Математическая логика
и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2016, весенний семестр

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Насколько трудна эта задача?

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Насколько трудна эта задача?

Она кажется не особо простой

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Насколько трудна эта задача?

Она кажется не особо простой, так как

- интерпретации LTL-формул **бесконечны**

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Насколько трудна эта задача?

Она кажется не особо простой, так как

- интерпретации LTL-формул **бесконечны**
- LTS содержит **бесконечно много** интерпретаций (*трасс*)

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Насколько трудна эта задача?

Она кажется не особо простой, так как

- интерпретации LTL-формул **бесконечны**
- LTS содержит **бесконечно много** интерпретаций (*трасс*)

Тем не менее она имеет эффективное решение

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Насколько трудна эта задача?

Она кажется не особо простой, так как

- интерпретации LTL-формул **бесконечны**
- LTS содержит **бесконечно много** интерпретаций (*трасс*)

Тем не менее она имеет эффективное решение, так как

- все интерпретации описаны **конечной** структурой — LTS M

Задача model checking для LTL

для заданных LTL-формулы φ и LTS M
проверить условие $M \models \varphi$

Насколько трудна эта задача?

Она кажется не особо простой, так как

- интерпретации LTL-формул **бесконечны**
- LTS содержит **бесконечно много** интерпретаций (*трасс*)

Тем не менее она имеет эффективное решение, так как

- все интерпретации описаны **конечной** структурой — LTS M

Как же выглядит алгоритм проверки соотношения $M \models \varphi$?

(табличный метод)

Задача model checking для LTL

Сначала ещё немного обозначений

Задача model checking для LTL

Сначала ещё немного обозначений

Рассмотрим трассу tr LTS M:

$$tr\colon s_1 \to s_2 \to s_3 \to \dots$$

и LTL-формулу φ

Задача model checking для LTL

Сначала ещё немного обозначений

Рассмотрим трассу tr LTS M:

$$tr\colon s_1 \to s_2 \to s_3 \to \ldots$$

и LTL-формулу φ

$tr \models \varphi$ — сокращение для записи $\mathcal{I}(tr), 1 \models \varphi$

Задача model checking для LTL

Сначала ещё немного обозначений

Рассмотрим трассу tr LTS M:

$$tr\colon s_1 \to s_2 \to s_3 \to \dots$$

и LTL-формулу φ

$tr \models \varphi$ — сокращение для записи $\mathcal{I}(tr), 1 \models \varphi$

$tr[j]$ — j-е состояние трассы tr: s_j

Задача model checking для LTL

Сначала ещё немного обозначений

Рассмотрим трассу tr LTS M:

$$tr\colon s_1 \to s_2 \to s_3 \to \dots$$

и LTL-формулу φ

$tr \models \varphi$ — сокращение для записи $\mathcal{I}(tr), 1 \models \varphi$

$tr[j]$ — j-е состояние трассы tr: s_j

$tr|_j$ — суффикс трассы tr, начинающийся с состояния $tr[j]$:

$$s_j \to s_{j+1} \to s_{j+2} \to \dots$$

Задача model checking для LTL

Утверждение. Пусть M — LTS и φ — LTL-формула
Тогда
$M \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует начальная трасса tr LTS M, такая что $\mathbf{t} \not\models \varphi$

Задача model checking для LTL

Утверждение. Пусть M — LTS и φ — LTL-формула
Тогда
$M \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует начальная трасса tr LTS M, такая что $\mathbf{t} \not\models \varphi$

Доказательство. По опредлению соотношения $M \not\models \varphi$ ▼

Задача model checking для LTL

Утверждение. Пусть M — LTS и φ — LTL-формула
Тогда

$M \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует начальная трасса tr LTS M, такая что $\mathbf{t} \not\models \varphi$

Доказательство. По определнению соотношения $M \not\models \varphi$ ▼

Значит, достаточно решить такую задачу: $(\psi = \neg\varphi)$

найти начальную трассу tr LTS M,
для которой верно $tr \models \psi$

Задача model checking для LTL

Утверждение. **Пусть M — LTS и φ — LTL-формула**
Тогда

$M \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **существует начальная трасса tr LTS M, такая что $\mathbf{t} \not\models \varphi$**

Доказательство. По опредлению соотношения $M \not\models \varphi$ ▼

Значит, достаточно решить такую задачу: $(\psi = \neg\varphi)$

найти начальную трассу tr LTS M,
для которой верно $tr \models \psi$

- *Трасса найдена:* $M \not\models \varphi$
- *Такой трассы не существует:* $M \models \varphi$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

Упростим формулу φ (*как в методе резолюций*)

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Упростим формулу φ (*как в методе резолюций*)

Формула φ находится в позитивной форме
(или является позитивной формой), если в ней

- не содержится символов $\to$, **F**, **G**
  - то есть используются только операции $\&$, $\vee$, $\neg$, **X**, **U**, **R**
- связка $\neg$ применяется **только** к атомарным высказываниям

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Упростим формулу φ (*как в методе резолюций*)

Формула φ находится в позитивной форме
(или является позитивной формой), если в ней

- не содержится символов $\rightarrow$, **F**, **G**
  - то есть используются только операции $\&$, $\vee$, $\neg$, **X**, **U**, **R**
- связка $\neg$ применяется **только** к атомарным высказываниям

Утверждение

Для любой LTL-формулы φ существует равносильная ей позитивная форма

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Утверждение

Для любой LTL-формулы φ существует равносильная ей позитивная форма

Доказательство.

Явно построим требуемую позитивную форму ψ

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Утверждение

Для любой LTL-формулы φ существует равносильная ей позитивная форма

Доказательство.

Явно построим требуемую позитивную форму ψ

Для этого достаточно

- удалить связки $\to$: $\varphi_1 \to \varphi_2 \approx \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Утверждение

Для любой LTL-формулы φ существует равносильная ей позитивная форма

Доказательство.

Явно построим требуемую позитивную форму ψ

Для этого достаточно

- удалить связки $\to$: $\varphi_1 \to \varphi_2 \approx \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$
- удалить операторы **F**: $\mathbf{F}\varphi_1 \approx \mathbf{true}\ \mathbf{U}\varphi_1$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Утверждение

Для любой LTL-формулы φ существует равносильная ей позитивная форма

Доказательство.

Явно построим требуемую позитивную форму ψ

Для этого достаточно

- удалить связки $\to$: $\varphi_1 \to \varphi_2 \approx \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$
- удалить операторы **F**: $\mathbf{F}\varphi_1 \approx \mathbf{true}\ \mathbf{U}\varphi_1$
- удалить операторы **G**: $\mathbf{G}\varphi_1 \approx \mathbf{false}\ \mathbf{R}\varphi_1$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Утверждение

Для любой LTL-формулы φ существует равносильная ей позитивная форма

Доказательство.

Явно построим требуемую позитивную форму ψ

Для этого достаточно

- удалить связки $\to$: $\varphi_1 \to \varphi_2 \approx \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$
- удалить операторы **F**: $\mathbf{F}\varphi_1 \approx \mathbf{true}\ \mathbf{U}\varphi_1$
- удалить операторы **G**: $\mathbf{G}\varphi_1 \approx \mathbf{false}\ \mathbf{R}\varphi_1$
- продвинуть отрицания вглубь формулы:

$$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \approx \neg\varphi_1 \,\&\, \neg\varphi_2 \qquad \neg\mathbf{X}\varphi_1 \approx \mathbf{X}\neg\varphi_1$$
$$\neg(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \approx \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \qquad \neg(\varphi_1\mathbf{U}\varphi_2) \approx \neg\varphi_1\mathbf{R}\neg\varphi_2$$
$$\neg\neg\varphi_1 \approx \varphi_1 \qquad \neg(\varphi_1\mathbf{R}\varphi_2) \approx \neg\varphi_1\mathbf{U}\neg\varphi_2$$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Пример

$$\mathbf{G}(free \,\&\, \mathbf{X}busy \rightarrow \mathbf{XF}(pr_1 \vee pr_2))$$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Пример

$$\mathbf{G}(free\,\&\,\mathbf{X}busy \rightarrow \mathbf{XF}(pr_1 \vee pr_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(free\,\&\,\mathbf{X}busy) \vee \mathbf{XF}(pr_1 \vee pr_2))$$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

Пример

$$\mathbf{G}(free \,\&\, \mathbf{X} busy \rightarrow \mathbf{XF}(pr_1 \vee pr_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(free \,\&\, \mathbf{X} busy) \vee \mathbf{XF}(pr_1 \vee pr_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(free \,\&\, \mathbf{X} busy) \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Пример

$$\mathbf{G}(\mathit{free} \mathbin{\&} \mathbf{X}\mathit{busy} \rightarrow \mathbf{XF}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(\mathit{free} \mathbin{\&} \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{XF}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(\mathit{free} \mathbin{\&} \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg(\mathit{free} \mathbin{\&} \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Пример

$$\mathbf{G}(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy} \rightarrow \mathbf{XF}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{XF}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg\mathit{free} \vee \neg\mathbf{X}\mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Пример

$$\mathbf{G}(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy} \rightarrow \mathbf{XF}(pr_1 \vee pr_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{XF}(pr_1 \vee pr_2))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{G}(\neg(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg(\mathit{free} \,\&\, \mathbf{X}\mathit{busy}) \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg\mathit{free} \vee \neg\mathbf{X}\mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$\approx$$

$$\mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg\mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg\mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

Попытаемся решить задачу индукцией по построению формулы

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

Попытаемся решить задачу индукцией по построению формулы:

- пусть $\varphi = OP\ \psi_1$ или $\varphi = \psi_1\ OP\ \psi_2$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

Попытаемся решить задачу индукцией по построению формулы:

- пусть $\varphi = OP\ \psi_1$ или $\varphi = \psi_1\ OP\ \psi_2$
- для каждой подформулы ψ_i и каждого соотояния s LTS M решим задачу "$\exists tr \in Tr_0(M(s)) : \quad tr \models \varphi?$"
  - LTS $M(s)$ получается из LTS M заменой заменой множества начальных состояний на $\{s\}$

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

Попытаемся решить задачу индукцией по построению формулы:

- пусть $\varphi = OP\ \psi_1$ или $\varphi = \psi_1\ OP\ \psi_2$
- для каждой подформулы ψ_i и каждого соотояния s LTS M решим задачу "$\exists tr \in Tr_0(M(s)): \quad tr \models \varphi?$"
  - LTS $M(s)$ получается из LTS M заменой заменой множества начальных состояний на $\{s\}$
- предоставим ответ, основанный на ответах для ψ_1, ψ_2 и на операции OP

Задача model checking для LTL

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

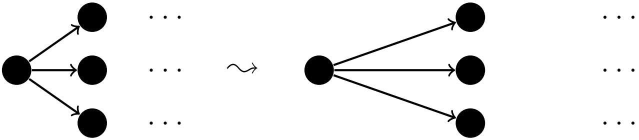
Попытаемся решить задачу индукцией по построению формулы:

- пусть $\varphi = OP\ \psi_1$ или $\varphi = \psi_1\ OP\ \psi_2$
- для каждой подформулы ψ_i и каждого соотояния s LTS M решим задачу "$\exists tr \in Tr_0(M(s)): \quad tr \models \varphi?$"
  - LTS $M(s)$ получается из LTS M заменой заменой множества начальных состояний на $\{s\}$
- предоставим ответ, основанный на ответах для ψ_1, ψ_2 и на операции OP

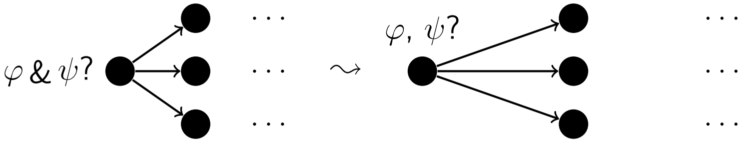
Какие сложности возникают в таком индуктивном решении?

