Лекция 6. Полные системы. Теорема Поста о полноте. Базис в P_2. Теореме о числе функций в базисе P_2. Предполные классы. Теорема о предполных классах в P_2.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Теорема Поста

Напомним, что множество A, $A \subseteq P_2$, называется **полной системой**, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

Теорема 6.1 (Поста). *Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A является полной системой тогда и только тогда, когда A не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M, т. е.*

$$A \not\subseteq T_0,\ A \not\subseteq T_1,\ A \not\subseteq L,\ A \not\subseteq S,\ A \not\subseteq M.$$

Теорема Поста

Доказательство. 1. *Необходимость* обоснуем от обратного: пусть A является полной системой, но содержится в одном из классов T_0, T_1, L, S, M, например, пусть $A \subseteq T_0$.

Тогда получаем:

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2.$$

Приходим к противоречию.

Значит, A не может содержаться ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.

Теорема Поста

Доказательство. 2. *Достаточность*. Пусть A не содержится в одном из классов T_0, T_1, L, S, M. Докажем, что в этом случае A — полная система.

Из условия непринадлежности A к каждому из перечисленных классов следует, что в A найдутся такие функции

$$f_0, f_1, f_l, f_s, f_m,$$

что

$$f_0 \notin T_0, \quad f_1 \notin T_1, \quad f_l \notin L, \quad f_s \notin S, \quad f_m \notin M.$$

Отметим, что функции f_0, f_1, f_l, f_s, f_m не обязательно все различны.

Теорема Поста

Доказательство. Покажем, что формулами над A можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

Теорема Поста

Доказательство. 2.1. Построение констант 0 и 1.

Рассмотрим функции $f_0 \notin T_0$ и $f_1 \notin T_1$. Положим:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f_0(x, \dots, x), \\ \varphi_1(x) &= f_1(x, \dots, x). \end{aligned}$$

Тогда:

x	φ_0	φ_1
0	1	b
1	a	0

Теперь если $a = 1$ и $b = 0$, то $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = 0$.

Если же $a = 0$ или $b = 1$, то получена функция $\bar{x}$. Тогда по лемме о несамодвойственной функции из $f_s \notin S$, подставляя вместо ее переменных функции x, $\bar{x}$, получаем некоторую константу $c \in E_2$, а затем $\bar{c} \in E_2$.

Константы 0 и 1 построены.

Теорема Поста

Доказательство. 2.2. Построение отрицания $\bar{x}$.

По лемме о немонотонной функции из $f_m \notin M$, подставляяя вместо ее переменных функции 0, 1, x, получаем отрицание $\bar{x}$.

Отрицание $\bar{x}$ построено.

Теорема Поста

Доказательство. 2.3. Построение конъюнкции $x \cdot y$.

По лемме о нелинейной функции из $f_l \notin L$, подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$ и, возможно, навешивая отрицание над функцией, получаем конъюнкцию $x \cdot y$.

Конъюнкция $x \cdot y$ построена.

Теорема Поста

Доказательство. Значит, формулами над A можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

Следовательно, система A — полна. $\square$

Теорема Поста

По теореме Поста можно проверять полноту систем функций из P_2.

Если задано конечное множество $A = \{f_1, \ldots, f_t\} \subseteq P_2$, то можно построить таблицу со строками, соответствующими функциям $f_1, \ldots, f_t$, и со столбцами, соответствующими классам T_0, T_1, L, S, M.

На пересечении строки и столбца можно записывать «$+$» или «$-$» в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит функция, которой обозначена эта строка, к классу, которым обозначен этот столбец.

По теореме Поста система A — полна, если в этой таблице в любом столбце найдется хотя бы один «минус», и не полна, если в этой таблице найдется столбец, состоящий только из «плюсов».

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной система

$$A = \{\bar{x}, x \to y\}.$$

Применим теорему Поста:

	T_0	T_1	L	S	M
$\bar{x}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x \to y$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

Значит, система A — полна.

