ПЛАН СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ
по курсу «Дополнительные главы дискретной математики»

Часть I. Конечные автоматы-распознаватели и автоматы-преобразователи

Занятие 1. Множества, допускаемые конечными автоматами. Правоинвариантная эквивалентность.

В ауд.: №№ 1 (1,2,4,6,9), 2 (1,3,4), 3 (1,3,5), 4, 5 (1,3).

На дом: №№ 1 (3,5,7,10), 2 (2,5), 3 (4,6), 5 (2,4).

Занятие 2. Теоретико-множественные операции над конечно-автоматными множествами. Недетерминированные автоматы. Операции произведения и итерации.
В ауд.: №№ 8, 10 (1), 11, 12 (1,3), 23 (1), 24 (1), 13, 14.

На дом: №№ 9, 10 (2), 11 (автомат из задачи 10 (2)), 12 (2), 23 (2), 24 (2), 15.

Занятие 3. Регулярные выражения и регулярные множества. Теорема Клини.
В ауд.: №№ 16 (1,3,5), 17 (1), 18, 20, 22.

На дом: №№ 16 (2,4,6), 17 (2), 19, 21.

Занятие 4. Детерминированные функции. Построение диаграмм Мура и канонических уравнений.
В ауд.: №№ 1.1 (1,3,8,9), 1.2 (1), 2.1 (1,6,16), 2.4(2), 2.5 (2).
На дом: №№ 1.1 (4,6,9,13), 1.2 (2), 2.1 (3,7), 2.4 (1,3), 2.5(3).

Занятие 5. Операции суперпозиции и обратной связи. Построение схем из автоматных элементов.
В ауд.: №№ 2.8 (3,6), 2.9 (4), 2.13 (1,4), 2.14 (1,4), 2.17 (1,4).
На дом: №№ 2.8 (5,8), 2.9 (5), 2.13 (6,11), 2.14 (2,5), 2.17 (2,5).

ЗАДАЧИ ПО АВТОМАТАМ-РАСПОЗНАВАТЕЛЯМ

1. Построить диаграмму Мура для автомата в алфавите $\{0,1\}$, который допускает следующее множество:

1) а) множество $\{0,1,\Lambda\}$;
б) множество $\{0,1\}^* \setminus \{0,1,\Lambda\}$;
2) все слова, которые начинаются словом 01;
3) все слова, которые оканчиваются словом 101;
4) все слова длины 3 и слово 0;
5) все слова длины 3, кроме слова 110;
6) все слова, которые содержат слово 001;
7) все слова, которые составлены из «блоков» 011 и 101;
8) все слова, имеющие нечётную длину и слово 11;
9) все слова, которые имеют вхождения хотя бы одного из слов 000 и 111;
10) все слова, у которых за каждым символом 1 следуют как минимум два символа 0.

2. Доказать конечную автоматность следующих множеств:

1) любое конечное множество X слов в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и множество $A^* \setminus X$;

2) множество всех слов вида a_i^n ($1 \leqslant i \leqslant m$, $n = 1, 2, \ldots$) в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$;

3) множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые имеют чётную длину, начинаются символом 0 и оканчиваются символом 1;

4) множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат неперекрывающиеся вхождения слов 001 и 011;

5) множество слов вида $0^{n_1}10^{n_2}1 \ldots 10^{n_{k-1}}10^{n_k}$, где $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$ и

а) число k фиксировано,

б) число k произвольно;

6) множество слов вида $(10^{m_1}1)^{n_1}0(10^{m_2}1)^{n_2}0 \ldots (10^{m_k}1)^{n_k}$, где $m_1, \ldots, m_k \geqslant 2$, $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$ и число k фиксировано.

3. Определить на множестве $\{0, 1\}^*$ правоинвариантное отношение эквивалентности конечного индекса, для которого следующие множества будут представимы в виде объединения некоторого числа классов эквивалентности:

1) $\{\Lambda\}$;

2) $\{0\}$;

3) $\{\Lambda, 0, 1\}$;

4) множество всех слов вида 0^{3n}, где $n \geqslant 1$;

5) множество всех слов вида 0^n1, где $n \geqslant 0$;

6) множество всех слов чётной длины (включая пустое слово) вместе со словами 1 и 111.