Задача model checking для LTL

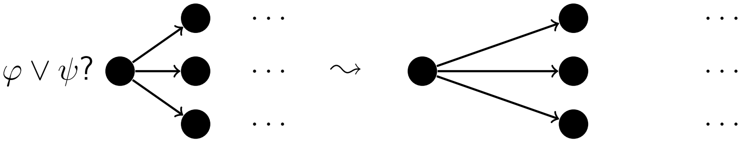
$\varphi \,\&\, \psi?$



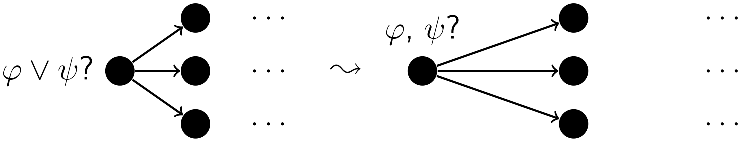
Задача model checking для LTL



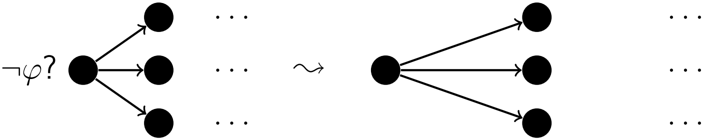
Задача model checking для LTL



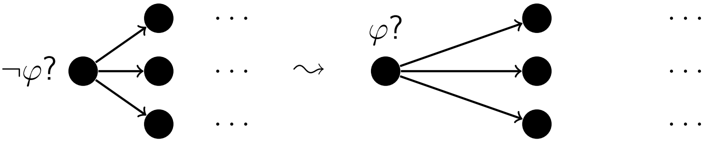
Задача model checking для LTL



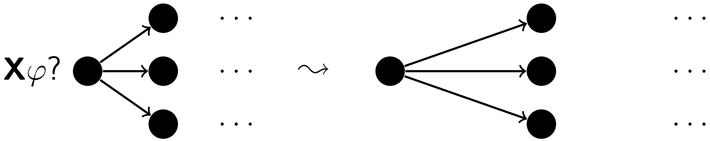
Задача model checking для LTL



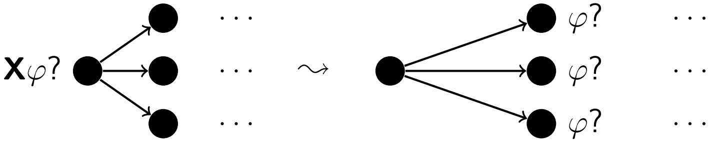
Задача model checking для LTL



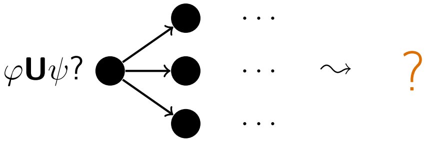
Задача model checking для LTL



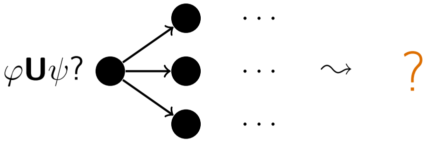
Задача model checking для LTL



Задача model checking для LTL



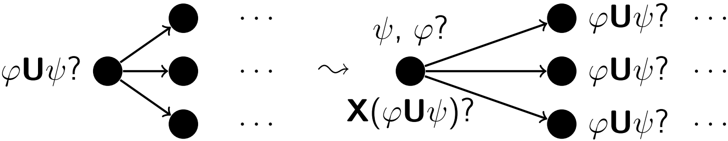
Задача model checking для LTL



Вспомним закон неподвижной точки:

$$\varphi\mathbf{U}\psi \approx \psi \vee \varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi\mathbf{U}\psi)$$

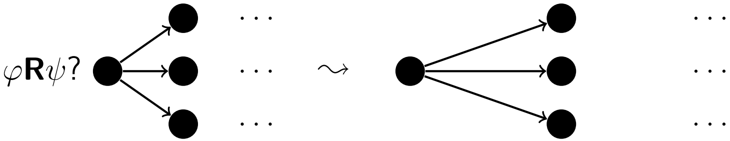
Задача model checking для LTL



Вспомним закон неподвижной точки:

$$\varphi \mathbf{U} \psi \approx \psi \vee \varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi \mathbf{U} \psi)$$

Задача model checking для LTL

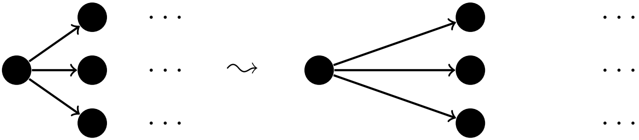


Вспомним закон неподвижной точки:

$$\varphi\mathbf{U}\psi \approx \psi \vee \varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi\mathbf{U}\psi)$$

Задача model checking для LTL

$\varphi \mathbf{R} \psi$?

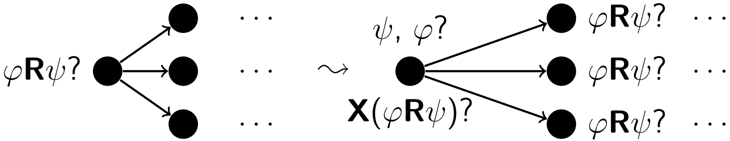


Вспомним законы неподвижной точки:

$$\varphi \mathbf{U} \psi \approx \psi \vee \varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi \mathbf{U} \psi)$$

$$\varphi \mathbf{R} \psi \approx \psi \,\&(\varphi \vee \mathbf{X}(\varphi \mathbf{R} \psi))$$

Задача model checking для LTL

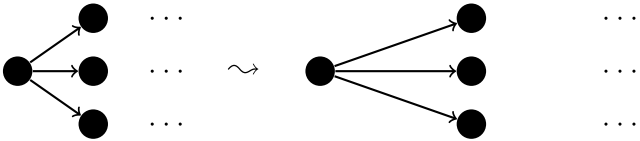


Вспомним законы неподвижной точки:

$$\varphi \mathbf{U} \psi \approx \psi \vee \varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi \mathbf{U} \psi)$$

$$\varphi \mathbf{R} \psi \approx \psi \,\&(\varphi \vee \mathbf{X}(\varphi \mathbf{R} \psi))$$

Задача model checking для LTL



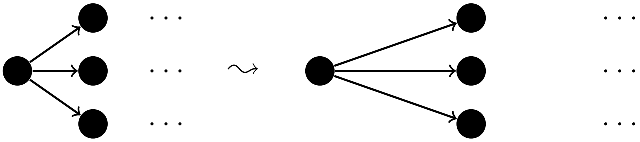
Вспомним законы неподвижной точки:

$$\varphi \mathbf{U} \psi \approx \psi \vee \varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi \mathbf{U} \psi)$$

$$\varphi \mathbf{R} \psi \approx \psi \,\&(\varphi \vee \mathbf{X}(\varphi \mathbf{R} \psi))$$

При попытке применить индуктивный способ проверки соотношения $M \models \varphi$ существенными становятся и некоторые формулы, **не являющиеся** подформулами φ

Задача model checking для LTL



Вспомним законы неподвижной точки:

$$\varphi \mathbf{U} \psi \approx \psi \vee \varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi \mathbf{U} \psi)$$

$$\varphi \mathbf{R} \psi \approx \psi \,\&(\varphi \vee \mathbf{X}(\varphi \mathbf{R} \psi))$$

При попытке применить индуктивный способ проверки соотношения $M \models \varphi$ существенными становятся и некоторые формулы, **не являющиеся** подформулами φ

А насколько много новых формул возникает в таком решении?

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно
- *(формально)* наименьшее множество формул, такое что:

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно
- *(формально)* наименьшее множество формул, такое что:
  - $\varphi \in [\varphi]_{FL}$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно
- *(формально)* наименьшее множество формул, такое что:
  - $\varphi \in [\varphi]_{FL}$
  - если $p \in [\varphi]_{FL}$, то $\neg p \in [\varphi]_{FL}$ $\quad (p \in \mathcal{P})$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно
- *(формально)* наименьшее множество формул, такое что:
  - $\varphi \in [\varphi]_{FL}$
  - если $p \in [\varphi]_{FL}$, то $\neg p \in [\varphi]_{FL}$ $\quad (p \in \mathcal{P})$
  - если $\psi \,\&\, \chi \in [\varphi]_{FL}$ или $\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL}$, то $\{\psi, \chi\} \subseteq [\varphi]_{FL}$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно
- *(формально)* наименьшее множество формул, такое что:
  - $\varphi \in [\varphi]_{FL}$
  - если $p \in [\varphi]_{FL}$, то $\neg p \in [\varphi]_{FL}$ $\quad (p \in \mathcal{P})$
  - если $\psi \,\&\, \chi \in [\varphi]_{FL}$ или $\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL}$, то $\{\psi, \chi\} \subseteq [\varphi]_{FL}$
  - если $\neg\psi \in [\varphi]_{FL}$ или $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$, то $\psi \in [\varphi]_{FL}$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно
- *(формально)* наименьшее множество формул, такое что:
  - $\varphi \in [\varphi]_{FL}$
  - если $p \in [\varphi]_{FL}$, то $\neg p \in [\varphi]_{FL}$ $\quad (p \in \mathcal{P})$
  - если $\psi \,\&\, \chi \in [\varphi]_{FL}$ или $\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL}$, то $\{\psi, \chi\} \subseteq [\varphi]_{FL}$
  - если $\neg\psi \in [\varphi]_{FL}$ или $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$, то $\psi \in [\varphi]_{FL}$
  - если $\psi \mathbf{U} \chi \in [\varphi]_{FL}$, то $\{\psi, \chi, \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi)\} \subseteq [\varphi]_{FL}$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пусть φ — позитивная форма

Замыкание Фишера-Ладнера $[\varphi]_{FL}$ формулы φ — это

- *(неформально)* все формулы, которые только могут возникнуть при попытке решить задачу индуктивно
- *(формально)* наименьшее множество формул, такое что:
  - $\varphi \in [\varphi]_{FL}$
  - если $p \in [\varphi]_{FL}$, то $\neg p \in [\varphi]_{FL}$ $\quad (p \in \mathcal{P})$
  - если $\psi \,\&\, \chi \in [\varphi]_{FL}$ или $\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL}$, то $\{\psi, \chi\} \subseteq [\varphi]_{FL}$
  - если $\neg\psi \in [\varphi]_{FL}$ или $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$, то $\psi \in [\varphi]_{FL}$
  - если $\psi\mathbf{U}\chi \in [\varphi]_{FL}$, то $\{\psi, \chi, \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi)\} \subseteq [\varphi]_{FL}$
  - если $\psi\mathbf{R}\chi \in [\varphi]_{FL}$, то $\{\psi, \chi, \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi)\} \subseteq [\varphi]_{FL}$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

φ: **false R**$(\neg \mathit{free} \lor \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \lor \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \lor pr_2)))$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \qquad \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi\text{: } \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi\text{: } \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi, \\ \mathbf{false}, \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)), \mathbf{X}\varphi \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

φ: $\mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi, \\ \mathbf{false}, \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \mathbf{X}\varphi, \\ \neg \mathit{free}, \mathbf{X}\neg \mathit{busy}, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)) \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

φ: $\textbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\textbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi, \\ \textbf{false}, \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\textbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \mathbf{X}\varphi, \\ \neg \mathit{free}, \mathbf{X}\neg \mathit{busy}, \mathbf{X}(\textbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \\ \mathit{free}, \neg \mathit{busy}, \textbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2) \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi\text{: } \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi, \\ \mathbf{false}, \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \mathbf{X}\varphi, \\ \neg \mathit{free}, \mathbf{X}\neg \mathit{busy}, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \\ \mathit{free}, \neg \mathit{busy}, \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2), \\ \mathit{busy}, \mathbf{true}, pr_1 \vee pr_2 \\ \\ \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi\colon \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \lor \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \lor \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \lor pr_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi, \\ \mathbf{false}, \neg \mathit{free} \lor \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \lor \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \lor pr_2)), \mathbf{X}\varphi, \\ \neg \mathit{free}, \mathbf{X}\neg \mathit{busy}, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \lor pr_2)), \\ \mathit{free}, \neg \mathit{busy}, \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \lor pr_2), \\ \mathit{busy}, \mathbf{true}, pr_1 \lor pr_2, \\ pr_1, pr_2, \neg pr_1, \neg pr_2 \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi\text{: } \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi, \\ \mathbf{false}, \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \mathbf{X}\varphi, \\ \neg \mathit{free}, \mathbf{X}\neg \mathit{busy}, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \\ \mathit{free}, \neg \mathit{busy}, \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2), \\ \mathit{busy}, \mathbf{true}, pr_1 \vee pr_2, \\ pr_1, pr_2, \neg pr_1, \neg pr_2 \end{array} \right\}$$

Утверждение

Если позитивная форма ψ содержит n операций, то

$$|[\varphi]_{FL}| \leq 3n$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi\text{: } \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi, \\ \mathbf{false}, \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \mathbf{X}\varphi, \\ \neg \mathit{free}, \mathbf{X}\neg \mathit{busy}, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \\ \mathit{free}, \neg \mathit{busy}, \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2), \\ \mathit{busy}, \mathbf{true}, pr_1 \vee pr_2, \\ pr_1, pr_2, \neg pr_1, \neg pr_2 \end{array} \right\}$$

