Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 10

Метод семантических таблиц:
табличный вывод

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

$$(\models \varphi \quad \Leftrightarrow \text{семантическая таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима})$$

Для доказательства общезначимости формул
(и более широко — невыполнимости таблиц)
будем применять правила заранее сформулированного списка

Доказательства такого вида: преобразование записей согласно заданному своду правил — принято называть логическим выводом

Логический вывод, в котором преобразуются семантические таблицы, принято называть табличным выводом, и соответствующие правила преобразования — правилами табличного вывода

Начнём с определения свода этих правил

Правила табличного вывода

Будем использовать правила табличного вывода двух видов:

$$(*)\text{: } \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**)\text{: } \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Согласно правилу, рассматриваемая таблица T_0 преобразуется

(*) в таблицу T_1 для последующего рассмотрения

(**) в таблицы T_1 и T_2 для поочерёдного рассмотрения

При этом правила будут подобраны так, чтобы

(*) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и T_1

(**) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и **хотя бы одна** из таблиц T_1, T_2

(*строго докажем это позже*)

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют альтернативами

Правила табличного вывода

Включим в свод 12 правил табличного вывода:

- согласно каждому правилу, в одной из частей таблицы выбирается одна формула, и эта формула преобразуется в одну или несколько в зависимости от её вида и расположения
- $12 = 2 \cdot 6$
  - 2 части таблицы: левая, правая
  - 6 логических операций: $\&$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\forall$, $\exists$

В правилах будут использоваться следующие обозначения:

- Γ, Δ — произвольные множества формул (*логики предикатов*)
- φ, ψ — произвольные формулы
- $\mathtt{x}$ — произвольная предметная переменная
- t — произвольный терм,
  такой что подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ правильна для φ
- $\mathbf{c}$ — произвольная константа,
  не содержащаяся в формулах из $\boldsymbol{\Gamma} \cup \boldsymbol{\Delta} \cup \{\varphi\}$

Правила табличного вывода

$L\&$: $$\frac{\langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$R\&$: $$\frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$L\vee$: $$\frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$R\vee$: $$\frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$L{\to}$: $$\frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$R{\to}$: $$\frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$L\neg$: $$\frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$R\neg$: $$\frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

$L\forall$: $$\frac{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\ \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\ \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \mid \Delta \rangle}$$

$R\forall$: $$\frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \forall \mathrm{x}\ \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \rangle}$$

$L\exists$: $$\frac{\langle \Gamma, \exists \mathrm{x}\ \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta \rangle}$$

$R\exists$: $$\frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathrm{x}\ \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathrm{x}\ \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \rangle}$$

Правила табличного вывода

Пара слов об ограничениях
на терм t и константу **c** в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

Если разрешить подставлять любые термы в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle \forall x\, \exists y\, P(x, y) \mid \exists y\, P(y, y)\rangle}{\langle \forall x\, \exists y\, P(x, y), \exists y\, P(y, y) \mid \exists y\, P(y, y)\rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять «использованные» константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle \exists x\, P(x) \mid P(\mathbf{c})\rangle}{\langle P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c})\rangle}$$

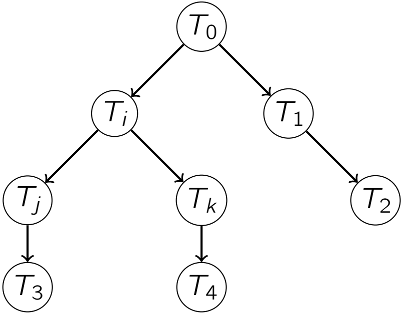
— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

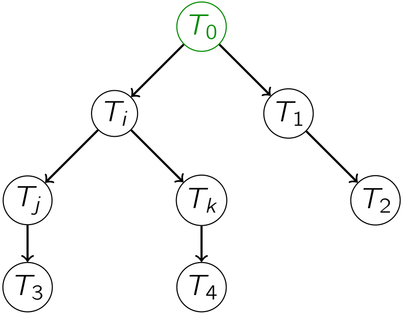
1. Всем вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

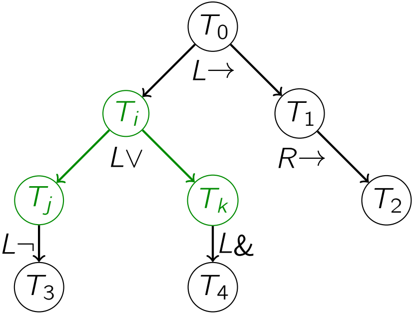
2. Корню приписана таблица T_0



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

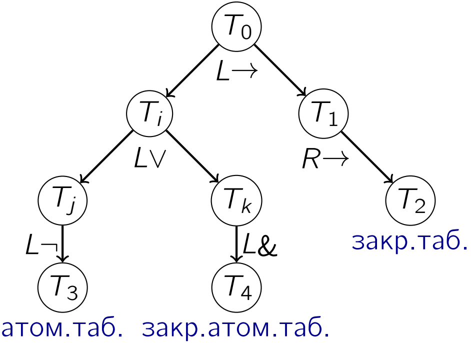
3. Из каждой вершины $\textcircled{T_i}$ исходит не более двух дуг, и если исходит
    - ровно одна дуга (в $\textcircled{T_j}$), то $\dfrac{T_i}{T_j}$ — правило табличного вывода
    - две дуги (в $\textcircled{T_j}$, $\textcircled{T_k}$), то $\dfrac{T_i}{T_j,\ T_k}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это
размеченное корневое ориентированное дерево следующего вида:

