Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 12

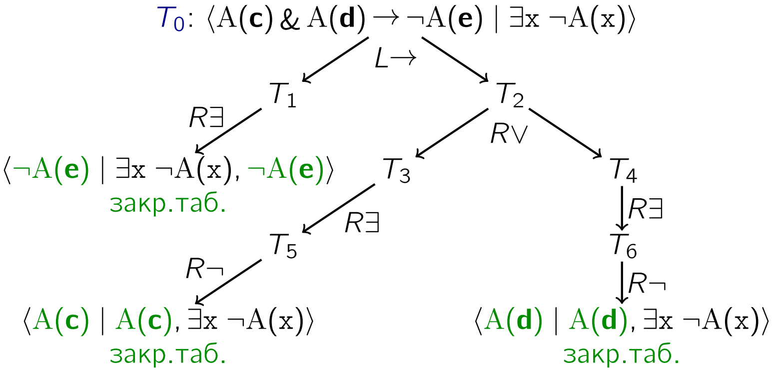
Метод семантических таблиц:
полнота табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Напоминание

Корректность табличного вывода:
если для таблицы T_0 существует успешный табличный вывод,
то таблица T_0 невыполнима



А верно ли утверждение в обратную сторону?
(*если таблица невыполнима, то для неё существует успешный вывод*)

Теорема (о полноте табличного вывода)
Для любой невыполнимой семантической таблицы существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую семантическую таблицу

$$T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$$

Покажем, как можно **построить** успешный вывод $\mathfrak{D}$ для T_0

Для простоты обсудим частный случай с такими ограничениями:

- множества Γ_0, Δ_0 конечны
- все формулы из Γ_0, Δ_0 замкнуты
- в сигнатуре нет ни одного функционального символа

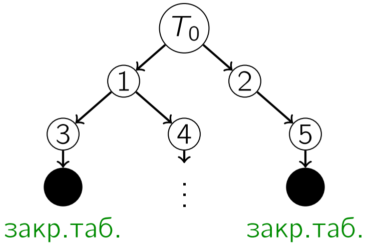
Сформулируем **стратегию** построения вывода,
которой (*как будет показано*) достаточно придерживаться
для построения требуемого вывода $\mathfrak{D}$, начиная с исходной таблицы T_0

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

1. Дерево вывода строится при помощи обхода в ширину

То есть правила применяются к незакрытым неатомарным таблицам в порядке появления этих таблиц в построенном фрагменте дерева



Тогда каждая таблица каждой ветви вывода рано или поздно будет построена

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

2. Правила применяются к формулам в порядке очереди

То есть:

- неатомарные формулы таблицы пронумерованы
- правило вывода применяется к первой формуле
- результат применения правила записывается последним

$$\langle 1{:}\forall x\ \varphi,\ 3{:}\psi_1 \to \psi_2 \mid 2{:}\chi_1 \vee \chi_2 \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle 2{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 3{:}\forall x\ \varphi,\ 4{:}\varphi' \mid 1{:}\chi_1 \vee \chi_2 \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle 1{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 2{:}\forall x\ \varphi,\ 3{:}\varphi' \mid 4{:}\chi_1,\ 5{:}\chi_2 \rangle$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\langle 1{:}\forall x\ \varphi, 2{:}\varphi', 5{:}\psi_2 \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2 \rangle \qquad \langle 1{:}\forall x\ \varphi, 2{:}\varphi' \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2, 5{:}\psi_1 \rangle$$
$$\ldots \qquad\qquad\qquad \ldots$$

Тогда в каждой ветви вывода к каждой неатомарной формуле рано или поздно будет применено правило табличного вывода

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Включим в стратегию построения успешного вывода три ограничения, разрешив выбирать остальные детали построения произвольно:

3. При применении правил $L\forall$, $R\exists$ подставляются **все** имеющиеся в таблице константы (**c**, если констант нет)

$$\begin{array}{c}
\langle \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \exists \mathrm{x}\, \psi \mid \exists \mathrm{x}\, \chi \rangle \\
\big\downarrow L\forall \\
\langle \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \exists \mathrm{x}\, \psi,\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\, \chi \rangle \\
\big\downarrow L\exists \\
\langle \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\, \chi \rangle \\
\big\downarrow R\exists \times 2 \\
\langle \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\, \chi,\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\},\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\} \rangle \\
\dots
\end{array}$$

Тогда в каждой бесконечной ветви вывода
для каждого квантора $\forall$ слева и $\exists$ справа
каждая константа рано или поздно будет подставлена

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Покажем, что любой вывод $\mathfrak{D}$, построенный для $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$ согласно предложенной стратегии, успешен

Предположим, что это не так: вывод $\mathfrak{D}$ неуспешен — получим из этого выполнимость таблицы T_0, *противоречащую выбору таблицы* T_0