Утверждение

Если позитивная форма ψ содержит n операций, то

$$|[\varphi]_{FL}| \leq 3n$$

Доказательство.Очевидно

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

- $[\varphi]_{\mathcal{P}} = [\varphi]_{FL} \cap \mathcal{P}$

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

- $[\varphi]_{\mathcal{P}} = [\varphi]_{FL} \cap \mathcal{P}$
- $[\varphi]_{X}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\mathbf{X}\psi$

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

- $[\varphi]_{\mathcal{P}} = [\varphi]_{FL} \cap \mathcal{P}$
- $[\varphi]_{X}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\mathbf{X}\psi$
- $[\varphi]_{UR}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\psi\mathbf{U}\chi$ и $\psi\mathbf{R}\chi$

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

- $[\varphi]_{\mathcal{P}} = [\varphi]_{FL} \cap \mathcal{P}$
- $[\varphi]_{X}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\mathbf{X}\psi$
- $[\varphi]_{UR}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\psi\mathbf{U}\chi$ и $\psi\mathbf{R}\chi$

Пример

$$\varphi\colon \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

- $[\varphi]_{\mathcal{P}} = [\varphi]_{FL} \cap \mathcal{P}$
- $[\varphi]_{X}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\mathbf{X}\psi$
- $[\varphi]_{UR}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\psi\mathbf{U}\chi$ и $\psi\mathbf{R}\chi$

Пример

$$\varphi\colon \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg free \vee \mathbf{X}\neg busy \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{\mathcal{P}} = \{free, busy, pr_1, pr_2\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

- $[\varphi]_{\mathcal{P}} = [\varphi]_{FL} \cap \mathcal{P}$
- $[\varphi]_X$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\mathbf{X}\psi$
- $[\varphi]_{UR}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\psi\mathbf{U}\chi$ и $\psi\mathbf{R}\chi$

Пример

$$\varphi\text{: } \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg free \vee \mathbf{X}\neg busy \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{\mathcal{P}} = \{free, busy, pr_1, pr_2\}$$

$$[\varphi]_X = \{\mathbf{X}\varphi, \mathbf{X}\neg busy, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2))\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Особую роль при проверке соотношения $M \models \varphi$ будут играть формулы вида $\mathbf{X}\psi$, $\psi\mathbf{U}\chi$, $\psi\mathbf{R}\chi$

База индуктивного решения — это выяснение того, какие атомарные события выполняются в заданном состоянии

Для удобства рассуждений будем использовать такие обозначения:

- $[\varphi]_{\mathcal{P}} = [\varphi]_{FL} \cap \mathcal{P}$
- $[\varphi]_{X}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\mathbf{X}\psi$
- $[\varphi]_{UR}$ — формулы множества $[\varphi]_{FL}$ вида $\psi\mathbf{U}\chi$ и $\psi\mathbf{R}\chi$

Пример

$$\varphi\text{: } \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg free \vee \mathbf{X}\neg busy \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{\mathcal{P}} = \{free, busy, pr_1, pr_2\}$$

$$[\varphi]_{X} = \{\mathbf{X}\varphi, \mathbf{X}\neg busy, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2))\}$$

$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi, \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Явных противоречий можно избежать, используя только согласованные предположения H:

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Явных противоречий можно избежать, используя только согласованные предположения H:

- **false** $\notin H$

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Явных противоречий можно избежать, используя только согласованные предположения H:

- **false** $\notin H$
- формулы p и $\neg p$ не входят в H одновременно $\qquad (p \in \mathcal{P})$

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Явных противоречий можно избежать, используя только согласованные предположения H:

- **false** $\notin H$
- формулы p и $\neg p$ не входят в H одновременно $\qquad (p \in \mathcal{P})$
- $\psi \vee \chi \in H \Leftrightarrow \{\psi, \chi\} \cap H \neq \emptyset \qquad (\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL})$

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Явных противоречий можно избежать, используя только согласованные предположения H:

- **false** $\notin H$
- формулы p и $\neg p$ не входят в H одновременно $\quad (p \in \mathcal{P})$
- $\psi \vee \chi \in H \Leftrightarrow \{\psi, \chi\} \cap H \neq \emptyset \quad (\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL})$
- $\psi \,\&\, \chi \in H \Leftrightarrow \{\psi, \chi\} \subseteq H \quad (\psi \,\&\, \chi \in [\varphi]_{FL})$

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Явных противоречий можно избежать, используя только согласованные предположения H:

- **false** $\notin H$
- формулы p и $\neg p$ не входят в H одновременно $\qquad (p \in \mathcal{P})$
- $\psi \vee \chi \in H \Leftrightarrow \{\psi, \chi\} \cap H \neq \emptyset \qquad (\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL})$
- $\psi \,\&\, \chi \in H \Leftrightarrow \{\psi, \chi\} \subseteq H \qquad (\psi \,\&\, \chi \in [\varphi]_{FL})$
- $\psi \mathbf{U} \chi \in H \Leftrightarrow \chi \in H$ или $\{\psi, \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi)\} \subseteq H \qquad (\psi \mathbf{U} \chi \in [\varphi]_{FL})$

Замыкание Фишера-Ладнера

По аналогии с методом семантических таблиц будем выдвигать предположения о выполнимости формул в состояниях LTS

Предположение (*в контексте LTL-формулы* φ) — это любое подмножество множества $[\varphi]_{FL}$

Формула предполагается верной $\Leftrightarrow$ она входит в предположение

Так как требуется **найти** нужную трассу LTS, будем пытаться избегать противоречий, выдвигая предположения

Явных противоречий можно избежать, используя только согласованные предположения H:

- **false** $\notin H$
- формулы p и $\neg p$ не входят в H одновременно $\qquad (p \in \mathcal{P})$
- $\psi \vee \chi \in H \Leftrightarrow \{\psi, \chi\} \cap H \neq \emptyset \qquad (\psi \vee \chi \in [\varphi]_{FL})$
- $\psi \,\&\, \chi \in H \Leftrightarrow \{\psi, \chi\} \subseteq H \qquad (\psi \,\&\, \chi \in [\varphi]_{FL})$
- $\psi \mathbf{U} \chi \in H \Leftrightarrow \chi \in H$ или $\{\psi, \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi)\} \subseteq H \qquad (\psi \mathbf{U} \chi \in [\varphi]_{FL})$
- $\psi \mathbf{R} \chi \in H \Leftrightarrow \chi \in H$ и либо $\psi \in H$, либо $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H$ $\qquad (\psi \mathbf{R} \chi \in [\varphi]_{FL})$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi : \mathbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \mathit{free}, \mathit{busy}, pr_1, pr_2, \neg \mathit{free}, \neg \mathit{busy}, \neg pr_1, \neg pr_2, \\ pr_1 \vee pr_2, \\ \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2), \\ \mathbf{X}\neg \mathit{busy}, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \\ \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \\ \varphi, \mathbf{X}\varphi \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Пример

$$\varphi : \textbf{false}\ \mathbf{R}(\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\textbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$$

$$[\varphi]_{FL} = \left\{ \begin{array}{l} \mathit{free}, \mathit{busy}, \mathit{pr}_1, \mathit{pr}_2, \neg\mathit{free}, \neg\mathit{busy}, \neg\mathit{pr}_1, \neg\mathit{pr}_2, \\ \mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2, \\ \textbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2), \\ \mathbf{X}\neg\mathit{busy}, \mathbf{X}(\textbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)), \\ \neg\mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg\mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\textbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)), \\ \varphi, \mathbf{X}\varphi \end{array} \right\}$$

Такое множество H является согласованным предположением:

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \textbf{true}, \mathit{pr}_1, \neg\mathit{pr}_2, \neg\mathit{free}, \mathit{busy}, \mathbf{X}\neg\mathit{busy}, \\ \textbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2), \mathbf{X}(\textbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)), \varphi\} \end{array} \right\}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Позволяет ли согласованность предположения избежать **всех** противоречий?

Замыкание Фишера-Ладнера

Позволяет ли согласованность предположения избежать **всех** противоречий?

Нет!

Замыкание Фишера-Ладнера

Позволяет ли согласованность предположения избежать **всех** противоречий?

Нет!

Например, такие две формулы:

$\mathbf{X}p$: “я завтра брошу пить”,
$\mathbf{X}\neg p$: “завтра всё как обычно” —

образуют неявное противоречие

Замыкание Фишера-Ладнера

Позволяет ли согласованность предположения избежать **всех** противоречий?

Нет!

Например, такие две формулы:

$\mathbf{X}p$: "я завтра брошу пить",
$\mathbf{X}\neg p$: "завтра всё как обычно" —

образуют неявное противоречие:

- мой образ жизни **сегодня** никак ими не затрагивается

Замыкание Фишера-Ладнера

Позволяет ли согласованность предположения избежать **всех** противоречий?

Нет!

Например, такие две формулы:

$\mathbf{X}p$: “я завтра брошу пить”,
$\mathbf{X}\neg p$: “завтра всё как обычно” —

образуют неявное противоречие:

- мой образ жизни **сегодня** никак ими не затрагивается
- **завтра** я никак не смогу сдержать оба обещания

Замыкание Фишера-Ладнера

Позволяет ли согласованность предположения избежать **всех** противоречий?

Нет!

Например, такие две формулы:

$\mathbf{X}p$: “я завтра брошу пить”,
$\mathbf{X}\neg p$: “завтра всё как обычно” —

образуют неявное противоречие:

- мой образ жизни **сегодня** никак ими не затрагивается
- **завтра** я никак не смогу сдержать оба обещания
- формулы $\mathbf{X}p$, $\mathbf{X}\neg p$ **могут** одновременно входить в согласованное предположение

Замыкание Фишера-Ладнера

А обязано ли непротиворечивое предположение быть согласованным?

Замыкание Фишера-Ладнера

А обязано ли непротиворечивое предположение быть согласованным?

Утверждение

Пусть $\mathcal{I}$ — темпоральная интерпретация и φ — позитивная форма
Тогда для любого момента времени n множество

$$\{\psi \mid \psi \in [\varphi]_{FL} \text{ и } \mathcal{I}, n \models \psi\}$$

является согласованным предположением

Замыкание Фишера-Ладнера

А обязано ли непротиворечивое предположение быть согласованным?

Утверждение
Пусть $\mathcal{I}$ — темпоральная интерпретация
и φ — позитивная форма
Тогда для любого момента времени n множество

$$\{\psi \mid \psi \in [\varphi]_{FL} \text{ и } \mathcal{I}, n \models \psi\}$$

является согласованным предположением

Доказательство. Это просто
(достаточно использовать определение согласованности)

Замыкание Фишера-Ладнера

А обязано ли непротиворечивое предположение быть согласованным?

Утверждение
Пусть $\mathcal{I}$ — темпоральная интерпретация
и φ — позитивная форма
Тогда для любого момента времени n множество

$$\{\psi \mid \psi \in [\varphi]_{FL} \text{ и } \mathcal{I}, n \models \psi\}$$

является согласованным предположением

Доказательство. Это просто

(достаточно использовать определение согласованности)

А насколько просто перебирать и сравнивать между собой согласованные предположения?

Замыкание Фишера-Ладнера

Утверждение

Для любой позитивной формы φ верно следующее:

1. для любой пары множеств $H_{\mathcal{P}} \subseteq [\varphi]_{\mathcal{P}}$, $H_X \subseteq [\varphi]_X$ существует согласованное предположение H, такое что $H \cap [\varphi]_{\mathcal{P}} = H_{\mathcal{P}}$ и $H \cap [\varphi]_X = H_X$

Замыкание Фишера-Ладнера

Утверждение

Для любой позитивной формы φ верно следующее:

1. для любой пары множеств $H_{\mathcal{P}} \subseteq [\varphi]_{\mathcal{P}}$, $H_X \subseteq [\varphi]_X$ существует согласованное предположение H, такое что $H \cap [\varphi]_{\mathcal{P}} = H_{\mathcal{P}}$ и $H \cap [\varphi]_X = H_X$
2. для любых согласованных предположений H_1, H_2 верно следующее:
$$H_1 = H_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} H_1 \cap \mathcal{P} = H_2 \cap \mathcal{P} \text{ и} \\ H_1 \cap [\varphi]_X = H_2 \cap [\varphi]_X \end{array}$$

Замыкание Фишера-Ладнера

Утверждение

Для любой позитивной формы φ верно следующее:

1. для любой пары множеств $H_{\mathcal{P}} \subseteq [\varphi]_{\mathcal{P}}$, $H_X \subseteq [\varphi]_X$ существует согласованное предположение H, такое что $H \cap [\varphi]_{\mathcal{P}} = H_{\mathcal{P}}$ и $H \cap [\varphi]_X = H_X$
2. для любых согласованных предположений H_1, H_2 верно следующее:
$$H_1 = H_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} H_1 \cap \mathcal{P} = H_2 \cap \mathcal{P} \text{ и} \\ H_1 \cap [\varphi]_X = H_2 \cap [\varphi]_X \end{array}$$

Доказательство. Попробуйте сами

Замыкание Фишера-Ладнера

Утверждение

Для любой позитивной формы φ верно следующее:

1. для любой пары множеств $H_{\mathcal{P}} \subseteq [\varphi]_{\mathcal{P}}$, $H_X \subseteq [\varphi]_X$ существует согласованное предположение H, такое что $H \cap [\varphi]_{\mathcal{P}} = H_{\mathcal{P}}$ и $H \cap [\varphi]_X = H_X$
2. для любых согласованных предположений H_1, H_2 верно следующее:

$$H_1 = H_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} H_1 \cap \mathcal{P} = H_2 \cap \mathcal{P} \text{ и} \\ H_1 \cap [\varphi]_X = H_2 \cap [\varphi]_X \end{array}$$

Доказательство. Попробуйте сами

Следствие. Если позитивная форма φ содержит n операций, то число различных согласованных предположений не превосходит 2^{3n}

Табличный метод model checking

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

А как выдвижение согласованных предположений поможет решить исходную задачу?

