Лекция 7. Графы. Простейшие свойства графов. Пути и цепи. Циклы и связность. Леммы об удалении и добавлении ребер в связных графах. Теорема о числе вершин, числе ребер и числе компонент связности в графе. Орграфы.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Граф

(**Неориентированным**) **графом** G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена **неупорядоченная** пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Пример: сеть

Сеть — p узлов с соединениями между некоторыми из них.

Петли и кратные ребра

Ребро $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**.

Ребра $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными** ребрами.

Граф, в котором допускаются и петли, и кратные ребра иногда называется **псевдографом**.
Граф без петель, но, возможно, с кратными ребрами называется **мультиграфом**.
Граф без петель и кратных ребер называется **простым**, или **обыкновенным** графом.

Мы будем, как правило, рассматривать простые графы, т. е. графы без петель и кратных ребер.

Смежность

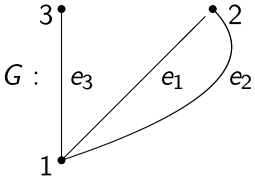
Говорят, что ребро $e = (v, w)$ **соединяет** вершины v и w, или **исходит** из вершины v (и из вершины w), или вершина v (и вершина w) и ребро e — **инцидентны**.

При этом вершины v и w называются **концами** ребра e, или **смежными** (**соседними**) по ребру e.

Изображения графов

Для наглядности графы можно изображать: вершинам ставятся в соответствие **точки** (разным вершинам — различные точки); ребрам сопоставляются непрерывные **кривые**, соединяющие соответствующие вершины (точки) (разным ребрам — различные кривые).

Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (1, 2)$ и $e_3 = (1, 3)$:



Изоморфизм графов

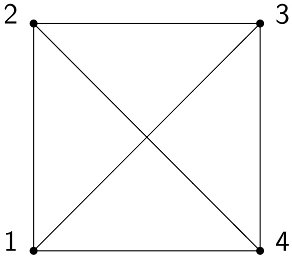
Два графа без петель и кратных ребер

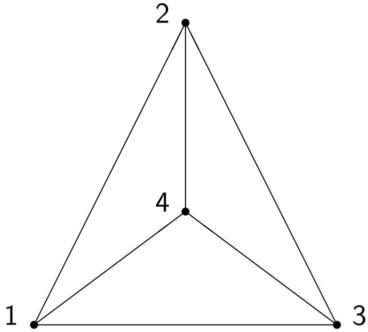
$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее ребра, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Пример изоморфных графов





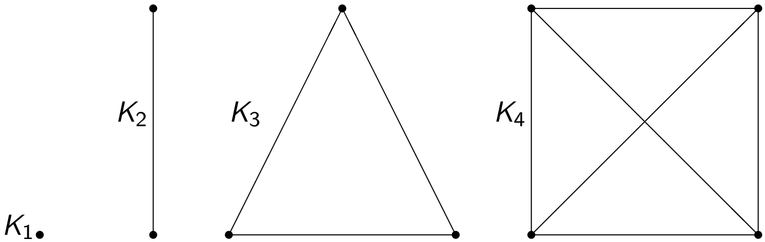
Пустые и полные графы

Пустым графом O_n называется граф с n вершинами, в котором нет ни одного ребра (т. е. с пустым множеством ребер), $n \geqslant 1$.

Полным графом K_n называется граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины смежны, $n \geqslant 1$.

Полный граф K_3 называется также **треугольником**.

Графы K_1, K_2, K_3, K_4



Дополнительный граф

Дополнительным графом к графу $G = (V, E)$ называется граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$, где

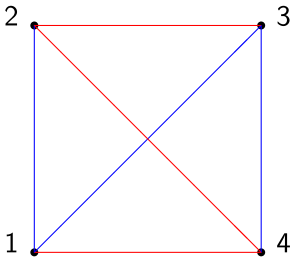
$$\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}.$$

Т. е. дополнительный граф $\bar{G}$ содержит те же вершины, что и граф G, и любые две различные вершины в нем смежны в том и только в том случае, когда эти вершины не смежны в графе G.

Другими словами, дополнительный граф $\bar{G}$ содержит те же вершины, что и граф G, и в точности все те ребра, которые не содержит граф G.

Граф и его дополнение

Граф G и его дополнение $\bar{G}$:



Степень вершины

Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе $G = (V, E)$ называется число исходящих из нее ребер (причем петля вносит двойной вклад в степень вершины).

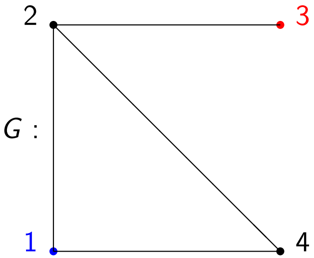
Степень $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе без петель и кратных ребер $G = (V, E)$ совпадает с числом смежных с ней вершин.

Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в графе G; если $d_G(v) = 1$, то вершина v называется **висячей**, или **концевой** в графе G.

Обозначения: $\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$ и $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$ — соответственно, **наименьшая** и **наибольшая** степени вершин в графе G.

Степени вершин

$d_G(1) = 2; \ d_G(3) = 1:$



Формула Эйлера для степеней вершин

Предложение 7.1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$;
2) *в графе G число вершин, имеющих нечетную степень, четно.*

Доказательство.
1. Рассмотрим сумму в левой части равенства. Т. к. любое ребро графа имеет ровно два конца, каждое ребро в этой сумме будет подсчитано ровно два раза. Получаем выражение в правой части равенства.
2. Свойство непосредственно следует из равенства п. 1.

□

Отметим, что формула Эйлера для степеней вершин верна и для псевдографов.

Пути в графах

Путем в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m)-**путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m,$$

в которой $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ для каждого $i = 1, \ldots, m$, $m \geqslant 0$.

При этом вершина v_0 называется **началом** пути, вершина v_m называется **концом** пути. Число m ребер пути называется его **длиной**.

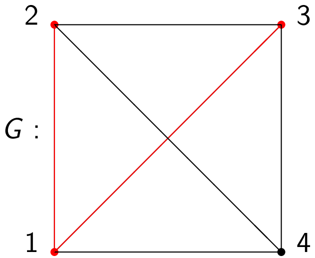
Для графов без петель и кратных ребер **путь** однозначно определяется последовательностью вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m$.

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Пути в графах

Путь $P = 1, (1, 2), 2, (1, 2), 1, (1, 3), 3$ из вершины 1 в вершину 3 в графе G:



Свойства путей и цепей

Предложение 7.2. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда в графе G из любого пути можно выделить простую цепь, соединяющую те же вершины, что и этот путь.*

Доказательство. Пусть P — (v, w)-путь в G, где $v, w \in V$. Покажем, что из пути P можно выделить простую (v, w)-цепь.

Свойства путей и цепей

Доказательство. Если в P никакая вершина, не повторяется, то он — искомая простая (v, w)-цепь.

Пусть некоторая вершина $u \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1 uP_2 uP_3 w,$$

где $vP_1 u$, $uP_2 u$, $uP_3 w$ — пути, на которые разбивается путь P двумя повторами вершины u. При этом первый или третий из них может быть пустым (если $u = v$ или $u = w$), но второй из них всегда содержит хотя бы одно ребро.

Тогда повторим эти рассуждения для (v, w)-пути $P' = vP_1 uP_3 w$, имеющего меньшую длину.

Через конечное число шагов получим искомую простую (v, w)-цепь. $\square$

Циклы в графах

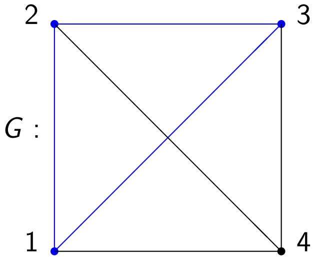
Замкнутый путь — путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Циклы в графах

Простой цикл $C = 1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (1, 3), 1$ в графе G:



Свойства цепей и циклов

Предложение 7.3. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер. Тогда*

1) *в графе* G *из любого замкнутого пути нечетной длины* m, $m \geqslant 3$, *можно выделить простой цикл нечетной длины;*

2) *в графе* G *найдутся*

а) *простая цепь с длиной, не меньшей* $\delta(G)$,

б) *при* $\delta(G) \geqslant 2$ *простой цикл с длиной, не меньшей* $\delta(G) + 1$.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.
1. Рассмотрим замкнутый путь P нечетной длины m, $m \geqslant 3$. Если в нем никакая вершина, кроме последней, не повторяется, то он — искомый простой цикл нечетной длины. Пусть некоторая вершина $v \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1vP_2v,$$

где vP_1v, vP_2v — непустые замкнутые пути, на которые вершина v разбивает путь P. Пусть m_1, m_2 — длины замкнутых путей P_1, P_2, причем $m_1 < m$ и $m_2 < m$. Из того, что $m = m_1 + m_2$ и m — нечетное число, заключаем, что либо m_1 — нечетное число, либо m_2 — нечетное число. Повторим рассуждения для нового замкнутого пути $P' = vP_iv$ с меньшей нечетной длиной m_i. Через конечное число шагов получим искомый простой цикл нечетной длины.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.
2. а) Рассмотрим произвольную вершину $v_0 \in V$. Положим $P_0 = v_0$ — простая цепь длины 0. Пусть мы уже построили простую цепь $P_i = v_0 v_1 \dots v_i$ длины i.

Если $i = \delta(G)$, то P_i — искомая простая цепь.