4. Для любого $n \geqslant 2$ определить на множестве $\{0, 1\}^*$ правоинвариантное отношение эквивалентности индекса n.

5. Пользуясь провоинвариантным отношением эквивалентности, доказать, что следующие множества не являются конечно-автоматными:

1) $\{0^n1^{2n} : \ n = 1, 2, \ldots\}$;

2) $\{0^n10^n : \ n = 1, 2, \ldots\}$;

3) множество всех симметричных слов в алфавите $\{0, 1\}$;

4) $\{0^{n^2} : \ n = 1, 2, \ldots\}$;

5) $\{0^n1^n0^n : \ n = 1, 2, \ldots\}$.

6. Существует ли бесконечное конечно-автоматное множество X, такое, что множество $\{\bar{a}\bar{a} : \ \bar{a} \in X\}$ конечно-автоматно?

7*. По аналогии с правоинвариантным отношением эквивалентности определим на множестве A^* левоинвариантное отношение эквивалентности: если $\bar{a} \sim \bar{b}$ и $\bar{c}$ — произвольное слово из A^*, то $\bar{c}\bar{a} \sim \bar{c}\bar{b}$.

Будет ли для левоинвариантного отношения эквивалентности справедлив аналог теоремы 2 из лекций (о представлении произвольного конечно-автоматного множества в виде объединения некоторого количества классов левоинвариантного отношения эквивалентности конечного индекса)?

8. Ввести операцию прямого произведения автоматов. С использованием этой операции доказать замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения.

9. Выяснить, сохраняют ли операции $\cup, \cap, \cdot, *$ класс всех множеств, которые не являются конечно-автоматными.

10. Какие множества допускают следующие недетерминированные автоматы (предварительно построить для них диаграммы Мура):

1) $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = \{q_2\}$, $f(1, q_1) = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_2) = \{q_3\}$, $f(1, q_2) = \{q_3\}$, $f(0, q_3) = \{q_3\}$, $f(1, q_3) = \{q_2, q_3\}$, $\quad F = \{q_3\}$;

2) $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}$, $f(1, q_1) = \{q_1\}$, $f(0, q_2) = \{q_2\}$, $f(1, q_2) = \{q_2, q_3\}$, $f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}$, $f(1, q_3) = \{q_1, q_3\}$, $\quad F = \{q_3\}$.

11. Для заданных недетерминированных автоматов методом детерминизации построить эквивалентный детерминированный автомат (можно давать любые задачи, в том числе задачу 10).

12. Пусть $\mathcal{A} = \{A, Q, f, q_1, F\}$ — недетерминированный автомат, F_1, F_2 — непустые подмножества множества Q и $D = D(\mathcal{A})$. Выяснить, справедливы ли следующие равенства:

1) $D' = A^* \setminus D$, где $D' = D(\mathcal{A}')$ и $\mathcal{A}' = \{A, Q, f, q_1, Q \setminus F\}$;

2) $D = D_1 \cup D_2$, где $D_i = D(\mathcal{A}_i)$, $\mathcal{A}_i = \{A, Q, f, q_1, F_i\}$ и $F_1 \cup F_2 = F$;

3) $D = D_1 \cap D_2$, где $D_i = D(\mathcal{A}_i)$, $\mathcal{A}_i = \{A, Q, f, q_1, F_i\}$ и $F_1 \cap F_2 = F$.

13. Отправляясь от множеств $\{0\}$ и $\{1\}$, построить с помощью операций объединения, произведения и итерации множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат подслово 0001.

14. Пусть $\bar{a}$ — слово в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Сколько раз нужно применить операцию итерации, чтобы получить множество $A^* \setminus \{\bar{a}\}$ из множеств $\{a_1\}, \ldots, \{a_m\}$ с помощью операций объединения, произведения и итерации?