Табличный метод model checking

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

А как выдвижение согласованных предположений поможет решить исходную задачу?

- будем обходить LTS M всеми возможными способами

Табличный метод model checking

$$\exists tr \in Tr_0(M) : \quad tr \models \varphi?$$

А как выдвижение согласованных предположений поможет решить исходную задачу?

- будем обходить LTS M всеми возможными способами
- для каждого шага обхода будем выдвигать согласованное предположение о том, какие формулы из $[\varphi]_{FL}$ выполняются на текущем шаге в текущем состоянии, а какие не выполняются

Табличный метод model checking

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

А как выдвижение согласованных предположений поможет решить исходную задачу?

- будем обходить LTS M всеми возможными способами
- для каждого шага обхода будем выдвигать согласованное предположение о том, какие формулы из $[\varphi]_{FL}$ выполняются на текущем шаге в текущем состоянии, а какие не выполняются
- кроме (*внутренней*) согласованности предположений потребуем их согласованность на соседних шагах обхода

Табличный метод model checking

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

А как выдвижение согласованных предположений поможет решить исходную задачу?

- будем обходить LTS M всеми возможными способами
- для каждого шага обхода будем выдвигать согласованное предположение о том, какие формулы из $[\varphi]_{FL}$ выполняются на текущем шаге в текущем состоянии, а какие не выполняются
- кроме (*внутренней*) согласованности предположений потребуем их согласованность на соседних шагах обхода
- проверим, используя разметку LTS M предположениями, существует ли в M требуемая трасса tr

Табличный метод model checking

$$\exists tr \in Tr_0(M): \quad tr \models \varphi?$$

А как выдвижение согласованных предположений поможет решить исходную задачу?

- будем обходить LTS M всеми возможными способами
- для каждого шага обхода будем выдвигать согласованное предположение о том, какие формулы из $[\varphi]_{FL}$ выполняются на текущем шаге в текущем состоянии, а какие не выполняются
- кроме (*внутренней*) согласованности предположений потребуем их согласованность на соседних шагах обхода
- проверим, используя разметку LTS M предположениями, существует ли в M требуемая трасса tr

А как может выглядеть LTS, размеченная предположениями согласованным образом?

Табличный метод model checking

Система Хинтикки[1] для LTS $M = (S, S_0, \rightarrow, \rho)$ и позитивной формы φ — это ориентированный граф $\Gamma_{M,\varphi} = (V, E)$ следующего вида:

[1] Каарло Яакко Юхани Хинти́кка

Табличный метод model checking

Система Хинтикки[1] для LTS $M = (S, S_0, \to, \rho)$ и позитивной формы φ — это ориентированный граф $\Gamma_{M,\varphi} = (V, E)$ следующего вида:

- $V = \left\{ (s, H) \;\middle|\; \begin{array}{l} H \text{ — согласованное предположение;} \\ s \in S; \quad H \cap \mathcal{P} = \rho(s) \end{array} \right\}$
  - то есть вершина $\Gamma_{M,\varphi}$ — это состояние M, помеченное согласованным предположением, подтверждающимся разметкой s

[1] Каарло Яакко Юхани Хинти́кка

Табличный метод model checking

Система Хинтикки[1] для LTS $M = (S, S_0, \to, \rho)$ и позитивной формы φ — это ориентированный граф $\Gamma_{M,\varphi} = (V, E)$ следующего вида:

- $V = \left\{ (s, H) \;\middle|\; \begin{array}{l} H \text{ — согласованное предположение;} \\ s \in S; \quad H \cap \mathcal{P} = \rho(s) \end{array} \right\}$
  - то есть вершина $\Gamma_{M,\varphi}$ — это состояние M, помеченное согласованным предположением, подтверждающимся разметкой s
- $E = \left\{ (s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} (s_1, H_1), (s_2, H_2) \in V; \\ s_1 \to s_2; \\ \text{если } \mathbf{X}\psi \in [\varphi]_X, \text{ то} \\ \qquad \mathbf{X}\psi \in H_1 \Leftrightarrow \psi \in H_2 \end{array} \right\}$
  - то есть каждая дуга основана на переходе в M, и все предположения вида $\mathbf{X}\psi$ в начале дуги подтверждаются в конце дуги

[1] Каарло Яакко Юхани Хинти́кка

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:

$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$$

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:
$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$$
- для каждой формулы φ_i заведём цвет i

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:
$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$$
- для каждой формулы φ_i заведём цвет i
- окрасим вершину (s, H) в цвет i, если

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:
$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$$
- для каждой формулы φ_i заведём цвет i
- окрасим вершину (s, H) в цвет i, если
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{U} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
$$\chi \in H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \notin H$$

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:
$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$$
- для каждой формулы φ_i заведём цвет i
- окрасим вершину (s, H) в цвет i, если
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{U} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
  $$\chi \in H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \notin H$$
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{R} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
  $$\chi \notin H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H$$

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:
  $$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$$
- для каждой формулы φ_i заведём цвет i
- окрасим вершину (s, H) в цвет i, если
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{U} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
    $$\chi \in H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \notin H$$
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{R} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
    $$\chi \notin H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H$$

Результат такой раскраски назовём раскрашенной системой Хинтикки и будем обозначать так: $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:
$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$$
- для каждой формулы φ_i заведём цвет i
- окрасим вершину (s, H) в цвет i, если
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{U} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
  $$\chi \in H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \notin H$$
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{R} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
  $$\chi \notin H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H$$

Результат такой раскраски назовём раскрашенной системой Хинтикки и будем обозначать так: $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$

Бесконечный путь в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ назовём радужным, если каждый цвет $(1, 2, \ldots, m)$ встречается в нём бесконечно часто

Табличный метод model checking

Раскрасим граф $\Gamma_{M,\varphi}$ следующим образом:

- пронумеруем формулы множества $[\varphi]_{UR}$:
$$[\varphi]_{UR} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$$
- для каждой формулы φ_i заведём цвет i
- окрасим вершину (s, H) в цвет i, если
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{U} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
  $$\chi \in H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \notin H$$
  - $\varphi_i = \psi \mathbf{R} \chi$, и выполнено хотя бы одно из двух условий:
  $$\chi \notin H, \qquad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H$$

Результат такой раскраски назовём раскрашенной системой Хинтикки и будем обозначать так: $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$

Бесконечный путь в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ назовём радужным, если каждый цвет $(1, 2, \dots, m)$ встречается в нём бесконечно часто

И как понимать эту радужность?

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 1: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{U} \chi$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 1: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{U} \chi$

Что означает “вершина не окрашена в цвет i”?

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 1: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{U} \chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \notin H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H$$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \cdots \to (s_n, H_n) \to \ldots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 1: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{U} \chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \notin H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\neg\chi & & \neg\chi & & & & \neg\chi & & \\
\mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & \\
s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & s_{j+n} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \cdots \to (s_n, H_n) \to \ldots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 1: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{U} \chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \notin H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\neg\chi & & \neg\chi & & & & \neg\chi & & \\
\mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & \\
s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & s_{j+n} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \psi\mathbf{U}\chi & & & & \psi\mathbf{U}\chi & &
\end{array}$$

Табличный метод model checking

Рассмотрим нерадужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \cdots \to (s_n, H_n) \to \ldots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 1: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{U} \chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \notin H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\neg\chi & & \neg\chi & & & & \neg\chi & & \\
\mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) & & \\
s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & s_{j+n} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \psi\mathbf{U}\chi & & & & \psi\mathbf{U}\chi & &
\end{array}$$

Нижняя строка: для трассы $tr|_{j+1}$ верно $\psi \mathbf{U} \chi$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 1: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{U} \chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \notin H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\neg\chi & & \neg\chi & & & & \neg\chi & & \\
\mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) & & \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) & & & & \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) & & \\
s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & s_{j+n} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \psi \mathbf{U} \chi & & & & \psi \mathbf{U} \chi & &
\end{array}$$

Нижняя строка: для трассы $tr|_{j+1}$ верно $\psi \mathbf{U} \chi$

Верхняя строка: для трассы $tr|_{j+1}$ верно $\neg(\psi \mathbf{U} \chi)$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 2: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{R} \chi$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 2: цвет i сопоставлен формуле $\psi\mathbf{R}\chi$

Что означает “вершина не окрашена в цвет i”?

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 2: цвет i сопоставлен формуле $\psi\mathbf{R}\chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \in H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) \notin H$$

Табличный метод model checking

Рассмотрим нерадужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 2: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{R} \chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \in H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \notin H$$

$$\begin{array}{ccccccc} \chi & & \chi & & & & \chi \\ \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \\ s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & s_{j+n} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Табличный метод model checking

Рассмотрим нерадужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \cdots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 2: цвет i сопоставлен формуле $\psi\mathbf{R}\chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \in H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) \notin H$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\chi & & \chi & & & & \chi & & \\
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \\
s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & s_{j+n} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \neg\psi\mathbf{R}\chi & & & & \neg\psi\mathbf{R}\chi & &
\end{array}$$

Табличный метод model checking

Рассмотрим нерадужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 2: цвет i сопоставлен формуле $\psi \mathbf{R} \chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \in H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \notin H$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\chi & & \chi & & & & \chi & & \\
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \\
s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & s_{j+n} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \neg\psi\mathbf{R}\chi & & & & \neg\psi\mathbf{R}\chi & &
\end{array}$$

Нижняя строка: для трассы $tr|_{j+1}$ верно $\neg(\psi\mathbf{R}\chi)$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Случай 2: цвет i сопоставлен формуле $\psi\mathbf{R}\chi$

Что означает "вершина не окрашена в цвет i"?

$$\chi \in H \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{U}\chi) \notin H$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\chi & & \chi & & & & \chi & & \\
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \\
s_j & \longrightarrow & s_{j+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & s_{j+n} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \neg\psi\mathbf{R}\chi & & & & \neg\psi\mathbf{R}\chi & &
\end{array}$$

Нижняя строка: для трассы $tr|_{j+1}$ верно $\neg(\psi\mathbf{R}\chi)$

Верхняя строка: для трассы $tr|_{j+1}$ верно $\psi\mathbf{R}\chi$

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \cdots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Итог: предположения, сделанные в раскрашенной системе Хинтикки для **не**радужного пути, содержат противоречия

Табличный метод model checking

Рассмотрим **нерадужный** путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \cdots \to (s_n, H_n) \to \ldots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Итог: предположения, сделанные в раскрашенной системе Хинтикки для **нерадужного** пути, содержат противоречия

В результате имеется три способа избежать противоречий при выдвижении предположений:

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \cdots \to (s_n, H_n) \to \ldots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Итог: предположения, сделанные в раскрашенной системе Хинтикки для **не**радужного пути, содержат противоречия

В результате имеется три способа избежать противоречий при выдвижении предположений:

1. использовать согласованные предположения
   - тогда отсутствуют **явные** противоречия

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Итог: предположения, сделанные в раскрашенной системе Хинтикки для **не**радужного пути, содержат противоречия

В результате имеется три способа избежать противоречий при выдвижении предположений:

2. использовать согласованность дуг системы Хинтикки
   - тогда формулы вида $\mathbf{X}\psi$ не приводят к противоречиям в следующей вершине

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Итог: предположения, сделанные в раскрашенной системе Хинтикки для **не**радужного пути, содержат противоречия

В результате имеется три способа избежать противоречий при выдвижении предположений:

3. рассматривать только радужные пути

Табличный метод model checking

Рассмотрим **не**радужный путь в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$:

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

Существует цвет i, встречающийся в tr лишь конечное число раз

Значит, существует суффикс $tr|_j$ этого пути, в котором ни одна вершина не покрашена в цвет i

Итог: предположения, сделанные в раскрашенной системе Хинтикки для **не**радужного пути, содержат противоречия

В результате имеется три способа избежать противоречий при выдвижении предположений:

3. рассматривать только радужные пути
   - а этого хватит, чтобы утверждать, что отсутствуют неявные противоречия из-за формул $[\varphi]_{UR}$?