Пусть $i < \delta(G)$. Т. к. $d_G(v_i) \geqslant \delta(G)$, найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, не совпадающая ни с одной из вершин $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Добавим эту вершину v_{i+1} к цепи P_i, т. е. построим простую цепь $P_{i+1} = v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}$ длины $(i + 1)$.

Через $\delta(G)$ шагов мы получим искомую простую цепь.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.
2. б) Пусть мы построили простую цепь $P_m = v_0, v_1, \ldots, v_m$ длины $m = \delta(G)$. Если найдется такая вершина v_{m+1}, не совпадающая с вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_m$, что $(v_m, v_{m+1}) \in E$, то добавим эту вершину v_{m+1} к цепи P_m, т. е. построим простую цепь $P_{m+1} = v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ длины $(m+1)$.

Так будем действовать до тех пор, пока не получим такую простую цепь $P_{m'} = v_0, v_1, \ldots, v_m, \ldots, v_{m'}$ длины m', $m' \geqslant m$, что все вершины, с которыми связана вершина $v_{m'}$, лежат на цепи $P_{m'}$.

Пусть v_{i_0}, $i_0 < m'$, — вершина с наименьшим номером на цепи $P_{m'}$, с которой связана вершина $v_{m'}$. Тогда искомый простой цикл $C = v_{i_0}, \ldots, v_{m'}, v_{i_0}$.

$\square$

Подграф

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Подграф $H = (V, E')$ графа $G = (V, E)$, т. е. подграф, содержащий все вершины графа G, называется его **остовным подграфом**.

Операции над графами

Операции над графами.

Граф $G - e$, где $e \in E$: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Граф $G - v$, где $v \in V$, — граф с множеством вершин $V \setminus \{v\}$ и с множеством ребер E без всех ребер с концами в вершине v.

Граф $G + e$, где $e = (v, w)$, $e \notin E$:
$G + e = (V \cup \{v, w\}, E \cup \{e\})$.

Связность

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для каждой пары вершин графа G найдется путь, соединяющий эти вершины (а значит, и простая цепь, соединяющая эти вершины).

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Если G — связный граф, то у графа G ровно одна компонента связности.

Связность

Пусть $G = (V, E)$ — граф. На множестве его вершин V рассмотрим двуместное отношение R: vRw, где $v, w \in V$, если в G найдется (v, w)-путь.

Тогда R — рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. R — отношение эквивалентности на множестве V.

Пусть $V_1, \dots, V_s \subseteq V$ — все классы эквивалентности по отношению R.

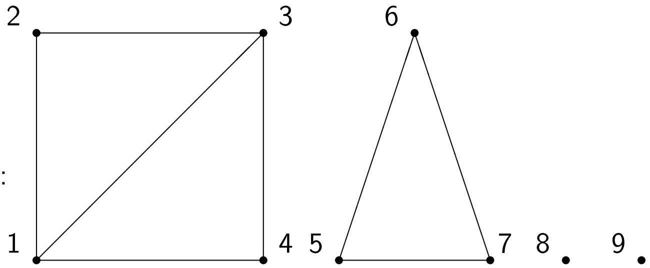
Тогда $G_1, \dots, G_s$, где $G_i = (V_i, E_i)$, где $E_i \subseteq E$ — все ребра, оба конца которых принадлежат множеству V_i, $i = 1, \dots, s$, — все компоненты связности графа G.

Пример: связная сеть

Связная сеть — p узлов с такими соединениями между ними, что из любого узла можно передать данные в любой другой (возможно, через промежуточные узлы).

Компоненты связности графа

G :



Свойства связных графов

Предложение 7.4.

1. *Если к связному графу добавить ребро, соединяющее его несмежные верны, то в полученном графе найдется цикл.*

2. *Если из связного графа удалить ребро, принадлежащее некоторому циклу, то останется связный граф.*

Свойства связных графов

Доказательство. 1. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $e = (v, w)$, где $v, w \in V$, $e \notin E$.

Граф G — связный, поэтому в нем найдется (v, w)-путь, а значит, и простая (v, w)-цепь P. В графе $G + e$ простая цепь P также содержится. Тогда $C = vPw(w, v)v$ — искомый цикл в графе $G + e$.

Свойства связных графов

Доказательство. 2. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и ребро e принадлежит циклу C графа G.

Рассмотрим две произвольные вершины u_1, u_2 графа $G - e$. Эти же вершины принадлежат графу G. Граф G — связный, поэтому в графе G найдется (u_1, u_2)-путь P. Если путь P не проходит через ребро e, то он содержится и в графе $G - e$. Если же путь P проходит через ребро e, то заменим в нем это ребро ребрами, принадлежащими оставшейся части цикла C. Получим (u_1, u_2)-путь в графе $G - e$.