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной система

$$A = \{\bar{x}, x \sim y\}.$$

Применим теорему Поста:

	T_0	T_1	L	S	M
$\bar{x}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x \sim y$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

Значит, система A — не полна, т. к. $A \subseteq L$.

Теорема Поста

Поразительно, но теорему Поста можно применять для проверки полноты и бесконечных множеств функций из P_2.

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной системой бесконечное множество
$$A = (S \cap M) \cup (L \setminus M).$$

Предположим, что A — полная система. Тогда по теореме Поста в A обязаны содержаться функции, не принадлежащие каждому из классов T_0, T_1, L, S, M.

Попытаемся их подобрать. Находим:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \in L \setminus M, & \bar{x} \notin T_0, T_1, M, \\ x \oplus y \in L \setminus M, & x \oplus y \notin S, \\ xy \oplus xz \oplus yz \in S \cap M, & xy \oplus xz \oplus yz \notin L. \end{array}$$

Значит, система A — полна.

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной системой бесконечное множество

$$A = (L \cap T_0 \cap T_1) \cup (S \setminus (T_0 \cup T_1)).$$

Предположим, что A — полная система. Тогда по теореме Поста в A обязаны содержаться функции, не принадлежащие каждому из классов T_0, T_1, L, S, M.

Попытаемся их подобрать. Находим:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \in S \setminus (T_0 \cup T_1), & \bar{x} \notin T_0, T_1, M, \\ xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1 \in S \setminus (T_0 \cup T_1), & xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1 \notin L. \end{array}$$

Осталось найти несамодвойственную функцию в A. Т. к. в множестве $S \setminus (T_0 \cup T_1)$ все функции — самодвойственные, искать ее нужно в множестве $L \cap T_0 \cap T_1$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Посмотрим, какие функции входят в множество $L \cap T_0 \cap T_1$.

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in L \cap T_0 \cap T_1$, то $f \in L$, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$.

Кроме того, $f \in T_0$ и $f \in T_1$, т. е.

$$\begin{array}{ll} f(0, \ldots, 0) = 0, & c_0 = 0, \\ f(1, \ldots, 1) = 1, & c_1 \oplus \ldots \oplus c_n = 1. \end{array}$$

Итак, если $f \in L \cap T_0 \cap T_1$, то

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_1, \ldots, c_n \in E_2$ и

$$c_1 \oplus \ldots \oplus c_n = 1.$$

Теорема Поста

Пример (продолжение). Найдем двойственную функцию к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} f^*(x_1, \ldots, x_n) &= \overline{c_1\bar{x}_1 \oplus \ldots \oplus c_n\bar{x}_n} = \\ &= c_1(x_1 \oplus 1) \oplus \ldots \oplus c_n(x_n \oplus 1) \oplus 1 = \\ &= (c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n) \oplus (c_1 \oplus \ldots \oplus c_n \oplus 1) = \\ &= c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n = f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Следовательно, $f^* = f$, т. е. $f \in S$ и

$$L \cap T_0 \cap T_1 \subseteq S.$$

Значит, система A — не полна, т. к. $A \subseteq S$.

Теорема Поста

Теорему Поста можно применять для проверки полноты множеств функций из P_2, в которых функции не явно заданы, а описаны своими свойствами.

Теорема Поста

Пример. Пусть $f \in P_2$ и формулами над $A = \{f\}$ можно выразить константы 0 и 1. Доказать, что система $A = \{f\}$ — полна.