Заменим в $\mathfrak{D}$ каждую незакрытую атомарную таблицу T_{atom} на бесконечную ветвь $T_{atom} \to T_{atom} \to T_{atom} \to \dots$

Тогда в полученном дереве обязательно найдётся бесконечная ветвь $\mathcal{T}$, состоящая только из незакрытых таблиц:

$$T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots$$

По этой ветви построим интерпретацию $\mathcal{I}$, такую что:

- каждая формула из Γ_0 выполнима в $\mathcal{I}$
- каждая формула из Δ_0 невыполнима в $\mathcal{I}$

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon\ T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$\mathcal{I} = \langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, -, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$, где

- предметная область — это все константы всех формул в $\mathfrak{T}$:
$$\mathrm{D} = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{Const}_i = \mathrm{Const}_\omega, \text{ где } \mathrm{Const}_i \text{ — все константы в } T_i$$
- значение каждой константы — это её изображение (*она сама*):
$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$$
- предикат истинен $\Leftrightarrow$ он встречается в левых частях таблиц $\mathfrak{T}$:
$$\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) = \mathbb{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \in \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i = \Gamma_\omega$$

Осталось показать *индукцией по структуре формулы*, что

- каждая формула из Γ_ω выполнима в $\mathcal{I}$
- каждая формула из $\Delta_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ невыполнима в $\mathcal{I}$

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon\ T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

База индукции: φ — атом

Тогда $\varphi = \mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k})$, где $\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k} \in \mathrm{Const}_\omega$ (почему?)

Подслучай 1: $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \in \Gamma_\omega$
Тогда $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) = \mathbb{t}$, а значит, $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \in \Delta_\omega$
Тогда $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \notin \Gamma_\omega$ (почему?)
Значит, $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) = \mathbb{f}$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Индуктивный переход
Предположение индукции: для каждой формулы, содержащей менее N логических операций, утверждение доказано
Рассматриваемый случай: формула φ содержит ровно N логических операций

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon\ T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

Переход 1: $\varphi = \psi \to \chi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

В ветви $\mathfrak{T}$ существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к φ в левой части этой таблицы (почему?)

Значит, верно хотя бы одно из двух: (почему?)

- $\chi \in \Gamma_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \models \chi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$
- $\psi \in \Delta_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \not\models \psi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$ — рассуждения аналогичны

Переход 2/3/4: $\varphi = \psi \,\&\, \chi \ /\ \psi \vee \chi \ /\ \neg\psi$ — рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon\ T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

Переход 5: $\varphi = \forall \mathrm{x}\ \psi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

Тогда $\psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \in \Gamma_\omega$ для любой константы $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_\omega$ (почему?)

Значит, для любой константы $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_\omega$ верно: $\mathcal{I} \models \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}$

Но это и означает $\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ \psi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$

В ветви $\mathfrak{T}$ существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к φ в правой части этой таблицы

Значит, $\psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \in \Delta_{i+1}$ для некоторой $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_{i+1} \subseteq \mathrm{Const}_\omega$

Тогда $\mathcal{I} \not\models \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}$, и следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \mathrm{x}\ \psi$

Переход 6: $\varphi = \exists \mathrm{x}\ \psi$ — рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

$$\mathfrak{T}\colon T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots, \qquad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

Итоги рассуждений

Существует (*и явно описана*) интерпретация $\mathcal{I}$, такая что

- все формулы в левых частях таблиц из $\mathfrak{T}$ выполнимы в $\mathcal{I}$
- все формулы в правых частях таблиц из $\mathfrak{T}$ невыполнимы в $\mathcal{I}$

В частности, все формулы из Γ_0 выполнимы в $\mathcal{I}$
и все формулы из Δ_0 невыполнимы в $\mathcal{I}$

Значит, таблица T_0 выполнима, *что противоречит невыполнимости этой таблицы, заявленной в начале доказательства*

Противоречие получено в предположении о том,
что вывод, построенный для T_0, неуспешен

Значит, предположение неверно:
любой вывод, построенный для невыполнимой таблицы T_0 согласно предложенным правилам, успешен ▼

Доказательство теоремы о полноте табличного вывода.

Интересующимся для самостоятельного размышления:
а как адаптировать доказательство к общему случаю?

То есть:

- Какой порядок обработки формул позволит «справедливо» обращаться со счётными множествами формул?
- Какие термы подставлять, если в сигнатуре алфавита есть функциональные символы?
- Как задать и использовать интерпретацию $\mathcal{I}$, если в таблицах встречаются незамкнутые формулы?

Следствие

Семантическая таблица T логики предикатов невыполнима $\Leftrightarrow$ для неё существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Вытекает из теорем о корректности и полноте табличного вывода ▼

Следствие. **Для любой формулы φ логики предикатов верно:**

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **для семантической таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод**

Доказательство. Вытекает из первого следствия и теоремы о табличной проверке общезначимости формул ▼