивалентны Σ. Функция $q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией вероятности неправильного срабатывания схемы* Σ. В дальнейшем, при записи введённых величин вместо пары $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ будем писать просто Σ, если из контекста ясно, какой источник неисправностей имеется в виду.

Рассмотрим вероятностный подход на примере ненадёжных СФЭ над базисом $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует булеву функцию $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, известно *распределение режимов работы ФЭ* $\mathcal{E}_i$, то есть для каждого j, $j = 1, \ldots, 2^{2^{k_i}}$, известна и равна $\pi_{i,j}$

вероятность того, что ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует j-ю булеву функцию от булевых переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ (если считать, что все булевы функции от переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ упорядочены в соответствии с номерами их столбцов значений). При нахождении ненадёжности схемы Σ над базисом Б будем считать, что все её ФЭ переходят в свои состояния независимо друг от друга и что любое состояние СФЭ Σ определяется состояниями ФЭ Σ. В соответствии с этим на основе введённых выше соотношений (3.1)–(3.4) можно найти значения ненадёжности $\xi(\Sigma)$ и $\eta(\Sigma)$ для СФЭ Σ, а также распределение режимов её работы и функцию $q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$.

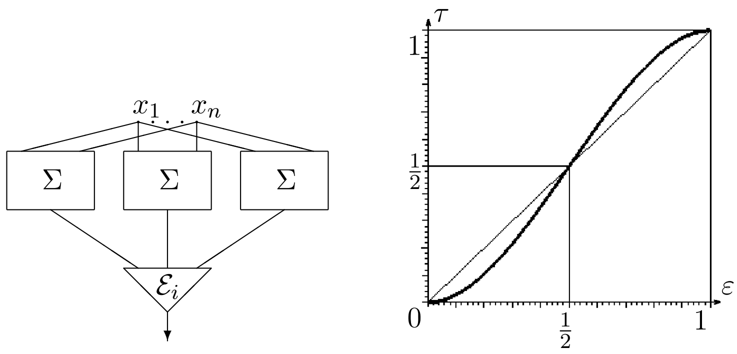
Считается, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ допускает *сколь угодно надёжную реализацию* в базисе Б, если для любого ε, $\varepsilon > 0$, существует СФЭ Σ над Б, которая реализует f и для которой $\xi(\Sigma) < \varepsilon$. Повышение надёжности при реализации ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ возможно, если в базисе Б имеется абсолютно надёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$, реализующий функцию голосования $H(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Действительно, если СФЭ Σ реализует f и $\eta(\Sigma) = \varepsilon$, то для ненадёжности СФЭ $\Sigma^{(1)}$, показанной на рис. 3.1a, которая тоже реализует f, имеет место равенство

$$\eta\big(\Sigma^{(1)}\big) = \theta(\varepsilon) = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$$

(график функции $\tau = \theta(\varepsilon)$ показан на рис. 3.1b).

Заметим, что $\theta(0) = 0$, $\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, что первые две производные функции $\theta(\varepsilon)$ на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ неотрицательны, причём $\theta''(0) = \theta''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ и $\theta'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $\theta'(0) > 0$, и что $\theta(\varepsilon) < \varepsilon$, если $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Поэтому, рекурсивно применяя указанную процедуру повышения надёжности к СФЭ $\Sigma^{(k)}$, результатом которой является СФЭ $\Sigma^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, построим последовательность СФЭ $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(k)}, \ldots$, реализующих f, для которой

$$\eta(\Sigma^{(k)}) \leqslant \theta\big(\eta(\Sigma^{(k-1)})\big) \leqslant \theta_k\big(\eta(\Sigma)\big) \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$



(a) (b)

Рис. 3.1

где $\theta_0(\varepsilon) = \varepsilon$, $\theta_k(\varepsilon) = \theta(\theta_{k-1}(\varepsilon))$. Заметим, что при этом

$$\theta_k(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{3}(3\varepsilon)^{2^k},$$

если $\varepsilon < \frac{1}{6}$. Заметим также, что СФЭ $\Sigma^{(k)}$ содержит 3^k подсхем вида Σ и $1 + 3 + \ldots + 3^{k-1} = \frac{3^k-1}{2}$ ФЭ $\mathcal{E}_i$.