Докажем, что $f \notin T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Итак,

1) если $f \in T_0$, то $A \subseteq T_0$, значит,

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0,$$

но $1 \in [A]$, $1 \notin T_0$ — противоречие, поэтому $f \notin T_0$;

2) если $f \in T_1$, то $A \subseteq T_1$, значит,

$$[A] \subseteq [T_1] = T_1,$$

но $0 \in [A]$, $0 \notin T_1$ — противоречие, поэтому $f \notin T_1$;

3) если $f \in S$, то $A \subseteq S$, значит,

$$[A] \subseteq [S] = S,$$

но $1 \in [A]$, $1 \notin S$ — противоречие, поэтому $f \notin S$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Далее,

4) $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, поэтому $f \notin M$;

5) $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, если предположить, что $f \in L$, т. е. если $f \in L \setminus (T_0 \cup T_1)$, то аналогично предыдущему примеру показываем $f \in S$ — противоречие, поэтому $f \notin L$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Следовательно, получаем:

	T_0	T_1	L	S	M
f	—	—	—	—	—

Значит, система $A = \{f\}$ — полна.

Базис P_2

Пусть $B \subseteq P_2$.

Множество B называется **базисом** P_2, если

1) $[B] = P_2$, т. е. система B — **полна**;

2) для любой функции $f \in B$ верно $[B \setminus \{f\}] \neq P_2$, т. е. система B — **неизбыточна**.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Теорема 6.2 (о числе функций в базисе P_2).

1. *Любой базис P_2 содержит не больше четырех функций.*

2. *Для любого числа k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, в P_2 найдется базис, содержащий ровно k функций.*

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. 1. Пусть B, $B \subseteq P_2$, — базис P_2. Тогда B — полная система. Значит, по теореме Поста в B найдутся следующие (не обязательно различные) функции

$$f_0 \notin T_0, \quad f_1 \notin T_1, \quad f_l \notin L, \quad f_s \notin S, \quad f_m \notin M.$$

Система $\{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}$ — полна, а B — неизбыточная система, поэтому

$$B = \{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}.$$

Значит, $|B| \leqslant 5$.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_0 \in B$, $f_0 \notin T_0$:

x_1	$\ldots$	x_n	f_0
0	$\ldots$	0	1
	$\ldots$		
1	$\ldots$	1	a

,

где $a \in E_2$.

Теперь

1) если $a = 0$, то $f_0 \notin T_1, M$, а значит, $f_1 = f_m = f_0$, и $|B| \leqslant 3$;

2) если $a = 1$, то $f_0 \notin S$, а значит, $f_s = f_0$, и $|B| \leqslant 4$.

Следовательно, $|B| \leqslant 4$.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. 2. Для каждого числа k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, приведем примеры базисов B из k функций:

1) если $k = 1$, то, например, $B = \{x/y\}$ или $B = \{x \downarrow y\}$;

2) если $k = 2$, то, например, $B = \{\bar{x}, x \cdot y\}$ или $B = \{\bar{x}, x \vee y\}$;

3) если $k = 3$, то, например, $B = \{1, x \oplus y, x \cdot y\}$.

Теорема о числе функций в базисе P_2

Доказательство. Если же $k = 4$, то рассмотрим

$$B = \{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \cdot y\}.$$

Построим таблицу для этого множества B:

	T_0	T_1	L	S	M
0	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x \oplus y \oplus z$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x \cdot y$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

Кроме того,

$$B \setminus \{0\} \subseteq T_1, \qquad B \setminus \{1\} \subseteq T_0,$$
$$B \setminus \{x \oplus y \oplus z\} \subseteq M, \qquad B \setminus \{x \cdot y\} \subseteq L.$$

Значит, система B — полна и неизбыточна, т. е. является базисом.

Предполный класс

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **предполным классом**, если

1) $[A] \neq P_2$, т. е. система A — не полна;

2) для любой функции $f \in P_2 \setminus A$ верно $[A \cup \{f\}] = P_2$, т. е. при добавлении к A любой новой функции получается полная система.

Замкнутость предполного класса

Предложение 6.1. *Любой предполный класс является замкнутым классом.*

Доказательство проведем от обратного: пусть $A \subseteq P_2$ — предполный класс, но $[A] \neq A$.