4. все таблицы, приписанные листьям, закрыты или атомарны (в том числе могут быть одновременно закрытыми и атомарными)



Табличный вывод

Табличный вывод успешен, если
он конечен и всем его листьям приписаны закрытые таблицы

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица, для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

В частности, согласно теореме о табличной проверке общезначимости если этот вывод построен для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$, то $\models \varphi$

Перед строгой формулировкой и обоснованием свойств успешных выводов приведём несколько примеров

Примеры табличных выводов

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \mid (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)\rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \varphi \to \neg\psi \mid \psi \to \neg\varphi\rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \varphi \to \neg\psi, \psi \mid \neg\varphi\rangle \arrow[d, "R\neg"] & \\
 & \langle \varphi \to \neg\psi, \psi, \varphi \mid \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\to"] & \\
\langle \neg\psi, \psi, \varphi \mid \rangle \arrow[d, "L\neg"] & & \begin{array}{c}\langle \psi, \varphi \mid \varphi\rangle \\ \text{закрытая таблица}\end{array} \\
\begin{array}{c}\langle \psi, \varphi \mid \psi\rangle \\ \text{закрытая таблица}\end{array} & &
\end{tikzcd}$$

Вывод успешен

При этом для любых формул φ, ψ верно $\models (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$

Примеры табличных выводов

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \mid \forall x\,(A(x)\to B(x))\to(\forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x))\rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \forall x\,(A(x)\to B(x)) \mid \forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x)\rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x) \mid \forall x\,B(x)\rangle \arrow[d, "R\forall"] & \\
 & \langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x) \mid B(\mathbf{c})\rangle \arrow[d, "L\forall"] & \\
 & \langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c})\rangle \arrow[d, "L\forall"] & \\
 & \langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c})\to B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c})\rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\to"] & \\
\left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(A(x)\to B(x)), \\ \forall x\,A(x), B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \end{array} \mid B(\mathbf{c})\right\rangle & & \left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(A(x)\to B(x)), \\ \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \end{array} \mid B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c})\right\rangle \\
\text{Закрытая таблица} & & \text{Закрытая таблица}
\end{tikzcd}$$

Вывод успешен

При этом $\models \forall x\,(A(x)\to B(x))\to(\forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x))$

Примеры табличных выводов

$$\begin{array}{c}
\langle \mid \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x) \rangle \\
\big\downarrow R{\to} \\
\langle \exists x\, P(x) \mid \forall x\, P(x) \rangle \\
\big\downarrow L\exists \\
\langle P(\mathbf{c_1}) \mid \forall x\, P(x) \rangle \\
\big\downarrow R\forall \\
\langle P(\mathbf{c_1}) \mid P(\mathbf{c_2}) \rangle
\end{array}$$

Незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

При этом $\not\models \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$

Примеры табличных выводов

$$
\begin{array}{c}
\langle \mid \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y) \rangle \\
\big\downarrow R\to \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y) \rangle \\
\big\downarrow L\forall \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), \exists y\, P(\mathbf{c_1}, y) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y) \rangle \\
\big\downarrow R\exists \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), \exists y\, P(\mathbf{c_1}, y) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y), \forall x\, P(x, \mathbf{c_2}) \rangle \\
\big\downarrow L\exists \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3}) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y), \forall x\, P(x, \mathbf{c_2}) \rangle \\
\big\downarrow R\forall \\
\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3}) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y), P(\mathbf{c_4}, \mathbf{c_2}) \rangle \\
\big\downarrow L\forall \\
\infty
\end{array}
$$

Вывод бесконечен (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\not\models \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$

Примеры табличных выводов

$$\begin{tikzcd}
\langle \mid \exists x\, \forall y\, P(x, y) \to \forall y\, \exists x\, P(x, y) \rangle \arrow[d, "R\to"] \\
\langle \exists x\, \forall y\, P(x, y) \mid \forall y\, \exists x\, P(x, y) \rangle \arrow[d, "L\exists"] \\
\langle \forall y\, P(\mathbf{c}_1, y) \mid \forall y\, \exists x\, P(x, y) \rangle \arrow[d, "R\forall"] \\
\langle \forall y\, P(\mathbf{c}_1, y) \mid \exists x\, P(x, \mathbf{c}_2) \rangle \arrow[d, "L\forall"] \\
\langle \forall y\, P(\mathbf{c}_1, y), P(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) \mid \exists x\, P(x, \mathbf{c}_2) \rangle \arrow[d, "R\exists"] \\
\langle \forall y\, P(\mathbf{c}_1, y), P(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) \mid \exists x\, P(x, \mathbf{c}_2), P(\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_2) \rangle \arrow[d, "L\forall"] \\
\infty
\end{tikzcd}$$

Вывод бесконечен (и, следовательно, неуспешен)

При этом $\models \exists x\, \forall y\, P(x, y) \to \forall y\, \exists x\, P(x, y)$