Аналогичные построения и оценки применимы и для повышения ξ-ненадёжности СФЭ.

Пусть базис Б допускает построение сколь угодно надёжных СФЭ для любой ФАЛ. Определим в этом случае для произвольной ФАЛ f и любого ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, функционал сложности $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(f, \varepsilon)$, равный минимальной из сложностей тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, которые реализуют ФАЛ f и для которых $\eta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n, \varepsilon) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(f, \varepsilon),$$

для которой (см. [13, гл. IV, §4, теорема 4.3]) будет справедлива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(n, \varepsilon) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \tag{3.5}$$

где $\rho_{\text{Б}}$ — приведённый вес базиса Б. Заметим, что в соответствии с высказанными ранее соображениями для любого действительного p, $0 \leqslant p < \frac{1}{2}$, указанным свойством полноты обладает базис $\widehat{\text{Б}}_p$, состоящий из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$, $\mathcal{E}_{\vee}$, $\mathcal{E}_{\neg}$ и $\mathcal{E}_H$ веса 1 с базисными ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1$ и $H(x_1, x_2, x_3)$ соответственно, для которых $\eta(\mathcal{E}_{\varphi}) = p$, если $\varphi \in \{\&, \vee, \neg\}$, и $\eta(\mathcal{E}_H) = 0$. Следовательно, в силу (3.5)

$$L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\text{Б}}_p}(n, \varepsilon) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \tag{3.6}$$

так как $\rho_{\widehat{\text{Б}}_p} = \frac{1}{2}$.

Теорема 3.1. *Для $n = 1, 2, \ldots$ существует стремящаяся к нулю неотрицательная последовательность $\varepsilon = \varepsilon(n)$ такая, что*

$$L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\text{Б}}_p}\bigl(n, \varepsilon(n)\bigr) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n},$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка теоремы вытекает из (3.6).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки теоремы возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, сложность которой асимптотически не больше, чем $\frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}$, а η-ненадёжность не превосходит $\varepsilon(n)$.

Для этого в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза СФЭ в произвольном базисе Б (см. [13, гл. IV, §4, теорема 4.1]) выберем для базиса $\text{Б} = \widehat{\text{Б}}_p$ натуральные параметры m, t, s и r такие, что

$$s \leqslant 2^m, \quad r = 2t + 1, \quad \frac{2^m}{s} \leqslant r \leqslant \frac{2^m}{s} + 2, \quad m < n. \tag{3.7}$$

Построим, далее, из t ФЭ $\mathcal{E}_H$ абсолютную формулу $\mathcal{F}$ с r входами, которая реализует ФАЛ $\varphi(y_1,\ldots,y_r)$, и пусть G, $G\subseteq P_2(n)$, — φ-УМ порядка m такое, что $|G|\leqslant r\cdot 2^s$.

Возьмём произвольную ФАЛ f, $f\in P_2(n)$, и, полагая, как обычно, $x'=(x_1,\ldots,x_m)$, $x''=(x_{m+1},\ldots,x_m)$ представим её в следующем виде

$$f(x',x'')=\bigvee_{\sigma''\in B^{n-m}} K_{\sigma''}(x')\cdot f_{\sigma''}(x'')=\bigvee_{\sigma''\in B^{n-m}} K_{\sigma''}(x')\cdot\varphi\big(g^{(1)}_{\sigma''},\ldots,g^{(r)}_{\sigma''}\big),\tag{3.8}$$