Табличный метод model checking

Оказывается, что хватит:

Теорема (табличный метод model checking для LTL)
Для любой позитивной формы φ и любой LTS $M = (S, S_0, \to, \rho)$ верно следующее:

$$M \not\models \varphi$$
$$\Leftrightarrow$$

в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует радужный путь,
исходящий из вершины (s, H),
где $s \in S_0$ и $\varphi \notin H$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Рассмотрим радужный путь

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$, такой что $s_1 \in S_0$ и $\varphi \notin H_1$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Рассмотрим радужный путь

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$, такой что $s_1 \in S_0$ и $\varphi \notin H_1$

По определению системы Хинтикки в LTS M существует такая начальная трасса tr:

$$s_1 \to s_2 \to \dots \to s_n \to \dots$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Рассмотрим радужный путь
$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$
в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$, такой что $s_1 \in S_0$ и $\varphi \notin H_1$

По определению системы Хинтикки в LTS M существует такая начальная трасса tr:
$$s_1 \to s_2 \to \dots \to s_n \to \dots$$

Покажем **индукцией по числу связок**, что для любой формулы $\psi \in [\varphi]_{FL}$ и любого натурального n верно
$$\psi \in H_n \quad \Leftrightarrow \quad tr|_n \models \psi$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Рассмотрим радужный путь

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$, такой что $s_1 \in S_0$ и $\varphi \notin H_1$

По определению системы Хинтикки в LTS M существует такая начальная трасса tr:

$$s_1 \to s_2 \to \dots \to s_n \to \dots$$

Покажем **индукцией по числу связок**, что для любой формулы $\psi \in [\varphi]_{FL}$ и любого натурального n верно

$$\psi \in H_n \quad \Leftrightarrow \quad tr|_n \models \psi$$

Проще говоря, покажем, что все предположения, сделанные для радужного пути, действительно верны

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Рассмотрим радужный путь

$$(s_1, H_1) \to (s_2, H_2) \to \dots \to (s_n, H_n) \to \dots$$

в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$, такой что $s_1 \in S_0$ и $\varphi \notin H_1$

По определению системы Хинтикки в LTS M существует такая начальная трасса tr:

$$s_1 \to s_2 \to \dots \to s_n \to \dots$$

Покажем **индукцией по числу связок**, что для любой формулы $\psi \in [\varphi]_{FL}$ и любого натурального n верно

$$\psi \in H_n \quad \Leftrightarrow \quad tr|_n \models \psi$$

Проще говоря, покажем, что все предположения, сделанные для радужного пути, действительно верны

Тогда достаточно будет использовать условие $\varphi \notin H_1$, чтобы заключить, что $tr \not\models \varphi$ и $M \not\models \varphi$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

База индукции:

Первая часть: $p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models p$

$$p \in H_n$$

Вторая часть: $\neg p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models p$

$$\neg p \in H_n$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

База индукции:

Первая часть: $p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models p$

$$\begin{array}{c} p \in H_n \\ \Leftrightarrow \\ p \in \rho(s_n) \end{array} \qquad \text{определение } \Gamma_{M,\varphi}$$

Вторая часть: $\neg p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models p$

$$\neg p \in H_n$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

База индукции:

Первая часть: $p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models p$

$$\begin{array}{cl} p \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{определение } \Gamma_{M,\varphi} \\ p \in \rho(s_n) & \\ \Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\ tr|_n \models p & \end{array}$$

Вторая часть: $\neg p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models p$

$$\neg p \in H_n$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

База индукции:

Первая часть: $p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models p$

$$\begin{array}{cl} p \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{определение } \Gamma_{M,\varphi} \\ p \in \rho(s_n) & \\ \Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\ tr|_n \models p & \end{array}$$

Вторая часть: $\neg p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models p$

$$\begin{array}{cl} \neg p \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{определение согласованности} \\ p \notin H_n & \end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

База индукции:

Первая часть: $p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models p$

$$p \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение } \Gamma_{M,\varphi}$$
$$p \in \rho(s_n)$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение выполнимости LTL-формул}$$
$$tr|_n \models p$$

Вторая часть: $\neg p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models p$

$$\neg p \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение согласованности}$$
$$p \notin H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{первая часть базы}$$
$$tr|_n \not\models p$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

База индукции:

Первая часть: $p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models p$

$$
\begin{array}{cl}
p \in H_n & \\
\Leftrightarrow & \text{определение } \Gamma_{M,\varphi} \\
p \in \rho(s_n) & \\
\Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\
tr|_n \models p &
\end{array}
$$

Вторая часть: $\neg p \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models p$

$$
\begin{array}{cl}
\neg p \in H_n & \\
\Leftrightarrow & \text{определение согласованности} \\
p \notin H_n & \\
\Leftrightarrow & \text{первая часть базы} \\
tr|_n \not\models p & \\
\Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\
tr|_n \models \neg p &
\end{array}
$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbin{\&} \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \mathbin{\&} \chi$

$$\psi \mathbin{\&} \chi \in H_n$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \,\&\, \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \,\&\, \chi$

$$\begin{array}{c} \psi \,\&\, \chi \in H_n \\ \Leftrightarrow \\ \psi \in H_n \text{ и } \chi \in H_n \end{array} \quad \text{определение согласованности}$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi \,\&\, \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \,\&\, \chi$

$$\psi \,\&\, \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение согласованности}$$
$$\psi \in H_n \text{ и } \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{индуктивное предположение}$$
$$tr|_n \models \psi \text{ и } tr|_n \models \chi$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \,\&\, \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \,\&\, \chi$

$$\psi \,\&\, \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение согласованности}$$
$$\psi \in H_n \text{ и } \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{индуктивное предположение}$$
$$tr|_n \models \psi \text{ и } tr|_n \models \chi$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение выполнимости LTL-формул}$$
$$tr|_n \models \psi \,\&\, \chi$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi \,\&\, \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \,\&\, \chi$

$$\begin{array}{cl} \psi \,\&\, \chi \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{определение согласованности} \\ \psi \in H_n \text{ и } \chi \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{индуктивное предположение} \\ tr|_n \models \psi \text{ и } tr|_n \models \chi & \\ \Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\ tr|_n \models \psi \,\&\, \chi & \end{array}$$

Индуктивный переход: $\psi \vee \chi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \psi \vee \chi$

$$\psi \vee \chi \in H_n$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \,\&\, \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \,\&\, \chi$

$$\psi \,\&\, \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение согласованности}$$
$$\psi \in H_n \text{ и } \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{индуктивное предположение}$$
$$tr|_n \models \psi \text{ и } tr|_n \models \chi$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение выполнимости LTL-формул}$$
$$tr|_n \models \psi \,\&\, \chi$$

Индуктивный переход: $\psi \vee \chi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \psi \vee \chi$

$$\psi \vee \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение согласованности}$$
$$\psi \in H_n \text{ или } \chi \in H_n$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \,\&\, \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \,\&\, \chi$

$$\psi \,\&\, \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение согласованности}$$
$$\psi \in H_n \text{ и } \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{индуктивное предположение}$$
$$tr|_n \models \psi \text{ и } tr|_n \models \chi$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение выполнимости LTL-формул}$$
$$tr|_n \models \psi \,\&\, \chi$$

Индуктивный переход: $\psi \vee \chi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \psi \vee \chi$

$$\psi \vee \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{определение согласованности}$$
$$\psi \in H_n \text{ или } \chi \in H_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{индуктивное предположение}$$
$$tr|_n \models \psi \text{ или } tr|_n \models \chi$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \,\&\, \chi \in H_n \Leftrightarrow \mathbf{t}|_n \models \psi \,\&\, \chi$

$$\psi \,\&\, \chi \in H_n$$
$\Leftrightarrow$ определение согласованности
$$\psi \in H_n \text{ и } \chi \in H_n$$
$\Leftrightarrow$ индуктивное предположение
$$tr|_n \models \psi \text{ и } tr|_n \models \chi$$
$\Leftrightarrow$ определение выполнимости LTL-формул
$$tr|_n \models \psi \,\&\, \chi$$

Индуктивный переход: $\psi \vee \chi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \psi \vee \chi$

$$\psi \vee \chi \in H_n$$
$\Leftrightarrow$ определение согласованности
$$\psi \in H_n \text{ или } \chi \in H_n$$
$\Leftrightarrow$ индуктивное предположение
$$tr|_n \models \psi \text{ или } tr|_n \models \chi$$
$\Leftrightarrow$ определение выполнимости LTL-формул
$$tr|_n \models \psi \vee \chi$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\mathbf{X}\psi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \mathbf{X}\psi$

$$\mathbf{X}\psi \in H_n$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\mathbf{X}\psi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \mathbf{X}\psi$

$$\begin{array}{c} \mathbf{X}\psi \in H_n \\ \Leftrightarrow \\ \psi \in H_{n+1} \end{array} \qquad \text{определение графа } \Gamma_{M,\varphi}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\mathbf{X}\psi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \mathbf{X}\psi$

$$\begin{array}{cl} \mathbf{X}\psi \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{определение графа } \Gamma_{M,\varphi} \\ \psi \in H_{n+1} & \\ \Leftrightarrow & \text{индуктивное предположение} \\ tr|_{n+1} \models \psi & \end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\mathbf{X}\psi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \mathbf{X}\psi$

$$
\begin{array}{cl}
\mathbf{X}\psi \in H_n & \\
\Leftrightarrow & \text{определение графа } \Gamma_{M,\varphi} \\
\psi \in H_{n+1} & \\
\Leftrightarrow & \text{индуктивное предположение} \\
tr|_{n+1} \models \psi & \\
\Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\
tr|_n \models \mathbf{X}\psi &
\end{array}
$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\mathbf{X}\psi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \mathbf{X}\psi$

$$\begin{array}{cl} \mathbf{X}\psi \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{определение графа } \Gamma_{M,\varphi} \\ \psi \in H_{n+1} & \\ \Leftrightarrow & \text{индуктивное предположение} \\ tr|_{n+1} \models \psi & \\ \Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\ tr|_n \models \mathbf{X}\psi & \end{array}$$

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\mathbf{X}\psi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \mathbf{X}\psi$

$$
\begin{array}{cl}
\mathbf{X}\psi \in H_n & \\
\Leftrightarrow & \text{определение графа } \Gamma_{M,\varphi} \\
\psi \in H_{n+1} & \\
\Leftrightarrow & \text{индуктивное предположение} \\
tr|_{n+1} \models \psi & \\
\Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\
tr|_n \models \mathbf{X}\psi &
\end{array}
$$

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Полагаем, что $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\mathbf{X}\psi \in H_n \Leftrightarrow tr|_n \models \mathbf{X}\psi$

$$\begin{array}{cl} \mathbf{X}\psi \in H_n & \\ \Leftrightarrow & \text{определение графа } \Gamma_{M,\varphi} \\ \psi \in H_{n+1} & \\ \Leftrightarrow & \text{индуктивное предположение} \\ tr|_{n+1} \models \psi & \\ \Leftrightarrow & \text{определение выполнимости LTL-формул} \\ tr|_n \models \mathbf{X}\psi & \end{array}$$

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Полагаем, что $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n$

Всего возможны два случая:
Случай 1: для любого $i \geq 0$ верно $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$
Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \notin H_{n+i}$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 1: для любого $i \geq 0$ верно $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+i}$

$$\begin{array}{llll} \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \\ \psi\mathbf{R}\chi & & & \end{array}$$

$$tr[n] \longrightarrow tr[n+1] \longrightarrow \cdots \longrightarrow tr[n+i] \longrightarrow \cdots$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 1: для любого $i \geq 0$ верно $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \in H_{n+i}$ для любого $i \geq 0$

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \\
\psi\mathbf{R}\chi & \psi\mathbf{R}\chi & & \psi\mathbf{R}\chi \\
tr[n] \longrightarrow & tr[n+1] \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 1: для любого $i \geq 0$ верно $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \in H_{n+i}$ для любого $i \geq 0$