15. Пусть множество X состоит из n слов. Может ли множество $X \cdot X$
содержать n^2 слов;
меньше, чем n^2 слов;
меньше, чем n слов?

16. Доказать регулярность следующих множеств слов в алфавите $\{0, 1\}$:

1) любое конечное множество слов и дополнение (до множества $\{0, 1\}^*$) к конечному множеству слов;

2) множество всех слов, представимых в виде произведения заданных слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$;

3) множество всех слов, содержащих в качестве подслова одно из слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$;

4) множество всех слов, длины которых имеют вид $5k + 1$ или $5k + 3$;

5) множество всех слов, которые не содержат слово 01;

6) множество всех слов, которые не содержат ни одно из заданных слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ (использовать теорему Клини).

17. Привести пример бесконечного регулярного множества, которое невозможно получить
1) с однократным использованием операции $*$,
2) с n-кратным использованием операции $*$, $n \geqslant 2$.

18. Пусть X — регулярное множество в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$, $Y_1, \ldots \ldots, Y_m$ — произвольные регулярные множества. Доказать, что множество $S^{a_1 \ldots a_m}_{Y_1 \ldots Y_m} X$, полученное в

результате одновременной замены букв $a_1, \ldots, a_m$ в любом слове из X множествами $Y_1, \ldots, Y_m$, является регулярным множеством.

19. Пусть X — множество в алфавите A, B — непустое подмножество A. Обозначим через $\mathrm{Proj}_B(X)$ множество всех слов, которые можно получить из слов множества X вычеркиванием букв множества $A \backslash B$ (если слово не содержит букв из B, то в результате вычеркивания образуется пустое слово). Доказать, что для регулярного множества X множество $\mathrm{Proj}_B(X)$ также регулярно.

20. Пусть X — регулярное множество, $\mathrm{Rev}(X)$ — множество обращений всех слов из X (т.е. слов, прочитанных справа налево). Доказать, что множество $\mathrm{Rev}(X)$ регулярно.

21. Пусть X, Y — множества слов в алфавите A. Обозначим через $X \times Y$ множество всех слов в алфавите $A \times A$, которые имеют вид $(a_{i_1}a_{j_1})(a_{i_2}a_{j_2})\ldots(a_{i_n}a_{j_n})$, где $a_{i_1}\ldots a_{i_n} \in X$ и $a_{j_1}\ldots a_{j_n} \in Y$. С использованием теоремы Клини доказать, что для любых регулярных множеств X, Y множество $X \times Y$ также регулярно.

22. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите A, Y — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через X/Y множество всех тех слов из X, длины которых являются длинами слов из Y. Доказать, что множество X/Y конечно-автоматно.

23. Для автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ построить (недетерминированный) автомат, который допускает множество $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$:

1) автомат $\mathcal{A}$: $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = q_2$, $f(1, q_1) = q_1$, $f(0, q_2) = q_2$, $f(1, q_2) = q_3$, $f(0, q_3) = q_1$, $f(1, q_3) = q_3$, $F = \{q_1, q_3\}$,

автомат $\mathcal{B}$: $Q = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_1) = q_1$, $f(1, q_1) = q_2$, $f(0, q_2) = q_2$, $f(1, q_2) = q_2$, $F = \{q_2\}$;

2) автомат $\mathcal{A}$: $Q = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_1) = q_1$, $f(1, q_1) = q_2$, $f(0, q_2) = q_1$, $f(1, q_2) = q_2$, $F = \{q_2\}$;

автомат $\mathcal{B}$: $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = q_2$, $f(1, q_1) = q_3$, $f(0, q_2) = q_2$, $f(1, q_2) = q_2$, $f(0, q_3) = q_3$, $f(1, q_3) = q_1$, $F = \{q_2, q_3\}$.

24. Для автомата $\mathcal{A}$ построить (недетерминированный) автомат $\mathcal{C}$, у которого $D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{A})^*$:

1) автомат $\mathcal{A}$ из задачи 23.1;

2) автомат $\mathcal{B}$ из задачи 23.2.