где $f_{\sigma''}(x')=f(x',\sigma'')$, $K_{\sigma''}(x'')$ — элементарная конъюнкция ранга $(n-m)$ от БП x'', которая равна 1 на наборе σ'', а ФАЛ $g^{(1)}_{\sigma''},\ldots,g^{(r)}_{\sigma''}$ выбраны из G так, чтобы

$$f_{\sigma''}(x')=\varphi\big(g^{(1)}_{\sigma''},\ldots,g^{(r)}_{\sigma''}\big).\tag{3.9}$$

Построим СФЭ Σ_f, $\Sigma_f\in\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\widehat{\text{Б}}_p}$, реализующую ФАЛ f в соответствии с (3.8) и состоящую из следующих подсхем:

1) подсхемы Σ_G над базисом $\text{Б}_0=\{\mathcal{E}_\&,\mathcal{E}_\vee,\mathcal{E}_\neg\}$, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ от БП x' путём моделирования π-схем, построенных по совершенным ДНФ ФАЛ из G на базе контактного дерева от БП x', и для которой

$$L(\Sigma_G)\leqslant 4(2^m-1)\cdot r\cdot 2^s\leqslant r\cdot 2^{m+s+2};\tag{3.10}$$

2) подсхемы Σ', которая содержит СФЭ Σ_G в качестве своей подсхемы, для каждого набора σ'', $\sigma''\in B^{n-m}$, включает в себя формулу $\mathcal{F}$ из t ФЭ $\mathcal{E}_H$, реализующую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в соответствии с (3.9), и имеет сложность

$$L(\Sigma')\leqslant t\cdot 2^{n-m}+L(\Sigma_G);\tag{3.11}$$

3) подсхемы Σ'', представляющей собой мультиплексорную СФЭ порядка $(n-m)$ и сложности
$$L(\Sigma'') \leqslant 4 \cdot 2^{n-m} \tag{3.12}$$
над базисом Б_0, адресными входами которой являются БП x'', а информационные входы присоединены к выходам СФЭ Σ' в соответствии с (3.8).

Таким образом, учитывая (3.7)–(3.12), получим
$$\begin{aligned} L_H\bigl(\Sigma_f\bigr) \leqslant t \cdot 2^{n-m} \leqslant \frac{1}{2}\Bigl(\frac{2^m}{s}+1\Bigr) \cdot 2^{n-m} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{s} + 2^{n-m-1}, \end{aligned} \tag{3.13}$$
$$\begin{aligned} L_{\text{Б}_0}\bigl(\Sigma_f\bigr) \leqslant 4 \cdot 2^{n-m} + \Bigl(\frac{2^m}{s}+1\Bigr) \cdot 2^{m+s+1} \leqslant \\ \leqslant 4 \cdot 2^{n-m} + \frac{2^{2m+s+1}}{s} + 2^{m+s+1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Будем теперь повышать надёжность СФЭ Σ_f с помощью абсолютно надёжного ФЭ $\mathcal{E}_H$ и тех приёмов, которые описаны в начале параграфа. Найдём, сначала, натуральное $\hat{l}$, для которого $\theta_{\hat{l}}(p) = \hat{p} < \frac{1}{6}$, и построим СФЭ $\widehat{\Sigma}_f$ заменой каждого ФЭ $\mathcal{E}_\varphi$, $\varphi \in \text{Б}_0$, в СФЭ Σ_f схемой (макроэлементом) $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi = \mathcal{E}_\varphi^{(\hat{l})}$. Пусть, далее, l — натуральный параметр, а СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ получается из СФЭ $\widehat{\Sigma}_f$ заменой каждого её макроэлемента $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi$, $\varphi \in \text{Б}_0$, схемой $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi^{(l)}$.