По определению согласованности, $\chi \in H_{n+i}$ для любого $i \geq 0$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & \\
\psi\mathbf{R}\chi \arrow[d, bend right] & \psi\mathbf{R}\chi \arrow[d, bend right] & \arrow[ur] & \psi\mathbf{R}\chi \arrow[d, bend right] & \\
\chi & \chi & & \chi & \\
tr[n] \arrow[r] & tr[n+1] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & tr[n+i] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 1: для любого $i \geq 0$ верно $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \in H_{n+i}$ для любого $i \geq 0$

По определению согласованности, $\chi \in H_{n+i}$ для любого $i \geq 0$

По индуктивному предположению, $tr|_{n+i} \models \chi$ для любого $i \geq 0$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & \\
\psi\mathbf{R}\chi \arrow[d, bend right] & \psi\mathbf{R}\chi \arrow[d, bend right] & {} \arrow[r] & \psi\mathbf{R}\chi \arrow[d, bend right] & {} \\
\chi \arrow[dd, bend right] & \chi \arrow[dd, bend right] & & \chi \arrow[dd, bend right] & \\
tr[n] \arrow[r] & tr[n+1] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & tr[n+i] \arrow[r] & \cdots \\
\models \chi & \models \chi & & \models \chi &
\end{tikzcd}
$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

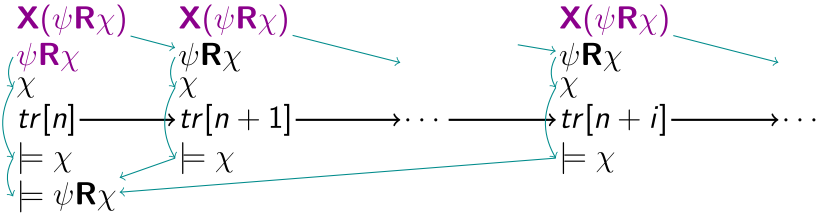
Случай 1: для любого $i \geq 0$ верно $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \in H_{n+i}$ для любого $i \geq 0$

По определению согласованности, $\chi \in H_{n+i}$ для любого $i \geq 0$

По индуктивному предположению, $tr|_{n+i} \models \chi$ для любого $i \geq 0$

По определению выполнимости LTL-формул, $tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$



Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+i}$

$$\neg \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi)$$

$$\psi \mathbf{R} \chi$$

$$tr[n] \longrightarrow tr[n+1] \longrightarrow \cdots \longrightarrow tr[n+i] \longrightarrow \cdots$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Считаем i **минимально возможным**:

$\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+j}$ для $0 \leq j < i$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \\
\psi\mathbf{R}\chi & & & & & & \\
tr[n] & \longrightarrow & tr[n+1] & \longrightarrow \cdots & & \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+i}$

Считаем i **минимально возможным**:

$\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+j}$ для $0 \leq j < i$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{R} \chi \in H_{n+j}$ для $0 \leq j \leq i$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) & & \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) & & & & \neg \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \\
\psi \mathbf{R} \chi & \rightarrow & \psi \mathbf{R} \chi & \rightarrow & & \rightarrow & \psi \mathbf{R} \chi \\
& & & & & & \\
tr[n] & \longrightarrow & tr[n+1] & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Считаем i **минимально возможным**:

$$\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+j} \text{ для } 0 \leq j < i$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \in H_{n+j}$ для $0 \leq j \leq i$

По определению согласованности,

$$\psi \in H_{n+i}$$

$$\begin{array}{llll} \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \\ \psi\mathbf{R}\chi & \psi\mathbf{R}\chi & & \psi\mathbf{R}\chi \\ & & & \quad\psi \end{array}$$

$$tr[n] \longrightarrow tr[n+1] \longrightarrow \cdots \longrightarrow tr[n+i] \longrightarrow \cdots$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+i}$

Считаем i **минимально возможным**:

$$\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+j} \text{ для } 0 \leq j < i$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{R} \chi \in H_{n+j}$ для $0 \leq j \leq i$

По определению согласованности,

$$\psi \in H_{n+i} \text{ и } \chi \in H_{n+j} \text{ для } 0 \leq j \leq i$$

$$\begin{array}{lllll}
\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) & \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) & \\
\psi \mathbf{R} \chi & \psi \mathbf{R} \chi & & \psi \mathbf{R} \chi \quad \psi & \\
\chi & \chi & & \chi & \\
tr[n] \longrightarrow & tr[n+1] \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Считаем i **минимально возможным**:

$$\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+j} \text{ для } 0 \leq j < i$$

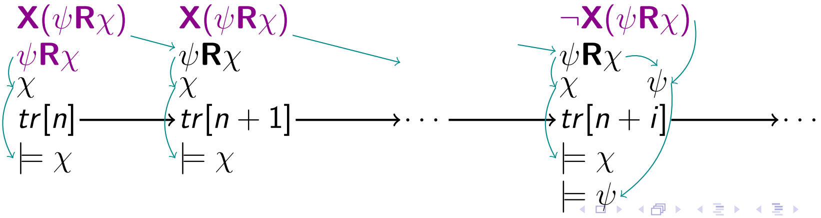
По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \in H_{n+j}$ для $0 \leq j \leq i$

По определению согласованности,

$$\psi \in H_{n+i} \text{ и } \chi \in H_{n+j} \text{ для } 0 \leq j \leq i$$

По индуктивному предположению,

$$tr|_{n+i} \models \psi \text{ и } tr|_{n+j} \models \chi \text{ для } 0 \leq j \leq i$$



Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \in H_n \Rightarrow tr|_n \models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 2: существует $i \geq 0$, такое что $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+i}$

Считаем i **минимально возможным**:

$$\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+j} \text{ для } 0 \leq j < i$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{R} \chi \in H_{n+j}$ для $0 \leq j \leq i$

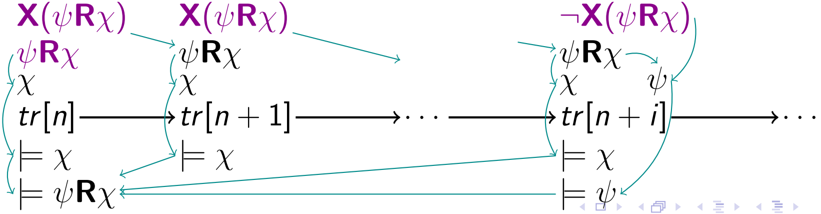
По определению согласованности,

$$\psi \in H_{n+i} \text{ и } \chi \in H_{n+j} \text{ для } 0 \leq j \leq i$$

По индуктивному предположению,

$$tr|_{n+i} \models \psi \text{ и } tr|_{n+j} \models \chi \text{ для } 0 \leq j \leq i$$

По определению выполнимости LTL-формул, $tr|_n \models \psi \mathbf{R} \chi$



Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Полагаем, что $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Полагаем, что $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n$

Пусть формуле $\psi\mathbf{R}\chi$ соответствует цвет k

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Полагаем, что $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n$

Пусть формуле $\psi\mathbf{R}\chi$ соответствует цвет k

Путь tr является радужным, а значит, существует вершина $tr[n+i]$, окрашенная в цвет k $(i \geq 0)$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Полагаем, что $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n$

Пусть формуле $\psi\mathbf{R}\chi$ соответствует цвет k

Путь tr является радужным, а значит, существует вершина $tr[n+i]$, окрашенная в цвет k $(i \geq 0)$

Считаем i **минимально возможным**:

если $0 \leq j < i$, то вершина $tr[n+j]$ не окрашена в цвет k

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Полагаем, что $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n$

Пусть формуле $\psi\mathbf{R}\chi$ соответствует цвет k

Путь tr является радужным, а значит, существует вершина $tr[n+i]$, окрашенная в цвет k $(i \geq 0)$

Считаем i **минимально возможным**:
если $0 \leq j < i$, то вершина $tr[n+j]$ не окрашена в цвет k

По определению раскраски графа $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$,
всего возможны два случая:

Случай 1: $\chi \notin H_{n+i}$
Случай 2: $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 1: $\chi \notin H_{n+i}$

$$\begin{tikzcd}
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & & \neg\chi & \\
tr[n] \arrow[r] & tr[n+1] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & tr[n+i] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 1: $\chi \notin H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \leq j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \notin H_{n+j}$$

$$\begin{array}{llll} \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \\ \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & & \\ \chi & \chi & & \neg\chi \\ tr[n] \longrightarrow & tr[n+1] \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 1: $\chi \notin H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \leq j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_{n+j}$ при $0 \leq j < i$

$$\begin{tikzcd}
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \arrow[dr] & & & \\
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & {} & & \\
\chi & \chi & & \neg\chi & \\
tr[n] \arrow[r] & tr[n+1] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & tr[n+i] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 1: $\chi \notin H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \leq j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_{n+j}$ при $0 \leq j < i$

По определению согласованности, $\psi \notin H_{n+j}$ при $0 \leq j < i$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & & & \\
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & & & \\
\chi \rightarrow \neg\psi & & \chi \rightarrow \neg\psi & & & & \neg\chi & & \\
tr[n] & \longrightarrow & tr[n+1] & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & tr[n+i] & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 1: $\chi \notin H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \leq j < i$, а значит,

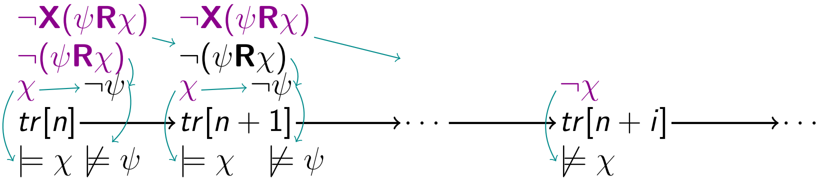
$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_{n+j}$ при $0 \leq j < i$

По определению согласованности, $\psi \notin H_{n+j}$ при $0 \leq j < i$

По индуктивному предположению,

$$tr|_{n+j} \not\models \psi \text{ и } tr|_{n+j} \models \chi \text{ при } 0 \leq j < i, \text{ а также } tr|_{n+i} \not\models \chi$$



Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 1: $\chi \notin H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \le j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j < i$

По определению согласованности, $\psi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j < i$

По индуктивному предположению,

$$tr|_{n+j} \not\models \psi \text{ и } tr|_{n+j} \models \chi \text{ при } 0 \le j < i, \text{ а также } tr|_{n+i} \not\models \chi$$

По определению выполнимости LTL-формул, $tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

$$\begin{array}{llll}
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \\
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & \\
\chi \;\; \neg\psi & \chi \;\; \neg\psi & & \neg\chi \\
tr[n] \longrightarrow & tr[n+1] \longrightarrow \cdots & \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow \cdots \\
\models \chi \;\; \not\models \psi & \models \chi \;\; \not\models \psi & & \not\models \chi \\
\not\models \psi\mathbf{R}\chi & & &
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

$$\begin{array}{ccccccc} \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \\ tr[n] & \longrightarrow & tr[n+1] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & tr[n+i] & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \leq j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \notin H_{n+j}$$

$$\begin{array}{llll}
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \\
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & & \\
\chi & \chi & & \\
tr[n] \longrightarrow & tr[n+1] \longrightarrow \cdots & \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 2: $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \le j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j \le i$

$$\begin{array}{ccccccc}
\neg \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) & & \neg \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) & & & & \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \\
\neg(\psi \mathbf{R} \chi) & \to & \neg(\psi \mathbf{R} \chi) & \to & & \to & \neg(\psi \mathbf{R} \chi) \\
\chi & & \chi & & & & \\
tr[n] & \longrightarrow & tr[n+1] & \longrightarrow \cdots & & \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \le j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j \le i$

По определению согласованности, $\psi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j < i$

$$\begin{array}{ccccc}
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \\
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & \\
\chi \rightarrow \neg\psi & \chi \rightarrow \neg\psi & & & \\
tr[n] \longrightarrow & tr[n+1] \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$

Случай 2: $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \le j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{R} \chi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j \le i$

По определению согласованности, $\psi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j < i$,

а также $\chi \notin H_{n+i}$

$$\begin{array}{ccccc}
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \\
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & \\
\chi \to \neg\psi & \chi \to \neg\psi & & \neg\chi & \\
tr[n] \longrightarrow & tr[n+1] \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & tr[n+i] \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \le j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j \le i$

По определению согласованности, $\psi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j < i$,

а также $\chi \notin H_{n+i}$

По индуктивному предположению,

$$tr|_{n+j} \not\models \psi \text{ и } tr|_{n+j} \models \chi \text{ при } 0 \le j < i, \text{ а также } tr|_{n+i} \not\models \chi$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & & & \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) & \\
\neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & & & \neg(\psi\mathbf{R}\chi) & \\
\chi \quad \neg\psi & & \chi \quad \neg\psi & & & \neg\chi & \\
tr[n] & \longrightarrow & tr[n+1] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & & tr[n+i] & \longrightarrow \cdots \\
\models \chi \quad \not\models \psi & & \models \chi \quad \not\models \psi & & & \not\models \chi &
\end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_n \Rightarrow tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$