Значит, найдется функция $f \in [A] \setminus A$. Получаем:

$$[A \cup \{f\}] = [A].$$

По п. 1 определения предполного класса $[A] \neq P_2$, но по п. 2 определения предполного класса $[A \cup \{f\}] = [A] = P_2$. Приходим к противоречию.

Значит, A — замкнутый класс.

□

Теорема о предполных классах

Теорема 6.3. *В P_2 найдется всего пять предполных классов:* T_0, T_1, L, S, M.

Теорема о предполных классах

Доказательство. 1. Сначала покажем, что каждый из классов T_0, T_1, L, S, M не содержится ни в каком другом из этих классов.

Для этого построим таблицу, в которой строки и столбцы соответствуют этим классам, а на пересечении строки и столбца указана функция, принадлежащая классу, которым обозначена эта строка, и не принадлежащая классу, которым обозначен этот столбец:

	T_0	T_1	L	S	M
T_0	—	0	$x \cdot y$	0	$x \oplus y$
T_1	1	—	$x \cdot y$	1	$x \sim y$
L	$\bar{x}$	$\bar{x}$	—	0	$\bar{x}$
S	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$m(x,y,z)$	—	$\bar{x}$
M	1	0	$x \cdot y$	0	—

,

где $m(x,y,z) = xy \oplus xz \oplus yz$.

Теорема о предполных классах

Доказательство. 2. Теперь покажем, что каждый из классов T_0, T_1, L, S, M является предполным.

Например, рассмотрим класс T_0. Тогда:

1) $[T_0] = T_0 \neq P_2$;

2) если $f \notin T_0$, то по теореме Поста

$$[T_0 \cup \{f\}] = P_2,$$

т. к. $0, x \cdot y, x \oplus y \in T_0$ и $0 \notin T_1, S$, $x \cdot y \notin L$, $x \oplus y \notin M$ (см. первую строку таблицы из п. 1).

Значит, T_0 — предполный класс.

Аналогично проводятся рассуждения для остальных классов.

Теорема о предполных классах

Доказательство. 3. Наконец, покажем от обратного, что других предполных классов нет.

Пусть $A \subseteq P_2$ — предполный класс, причем $A \neq T_0, T_1, L, S, M$.

Значит либо A не содержится ни в одном из этих классов, либо строго содержится в каком-то из них.

Если A не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M, то по теореме Поста $[A] = P_2$. Получаем противоречие с п. 1 определения предполного класса.

Пусть A строго содержится в каком-то из этих классов, например, пусть $A \subseteq T_0$, $A \neq T_0$. Тогда найдется функция $f \in T_0 \setminus A$, откуда $[A \cup \{f\}] \subseteq T_0 \neq P_2$. Получаем противоречие с п. 2 определения предполного класса.

Значит, других предполных классов нет, т. е. T_0, T_1, L, S, M — все предполные классы в P_2.

Сведения о результатах Э. Поста

Э. Пост описал все замкнутые классы в P_2.

Он показал, что

1) в P_2 найдется всего счетное число замкнутых классов;

2) каждый замкнутый класс в P_2 содержит конечный базис (т. е. конечное множество функций, замыкание которых равно этому классу).

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, является ли множество A полной системой, если

1) $A = (M \cap T_0 \cap T_1) \cup (M \setminus (T_0 \cup T_1)) \cup \{x \oplus y \oplus z\}$;

2) $A = ((M \cap T_0) \setminus T_1) \cup ((M \cap T_1) \setminus T_0)) \cup \{x \oplus y \oplus z\}$.

2. Пусть $B \subseteq P_2$ — базис P_2 и $x \oplus y \oplus z \in B$. Определить, сколько функций может содержаться в множестве B.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 20–23.

2. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014. С. 40–43.

3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. С. 40–42.

4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. II 6.1–6.5, 6.8, 6.10, 6.11–6.17.