Схема $\widetilde{\Sigma}_f$ реализует, очевидно, ФАЛ f, а из неравенств (3.13), (3.14) и $\hat{p} < \frac{1}{6}$ с учётом приведённых в начале параграфа соотношений, касающихся повышения надёжности, следует, что
$$L\bigl(\widetilde{\Sigma}_f\bigr) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{s} + O\biggl(3^l\Bigl(2^{n-m} + \frac{2^{s+2m}}{s}\Bigr)\biggr), \tag{3.15}$$
$$\eta\bigl(\widetilde{\Sigma}_f\bigr) = O\biggl(3^l\Bigl(2^{n-m} + \frac{2^{s+2m}}{s}\Bigr) \cdot 2^{-2^l}\biggr).$$

Из полученных оценок следует, что при достаточно больших значениях n и

$$l = \lceil \log n \rceil, \; m = 2l + \lceil 2 \log n \rceil, \; s = \lceil n - 3m - l \cdot \log 3 \rceil \quad (3.16)$$

условия (3.7) будут выполнены, а построенная СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ будет удовлетворять требуемым соотношениям

$$L\big(\widetilde{\Sigma}_f\big) \lesssim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \qquad \eta\big(\widetilde{\Sigma}_f\big) = o(1).$$

Теорема доказана. □

§4 Самокорректирующиеся СФЭ в базисах из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования, асимптотически наилучшие методы их синтеза

Пусть базис Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, имеет вес $\mathcal{L}_i$ и реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ с η-ненадёжностью η_i, $0 \leqslant \eta_i < \frac{1}{2}$. При этом ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, в соответствии с §3 считается (абсолютно) надёжным, если $\eta_i = 0$ и *ненадёжным* в противном случае. Предполагается, что ненадёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$ при выходе из строя может переходить в любое из $2^{2^{k_i}}$ неисправных состояний, в которых реализуются все различные ФАЛ от его входных БП.

Будем говорить, что СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, *корректирует d ошибок*, если она не изменяет своё функционирование при выходе из строя любых не более, чем d, ненадёжных элементов. Заметим, что если в базисе Б возможна (см. §3) сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ, то для любого натурального d и любой ФАЛ в нём возможно построение СФЭ, которая реализует эту ФАЛ и корректирует d ошибок.

В указанном случае для произвольной ФАЛ f и натурального d определим функционал сложности $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(f,d)$, равный минимальной сложности тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, которые реализуют ФАЛ f и корректируют d ошибок. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n,d) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(f,d),$$

для которой аналогично (3.5) будет справедлива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n,d) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}. \tag{4.1}$$

Будем рассматривать далее базис $\widehat{\text{Б}}$, состоящий из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$, $\mathcal{E}_{\vee}$, $\mathcal{E}_{\neg}$ и $\mathcal{E}_H$ веса 1, из которых абсолютно надёжным является только ФЭ $\mathcal{E}_H$, а также базис $\check{\text{Б}}$, который отличается от $\widehat{\text{Б}}$ лишь тем, что «вес» $\mathcal{L}_H$ ФЭ $\mathcal{E}_H$ в нём больше двух. Поскольку в каждом из этих базисов возможна сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ (см. §3), то для них определены введённые выше функционалы сложности и функции Шеннона, которые в силу (4.1) удовлетворяют асимптотическим оценкам

$$L_{\widehat{\text{Б}}}^{\text{С}}(n,d) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \qquad \mathcal{L}_{\check{\text{Б}}}^{\text{С}}(n,d) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \tag{4.2}$$

так как $\rho_{\widehat{\text{Б}}} = \rho_{\check{\text{Б}}} = 1$.

Для построения самокорректирующихся СФЭ в базисах $\widehat{\text{Б}}$, $\check{\text{Б}}$ воспользуемся конструкциями §3. Так, индукцией по $l = 1, 2, \ldots$ легко показать, что СФЭ $\Sigma^{(l)}$, построенная по СФЭ Σ, корректирует $(2^l - 1)$ ошибок.