Случай 2: $\mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \in H_{n+i}$

Вершины $tr[n+j]$ не окрашены в цвет k при $0 \le j < i$, а значит,

$$\chi \in H_{n+j} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\psi\mathbf{R}\chi) \notin H_{n+j}$$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi\mathbf{R}\chi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j \le i$

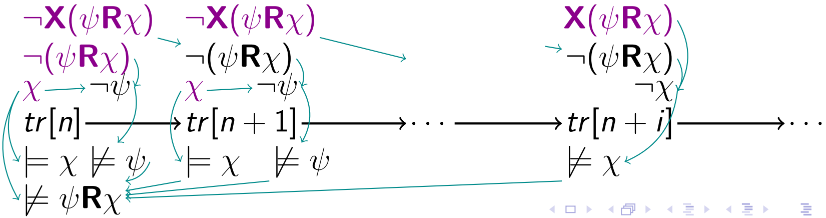
По определению согласованности, $\psi \notin H_{n+j}$ при $0 \le j < i$,

а также $\chi \notin H_{n+i}$

По индуктивному предположению,

$$tr|_{n+j} \not\models \psi \text{ и } tr|_{n+j} \models \chi \text{ при } 0 \le j < i, \text{ а также } tr|_{n+i} \not\models \chi$$

По определению выполнимости LTL-формул, $tr|_n \not\models \psi\mathbf{R}\chi$



Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{U} \chi \notin H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{U} \chi$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Leftarrow)$:

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{U} \chi \notin H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{U} \chi$

Рассуждения аналогичны случаю “$\psi \mathbf{R} \chi \Leftrightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$”

Обоснование табличного метода model checking

($\Leftarrow$):

Индуктивный переход: $\psi \mathbf{U} \chi \notin H_n \Leftrightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{U} \chi$

Рассуждения аналогичны случаю “$\psi \mathbf{R} \chi \Leftrightarrow tr|_n \not\models \psi \mathbf{R} \chi$”

Попробуйте их записать самостоятельно

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

Полагаем, что $M \not\models \varphi$

Покажем, что в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует радужный путь, исходящий из вершины (s, H), такой что $s \in S_0$ и $\varphi \notin H$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

Полагаем, что $M \not\models \varphi$

Покажем, что в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует радужный путь, исходящий из вершины (s, H), такой что $s \in S_0$ и $\varphi \notin H$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, в LTS M существует начальная трасса tr, такая что $tr \not\models \varphi$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

Полагаем, что $M \not\models \varphi$

Покажем, что в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует радужный путь, исходящий из вершины (s, H), такой что $s \in S_0$ и $\varphi \notin H$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, в LTS M существует начальная трасса tr, такая что $tr \not\models \varphi$

Выдвинем такие предположения:

$$H_i = \{\psi \mid \psi \in [\varphi]_{FL},\ tr|_i \models \psi\}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

Полагаем, что $M \not\models \varphi$

Покажем, что в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует радужный путь, исходящий из вершины (s, H), такой что $s \in S_0$ и $\varphi \notin H$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, в LTS M существует начальная трасса tr, такая что $tr \not\models \varphi$

Выдвинем такие предположения:

$$H_i = \{\psi \mid \psi \in [\varphi]_{FL},\ tr|_i \models \psi\}$$

По одному из доказанных ранее утверждений,

все предположения H_i являются согласованными

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

Полагаем, что $M \not\models \varphi$

Покажем, что в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует радужный путь, исходящий из вершины (s, H), такой что $s \in S_0$ и $\varphi \notin H$

По определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, в LTS M существует начальная трасса tr, такая что $tr \not\models \varphi$

Выдвинем такие предположения:

$$H_i = \{\psi \mid \psi \in [\varphi]_{FL},\ tr|_i \models \psi\}$$

По одному из доказанных ранее утверждений,

все предположения H_i являются согласованными

Осталось показать, что последовательность пар

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

образует радужный путь в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

I. Для любого $i \geq 1$ верно $tr[i] \rightarrow tr[i+1]$, так как tr — трасса в M

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

I. Для любого $i \geq 1$ верно $tr[i] \to tr[i+1]$, так как tr — трасса в M

II. Для любого $i \geq 1$ и любой формулы $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$ верно

$$\mathbf{X}\psi \in H_i \Leftrightarrow \psi \in H_{i+1},$$

так как

$$\mathbf{X}\psi \in H_i$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

I. Для любого $i \geq 1$ верно $tr[i] \to tr[i+1]$, так как tr — трасса в M

II. Для любого $i \geq 1$ и любой формулы $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$ верно

$$\mathbf{X}\psi \in H_i \Leftrightarrow \psi \in H_{i+1},$$

так как

$$\begin{array}{c} \mathbf{X}\psi \in H_i \\ \Leftrightarrow \\ tr|_i \models \mathbf{X}\psi \end{array} \qquad \text{по выбору предположения}$$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

$I.$ Для любого $i \geq 1$ верно $tr[i] \to tr[i+1]$, так как tr — трасса в M

$II.$ Для любого $i \geq 1$ и любой формулы $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$ верно

$$\mathbf{X}\psi \in H_i \Leftrightarrow \psi \in H_{i+1},$$

так как

$$\begin{array}{cl} \mathbf{X}\psi \in H_i & \\ \Leftrightarrow & \text{по выбору предположения} \\ tr|_i \models \mathbf{X}\psi & \\ \Leftrightarrow & \text{по определению выполнимости LTL-формул} \\ tr|_{i+1} \models \psi & \end{array}$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

I. Для любого $i \geq 1$ верно $tr[i] \to tr[i+1]$, так как tr — трасса в M

II. Для любого $i \geq 1$ и любой формулы $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$ верно

$$\mathbf{X}\psi \in H_i \Leftrightarrow \psi \in H_{i+1},$$

так как

$$
\begin{array}{cl}
\mathbf{X}\psi \in H_i & \\
\Leftrightarrow & \text{по выбору предположения} \\
tr|_i \models \mathbf{X}\psi & \\
\Leftrightarrow & \text{по определению выполнимости LTL-формул} \\
tr|_{i+1} \models \psi & \\
\Leftrightarrow & \text{по выбору предположения} \\
\psi \in H_{i+1} &
\end{array}
$$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \ldots, (tr[n], H_n), \ldots$$

I. Для любого $i \geq 1$ верно $tr[i] \to tr[i+1]$, так как tr — трасса в M

II. Для любого $i \geq 1$ и любой формулы $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$ верно

$$\mathbf{X}\psi \in H_i \Leftrightarrow \psi \in H_{i+1},$$

так как

$$\begin{array}{cl}
\mathbf{X}\psi \in H_i & \\
\Leftrightarrow & \text{по выбору предположения} \\
tr|_i \models \mathbf{X}\psi & \\
\Leftrightarrow & \text{по определению выполнимости LTL-формул} \\
tr|_{i+1} \models \psi & \\
\Leftrightarrow & \text{по выбору предположения} \\
\psi \in H_{i+1} &
\end{array}$$

III. $tr[1] \in S_0$, так как tr — начальная трасса в M

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$(tr[1], H_1), (tr[2], H_2), \dots, (tr[n], H_n), \dots$$

I. Для любого $i \geq 1$ верно $tr[i] \to tr[i+1]$, так как tr — трасса в M

II. Для любого $i \geq 1$ и любой формулы $\mathbf{X}\psi \in [\varphi]_{FL}$ верно

$$\mathbf{X}\psi \in H_i \Leftrightarrow \psi \in H_{i+1},$$

так как

$$\begin{array}{cl} \mathbf{X}\psi \in H_i & \\ \Leftrightarrow & \text{по выбору предположения} \\ tr|_i \models \mathbf{X}\psi & \\ \Leftrightarrow & \text{по определению выполнимости LTL-формул} \\ tr|_{i+1} \models \psi & \\ \Leftrightarrow & \text{по выбору предположения} \\ \psi \in H_{i+1} & \end{array}$$

III. $tr[1] \in S_0$, так как tr — начальная трасса в M

IV. $\varphi \notin H_1$ по выбору предположения H_1

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о **не**радужных путях

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о **не**радужных путях:

- существуют цвет i и суффикс $tr|_j$ трассы tr, такие что ни одна вершина $tr|_j$ не покрашена в цвет i

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о **не**радужных путях:

- существуют цвет i и суффикс $tr|_j$ трассы tr, такие что ни одна вершина $tr|_j$ не покрашена в цвет i
- если цвет i соответствует формуле $\psi \mathbf{U} \chi$, то
  - $\chi \notin H_{j+1}$, $\chi \notin H_{j+2}$, $\dots$
  - $\mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H_j$

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о **не**радужных путях:

- существуют цвет i и суффикс $tr|_j$ трассы tr, такие что ни одна вершина $tr|_j$ не покрашена в цвет i
- если цвет i соответствует формуле $\psi \mathbf{U} \chi$, то
  - $\chi \notin H_{j+1}$, $\chi \notin H_{j+2}$, $\dots$
    - и по выбору предположений получаем $tr|_{j+1} \not\models \psi \mathbf{U} \chi$
  - $\mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H_j$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о **не**радужных путях:

- существуют цвет i и суффикс $tr|_j$ трассы tr, такие что ни одна вершина $tr|_j$ не покрашена в цвет i
- если цвет i соответствует формуле $\psi \mathbf{U} \chi$, то
  - $\chi \notin H_{j+1}, \chi \notin H_{j+2}, \dots$
    - и по выбору предположений получаем $tr|_{j+1} \not\models \psi \mathbf{U} \chi$
  - $\mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H_j$
    - по определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{U} \chi \in H_{j+1}$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о **не**радужных путях:

- существуют цвет i и суффикс $tr|_j$ трассы tr, такие что ни одна вершина $tr|_j$ не покрашена в цвет i
- если цвет i соответствует формуле $\psi \mathbf{U} \chi$, то
  - $\chi \notin H_{j+1}$, $\chi \notin H_{j+2}$, $\dots$
    - и по выбору предположений получаем $tr|_{j+1} \not\models \psi \mathbf{U} \chi$
  - $\mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H_j$
    - по определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{U} \chi \in H_{j+1}$
    - по выбору предположений, $tr|_{j+1} \models \psi \mathbf{U} \chi$

Обоснование табличного метода model checking

($\Rightarrow$):

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о нерадужных путях:

- существуют цвет i и суффикс $tr|_j$ трассы tr, такие что ни одна вершина $tr|_j$ не покрашена в цвет i
- если цвет i соответствует формуле $\psi \mathbf{U} \chi$, то
  - $\chi \notin H_{j+1}, \chi \notin H_{j+2}, \dots$
    - и по выбору предположений получаем $tr|_{j+1} \not\models \psi \mathbf{U} \chi$
  - $\mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H_j$
    - по определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{U} \chi \in H_{j+1}$
    - по выбору предположений, $tr|_{j+1} \models \psi \mathbf{U} \chi$
  - полученно противоречие

Обоснование табличного метода model checking

$(\Rightarrow)$:

$$P\colon (tr[1], H_1) \to (tr[2], H_2) \to \dots \to (tr[n], H_n) \to \dots$$

Осталось показать, что:

V. Путь P является радужным

Предположим, что он не является радужным

Достаточно вспомнить рассуждения о **не**радужных путях:

- существуют цвет i и суффикс $tr|_j$ трассы tr, такие что ни одна вершина $tr|_j$ не покрашена в цвет i
- если цвет i соответствует формуле $\psi \mathbf{U} \chi$, то
  - $\chi \notin H_{j+1}$, $\chi \notin H_{j+2}$, $\dots$
    - и по выбору предположений получаем $tr|_{j+1} \not\models \psi \mathbf{U} \chi$
  - $\mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi) \in H_j$
    - по определению графа $\Gamma_{M,\varphi}$, $\psi \mathbf{U} \chi \in H_{j+1}$
    - по выбору предположений, $tr|_{j+1} \models \psi \mathbf{U} \chi$
  - полученно противоречие
- если цвет i соответствует формуле $\psi \mathbf{R} \chi$, то аналогичные рассуждения приводят к аналогичному противоречию ▼

Алгоритм model checking для LTL

А насколько просто проверить наличие в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ требуемого радужного пути?

Алгоритм model checking для LTL

А насколько просто проверить наличие в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ требуемого радужного пути?

Ориентированный граф G называется сильно связным, если для любых его вершин u, v существует путь из u в v

Алгоритм model checking для LTL

А насколько просто проверить наличие в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ требуемого радужного пути?

