Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 10

Метод семантических таблиц
в логике предикатов:
табличный вывод

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Правила табличного вывода

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\to: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Здесь и далее:

- φ и ψ — формулы (*логики предикатов*)
- Γ, Δ — множества формул

Эти восемь правил устроены точно так же, как и для логики высказываний, и имеют точно такой же смысл

Правила табличного вывода

$$L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall \mathtt{x}\ \varphi, \varphi \{\mathtt{x}/t\} \mid \Delta \rangle} \qquad R\forall: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \forall \mathtt{x}\ \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \rangle}$$

$$L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta \rangle} \qquad R\exists: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathtt{x}\ \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists \mathtt{x}\ \varphi, \varphi \{\mathtt{x}/t\} \rangle}$$

Здесь:

- $\mathtt{x}$ — предметная переменная
- t — терм, такой что подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ **правильна** для φ
- $\mathbf{c}$ — константа, **не содержащаяся** в φ и в формулах из $\Gamma \cup \Delta$

Правила табличного вывода

Пара слов об ограничениях для правил $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

Если разрешить подставлять любые термы в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle \forall x\ \exists y\ P(x, y) \mid \exists y\ P(y, y)\rangle}{\langle \forall x\ \exists y\ P(x, y), \exists y\ P(y, y) \mid \exists y\ P(y, y)\rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять “использованные” константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle \exists x\ P(x) \mid P(\mathbf{c})\rangle}{\langle P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c})\rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Табличный вывод

Табличный вывод — это корневое дерево, размеченное семантическими таблицами, построенное по правилам вывода и по каждой конечной ветви завершающееся закрытой или атомарной таблицей

(дословно переносится из логики высказываний)

Успешный табличный вывод (табличное опровержение) — это конечный вывод, **все** листья которого помечены закрытыми таблицами

Определения, относящиеся к семантическим таблицам *логики высказываний*, удалось почти без изменений адаптировать к логике предикатов

К сожалению, с утверждениями об устройстве табличных выводов так поступить не выйдет — чтобы это понять, достаточно увидеть на примере, насколько сложнее устроены табличные выводы в логике предикатов по сравнению с логикой высказываний

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \forall x\,(A(x)\to B(x))\to(\forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x))\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)) \mid \forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x) \mid \forall x\,B(x)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x) \mid B(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c})\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(A(x)\to B(x)), \forall x\,A(x), A(\mathbf{c})\to B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \mid B(\mathbf{c})\rangle$$

$$\swarrow \quad L{\to} \quad \searrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(A(x)\to B(x)), \\ \forall x\,A(x), B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \end{array} \mid B(\mathbf{c}) \right\rangle \qquad \left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(A(x)\to B(x)), \\ \forall x\,A(x), A(\mathbf{c}) \end{array} \mid B(\mathbf{c}), A(\mathbf{c}) \right\rangle$$

Закрытая таблица   Закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models \forall x\,(A(x)\to B(x))\to(\forall x\,A(x)\to\forall x\,B(x))$

Примеры табличных выводов

$$
\begin{array}{c}
\langle\ \mid \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)\rangle \\
\big\downarrow R{\to} \\
\langle \exists x\, P(x) \mid \forall x\, P(x)\rangle \\
\big\downarrow L\exists \\
\langle P(\mathbf{c_1}) \mid \forall x\, P(x)\rangle \\
\big\downarrow R\forall \\
\langle P(\mathbf{c_1}) \mid P(\mathbf{c_2})\rangle
\end{array}
$$

Незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

При этом $\not\models \exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$

Примеры табличных выводов

$$\langle\ \mid \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)\rangle$$
$$\downarrow R\to$$
$$\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y)\rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), \exists y\, P(\mathbf{c_1}, y) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y)\rangle$$
$$\downarrow R\exists$$
$$\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), \exists y\, P(\mathbf{c_1}, y) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y), \forall x\, P(x, \mathbf{c_2})\rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3}) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y), \forall x\, P(x, \mathbf{c_2})\rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle \forall x\, \exists y\, P(x,y), P(\mathbf{c_1}, \mathbf{c_3}) \mid \exists y\, \forall x\, P(x,y), P(\mathbf{c_4}, \mathbf{c_2})\rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\infty$$

Вывод бесконечен

При этом $\not\models \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$

Примеры табличных выводов

$$\langle\ \mid \exists x\ \forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x,y)\rangle$$

$$\downarrow R\rightarrow$$

$$\langle \exists x\ \forall y\ P(x,y) \mid \forall y\ \exists x\ P(x,y)\rangle$$

$$\downarrow L\exists$$

$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \forall y\ \exists x\ P(x,y)\rangle$$

$$\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y) \mid \exists x\ P(x,\mathbf{c_2})\rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists x\ P(x,\mathbf{c_2})\rangle$$

$$\downarrow R\exists$$

$$\langle \forall y\ P(\mathbf{c_1},y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) \mid \exists x\ P(x,\mathbf{c_2}), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2})\rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\infty$$

Вывод бесконечен

При этом $\models \exists x\ \forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x,y)$