Теорема 4.1. *Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $\log d(n) = o(n)$, справедливо асимптотическое равенство*

$$L_{\widehat{\text{Б}}}^{\text{С}}\big(n, d(n)\big) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\mathrm{Б}}}(n,d)$ вытекает из (4.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки данной функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, которая корректирует d ошибок и имеет сложность асимптотически не превосходящую $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Покажем, что в качестве искомой СФЭ можно взять СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, построенную при доказательстве теоремы 3.1, если считать, что $\hat{l} = 0$ и $l = \lceil \log(d+1) \rceil$, а остальные параметры конструкции выбраны согласно (3.16). Действительно, полученная таким образом СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ состоит из абсолютно надёжных ФЭ $\mathcal{E}_H$ и макроэлементов вида $\mathcal{E}^{(l)}_{\varphi}$, $\varphi \in \mathrm{Б}_0$, каждый из которых корректирует $2^l - 1 \geqslant d$ ошибок. При этом сложность СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ в силу (3.15) будет асимптотически не больше, чем $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Теорема доказана. □

Шаром радиуса r с центром в точке $\alpha \in B^n$ называется множество всех наборов длины n, расстояние от которых до α не превосходит r. Обозначим через $S_r(n)$ число точек (наборов длины n) в шаре радиуса r. Точки шара радиуса r — это его центр, множество наборов, отличающихся от центра в одной координате, — их C^1_n, множество наборов, отличающихся от центра в двух координатах, — их C^2_n, и т. д. Следовательно,

$$S_r(n) = C^0_n + \ldots + C^r_n.$$

Определим функцию $M_r(n)$ как максимальное число попарно не пересекающихся шаров радиуса r, укладывающихся в B^n. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Для любых натуральных n, r ($r \leqslant n$) максимальное число попарно не пересекающихся шаров радиуса r, которые можно разместить в кубе B^n, не меньше, чем $2^n/S_{2r}(n)$.*

Доказательство. Будем размещать требуемым образом шары радиуса r в кубе B^n. Выберем в качестве центра первого шара произвольный набор α_1 куба B^n. Для выбора набора α_2 в качестве центра второго шара запрещено $S_{2r}(n)$ точек, так как запрещены все точки, находящиеся от α_1 на расстоянии меньшем чем $2r+1$. Пусть уже выбраны наборы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, тогда для выбора набора α_{k+1} запрещено точек не больше чем $k \cdot S_{2r}(n)$, то есть, если $k \cdot S_{2r}(n) < 2^n$, то можно выбрать α_{k+1}. Пусть таким образом выбрано m наборов, а выбор набора в качестве центра очередного шара невозможен, тогда $m \cdot S_{2r}(n) \geqslant 2^n$, то есть

$$M_r(n) \geqslant m \geqslant \frac{2^n}{S_{2r}(n)}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 4.2. *Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $d(n) = o(n/\log n)$, справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{L}_{\breve{\text{Б}}}^{\text{С}}\bigl(n, d(n)\bigr) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $\mathcal{L}_{\breve{\text{Б}}}^{\text{С}}(n, d)$ вытекает из (4.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки данной функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ Σ_f, которая корректирует d ошибок и имеет сложность, асимптотически не превосходящую $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Выберем натуральные параметры m, N и R такие, что

$$m < n,\ N = 2^m,\ R = N + 2d \cdot (m+1) \leqslant 2^{m+1}, \qquad (4.3)$$

для которых, очевидно,

$$2^N = 2^N \cdot \frac{2^{2d(m+1)}}{(2^{m+1})^{2d}} \leqslant \frac{2^R}{R^{2d}} \leqslant \frac{2^R}{C_R^0 + \ldots + C_R^{2d}},$$

то есть с учётом леммы 4.1

$$2^N \leqslant M_d(R). \qquad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что существует такое инъективное отображение ψ, которое переводит наборы куба B^N в центры непересекающихся шаров радиуса d куба B^R. На его основе определим отображение ψ^{-1}, переводящее произвольный набор β, $\beta \in B^R$, в такой набор α, $\alpha \in B^N$, для которого набор $\psi(\alpha)$ является ближайшим к β центром одного из указанных шаров. Заметим, что при этом $\psi^{-1}(\gamma) = \alpha$ для любого набора γ, принадлежащего шару с центром $\psi(\alpha)$.