Ориентированный граф G называется сильно связным, если для любых его вершин u, v существует путь из u в v

Компонента сильной связности графа G — это максимальный сильно связный подграф этого графа

Алгоритм model checking для LTL

А насколько просто проверить наличие в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ требуемого радужного пути?

Ориентированный граф G называется сильно связным, если для любых его вершин u, v существует путь из u в v

Компонента сильной связности графа G — это максимальный сильно связный подграф этого графа

Компоненту сильной связности G системы Хинтикки $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ будем называть радужной, если для каждого цвета $(1, 2, \ldots, |[\varphi]_{UR}|)$ существует окрашенная в него вершина G

Алгоритм model checking для LTL

А насколько просто проверить наличие в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ требуемого радужного пути?

Ориентированный граф G называется сильно связным, если для любых его вершин u, v существует путь из u в v

Компонента сильной связности графа G — это максимальный сильно связный подграф этого графа

Компоненту сильной связности G системы Хинтикки $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ будем называть радужной, если для каждого цвета $(1, 2, \dots, |[\varphi]_{UR}|)$ существует окрашенная в него вершина G

Теорема

В раскрашенной системе Хинтикки $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ из вершины v исходит хотя бы один радужный путь

$$\Leftrightarrow$$

в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует путь из v в какую-либо вершину какой-либо радужной компоненты сильной связности

Алгоритм model checking для LTL

А насколько просто проверить наличие в графе $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ требуемого радужного пути?

Ориентированный граф G называется сильно связным, если для любых его вершин u, v существует путь из u в v

Компонента сильной связности графа G — это максимальный сильно связный подграф этого графа

Компоненту сильной связности G системы Хинтикки $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ будем называть радужной, если для каждого цвета $(1, 2, \dots, |[\varphi]_{UR}|)$ существует окрашенная в него вершина G

Теорема

В раскрашенной системе Хинтикки $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ из вершины v исходит хотя бы один радужный путь

$$\Leftrightarrow$$

в $\overline{\Gamma}_{M,\varphi}$ существует путь из v в какую-либо вершину какой-либо радужной компоненты сильной связности

Доказательство. Это просто

Алгоритм model checking для LTL

Вход алгоритма: LTS $M = (S, S_0, \to, \rho)$, LTL-формула φ

Выход алгоритма: "$M \models \varphi$?"

Описание алгоритма:

- построить позитивную форму ψ, равносильную φ
- построить систему Хинтикки $\overline{\Gamma}_{M,\psi}$
- раскрасить систему Хинтикки (построить граф $\overline{\Gamma}_{M,\psi}$)
- выделить радужные компоненты сильной связности в $\overline{\Gamma}_{M,\psi}$
- вычислить множество вершин V, из которых достижима хотя бы одна радужная компонента сильной связности
- **выдать ответ**:

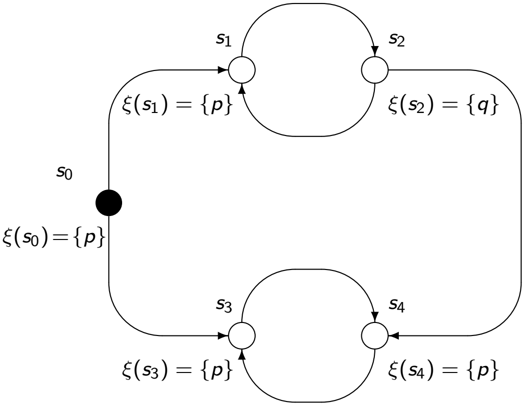
  "содержится ли в V вершина (s, H),
  такая что $s \in S_0$ и $\psi \in H$"

Алгоритм model checking для LTL

Пример

$$\varphi = p\mathbf{U}q$$

LTS M:



Алгоритм model checking для LTL

Пример

$\varphi = p\mathbf{U}q$

1. Позитивная форма $\varphi_1 = p\mathbf{U}q$

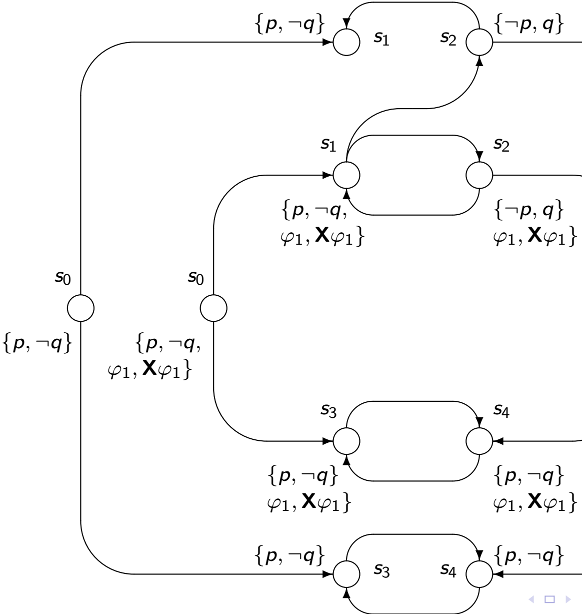
$[\varphi_1]_{FL} = \{p, \neg p, q, \neg q, p\mathbf{U}q, \mathbf{X}(p\mathbf{U}q)\}$

$[\varphi_1]_X = \{\mathbf{X}(p\mathbf{U}q)\}$

$[\varphi_1]_{UR} = \{p\mathbf{U}q\}$

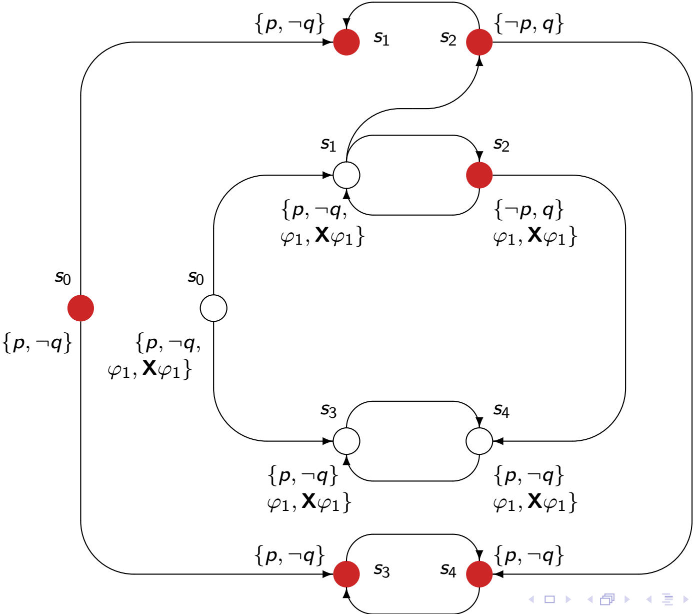
Алгоритм model checking для LTL

2. Строим систему Хинтикки $G_{\varphi_1, M}$



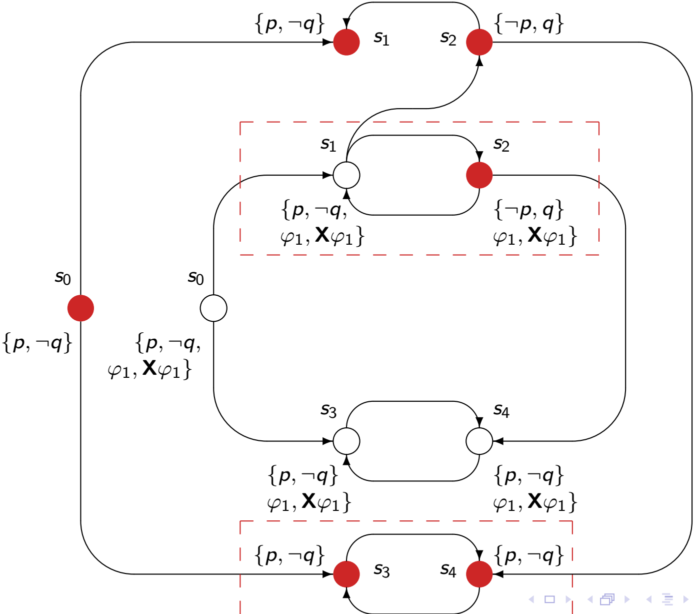
Алгоритм model checking для LTL

3. Раскрашиваем вершины системы $G_{\varphi_1,M}$



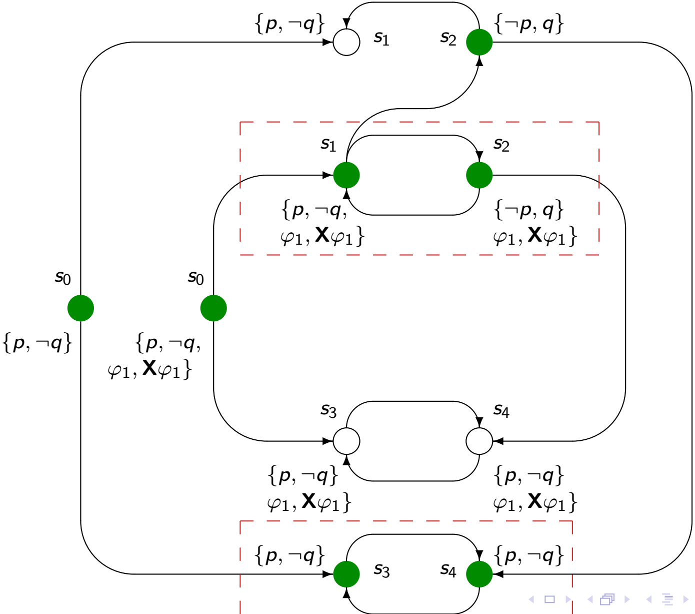
Алгоритм model checking для LTL

4. Выделяем радужные компоненты сильной связности



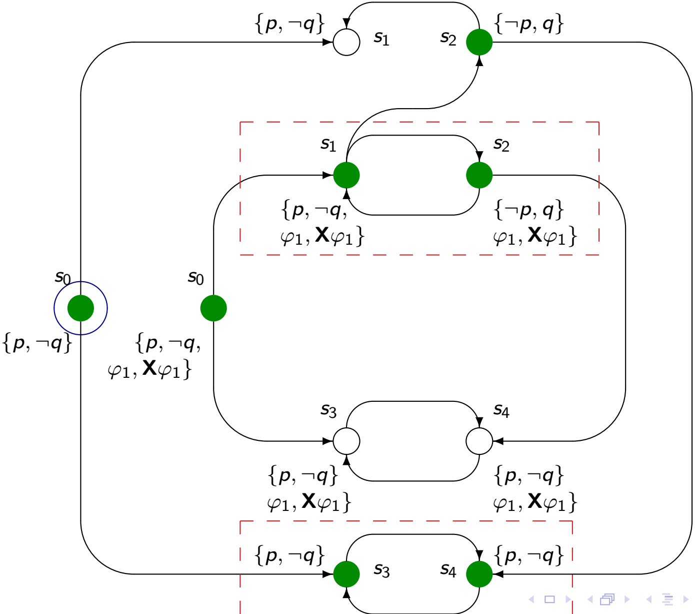
Алгоритм model checking для LTL

5. Выделяем вершины из которых достижимы радужные компонент



Алгоритм model checking для LTL

6. Ищем вершину (s_0, B) *на которой опровергается* φ_1



Алгоритм model checking для LTL

И в заключение несколько вопросов

Алгоритм model checking для LTL

И в заключение несколько вопросов

1. Как сложность описанного алгоритма model checking зависит от размеров формулы и LTS?

Алгоритм model checking для LTL

И в заключение несколько вопросов

1. Как сложность описанного алгоритма model checking зависит от размеров формулы и LTS?
2. Можно ли видоизменить описанный алгоритм model checking так, чтобы при раскраске вершин системы Хинтикки можно было ограничиться только одним цветом?

Алгоритм model checking для LTL

И в заключение несколько вопросов

1. Как сложность описанного алгоритма model checking зависит от размеров формулы и LTS?
2. Можно ли видоизменить описанный алгоритм model checking так, чтобы при раскраске вершин системы Хинтикки можно было ограничиться только одним цветом?
3. Можно ли видоизменить описанный алгоритм model checking так, чтобы не строить всю систему Хинтикки целиком?

Алгоритм model checking для LTL

И в заключение несколько вопросов

1. Как сложность описанного алгоритма model checking зависит от размеров формулы и LTS?
2. Можно ли видоизменить описанный алгоритм model checking так, чтобы при раскраске вершин системы Хинтикки можно было ограничиться только одним цветом?
3. Можно ли видоизменить описанный алгоритм model checking так, чтобы не строить всю систему Хинтикки целиком?

А если захотите использовать model checking для LTL:
SPIN и NuSMV — два самых известных программных средства, умеющих это делать

Конец лекции 18