Положим, как обычно, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_m)$ и представим ФАЛ в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} K_{\sigma'}(x') \cdot f_{\sigma'}(x''), \qquad (4.5)$$

где $K_{\sigma'}(x') = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m}$ и $f_{\sigma'}(x'') = f(\sigma', x'')$.

Полагая, что

$$m = m(n) = o(n) \quad \text{и} \quad d \leqslant 2^l - 1, \qquad (4.6)$$

где l — некоторый параметр, построим СФЭ Σ_f из следующих подсхем:

1) подсхемы Σ'' над базисом Б_0, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{F}'' = \big(f_{\widetilde{0}}(x''), \ldots, f_{\widetilde{1}}(x'')\big)$ из $P_2^R(x'')$, получена

асимптотически наилучшим методом [13] и для которой в силу (4.6)

$$\mathcal{L}(\Sigma'') \lesssim R\frac{2^{n-m}}{n}; \tag{4.7}$$

2) подсхемы Σ_ψ над базисом $\text{Б}_0^{(l)}$ из макроэлементов $\mathcal{E}_\&^{(l)}$, $\mathcal{E}_\vee^{(l)}$, $\mathcal{E}_\neg^{(l)}$, которая реализует систему ФАЛ $\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_R)$, получена методом Шеннона [13] и имеет сложность

$$\mathcal{L}(\Sigma_\psi) = O\Big(2^m \cdot \frac{2^R}{R} \cdot 3^l\Big), \tag{4.8}$$

а её входы присоединены в СФЭ Σ_f к выходам подсхемы Σ'' с теми же номерами;

3) подсхемы Σ', представляющей собой мультиплексорную СФЭ порядка m и сложности

$$\mathcal{L}(\Sigma') = O(3^l \cdot 2^m) \tag{4.9}$$

над базисом $\text{Б}_0^{(l)}$, адресными входами которой являются БП x', а информационные входы $(u_0, \ldots, u_{2^m-1})$ присоединены к выходам подсхемы Σ_ψ с номерами $1, \ldots, 2^m$ соответственно.

Из построения СФЭ Σ_f и отмеченных выше свойств отображений ψ, ψ^{-1} следует, что она реализует ФАЛ f, корректирует, с учётом (4.6), d ошибок, а её сложность в силу (4.7)–(4.9) удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \lesssim R \cdot \frac{2^{n-m}}{n} + O\Big(3^l \cdot 2^m \cdot \frac{2^R}{R}\Big).$$

Из полученной оценки следует, что при достаточно больших значениях n и

$$m = \lfloor \log n \rfloor - 1, \qquad l = \lceil \log(d+1) \rceil$$

условия (4.3) и (4.6) будут выполнены, а построенная СФЭ Σ_f будет удовлетворять всем требованиям теоремы.

Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002. 82 с.

[2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.

[4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.

[5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова.* Т. 1. М.: Наука, 1974.

[7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.

[8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

[9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.

[10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5-44.

[11] *Кузъмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39

[12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.

[13] *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики: Учеб. пособие. М: Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. 256 С.

[14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.

[16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.

[17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.

[18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.

[19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.

[20] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.

[22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.

[23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.

[24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.

[25] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.

[26] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.

[27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИ АН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

[28] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.

[29] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.

[30] *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.

[31] *Cardot C.* Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.

[32] *Shannon C. E.* The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).

[33] *Wegener I.* Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.

[34] *Андреев А. Е.* О сложности реализации частичных булевых функций схемами из функциональных элементов. Дискретная математика, т. 1 (1989), №4. С. 36-45.

[35] *Клейтмен Д.* О проблеме Дедекинда: число булевых монотонных функций. Кибернетический сб. Новая серия, вып. 7. М.: Мир, 1970. С. 43-52.