$\square$

Число компонет связности

Теорема 7.1. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер с* p *вершинами,* q *ребрами и* s *компонентами связности. Тогда*

1) $s \geqslant p - q$;

2) *если в графе* G *отсутствуют циклы, то* $s = p - q$.

Число компонет связности

Доказательство.
1. Рассмотрим переход от графа $G_i = (V, E_i)$ к графу $G_{i+1} = G_i + e$, где $E_i \subseteq E$, $e \in E \setminus E_i$. Пусть в графах G_i, G_{i+1} соответственно s_i, s_{i+1} компонет связности. Тогда если ребро e соединяет вершины из одной компоненты связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i$; и если ребро e соединяет вершины из разных компонент связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому

$$s_{i+1} \geqslant s_i - 1.$$

Граф G можно получить из графа $G_0 = (V, \emptyset)$ с p компонентами связности последовательным добавлением всех ребер множества E. Поэтому $s \geqslant p - q$.
2. Если же в графе G нет циклов, то в предыдущих рассуждениях верно $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s = p - q$.

$\square$

k-связность

Пусть $k \geqslant 1$.

Граф $G = (V, E)$ называется k-**связным**, если он содержит не менее k вершин и при удалениии из него не более $(k-1)$ любых вершин остается связный граф.

Двусвязный граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Граф $G = (V, E)$ называется **реберно** k-**связным**, если при удалениии из него не более $(k-1)$ любых ребер остается связный граф.

Пример: надежная связная сеть

Если связная сеть определяется реберно двусвязным графом, то при выходе из строя любого ее соединения остается также связная сеть.

Орграф

Ориентированным графом (**орграфом**) G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество дуг (направленных ребер), причем каждой дуге $e \in E$ сопоставлена **упорядоченная** пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Орграфы

По-прежнему, дуга $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**; дуги $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными**.

По-прежнему, орграф, в котором допускаются и петли, и кратные дуги, называется **псевдографом**; орграф, в котором не допускаются петли, но могут быть кратные дуги, называется **мультиграфом**.

Орграф без петель и кратных дуг называется **простым орграфом**.

Направления дуг

Говорят, что дуга $e = (v, w)$ **исходит** из вершины v и **входит** в вершину w.

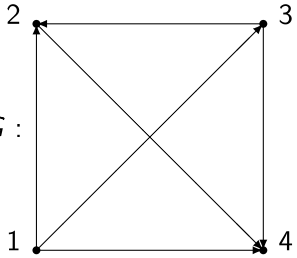
При этом вершина v называются **началом**, а вершина w — **концом** дуги e.

Дуги $e_1 = (v, w) \in E$ и $e_2 = (w, v) \in E$, где $v, w \in V$, — различны в орграфе $G = (V, E)$, т. к. у них разные направления.

При изображении орграфов направления дуг указывают стрелочками.

Пример орграфа

G :



Изоморфизм орграфов

Два орграфа без петель и кратных дуг

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее дуги, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Полустепени исхода и захода вершины

Полустепенью захода $d_G^-(v)$ вершины $v \in V$ в орграфе $G = (V, E)$ называется число входящих в нее дуг. Если $d_G^-(v) = 0$, то вершина v называется **источником** в орграфе G.

Полустепенью исхода $d_G^+(v)$ вершины $v \in V$ в орграфе $G = (V, E)$ называется число исходящих из нее дуг. Если $d_G^+(v) = 0$, то вершина v называется **стоком** в орграфе G.

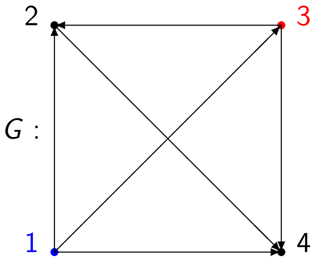
Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в орграфе $G = (V, E)$ называется величина

$$d_G(v) = d_G^-(v) + d_G^+(v).$$

Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в орграфе G.

Полустепени исхода и захода вершины

$d_G^-(1) = 0,\ d_G^+(1) = 3;\ d_G^-(3) = 1,\ d_G^+(3) = 2$:



Пути и циклы в орграфах

(**Неориентированным**) **путем** в орграфе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m)-**путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m,$$

в которой либо $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$, либо $e_i = (v_i, v_{i-1}) \in E$ для каждого $i = 1, \ldots, m$, $m \geqslant 0$.

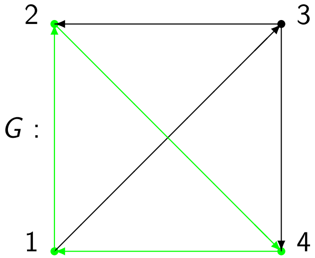
Путь называется **ориентированным** (или **направленным**), если $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ для каждого $i = 1, \ldots, m$.

Понятия **цепи**, **простой цепи**, **замкнутого пути**, **цикла** и **простого цикла** в орграфах вводятся аналогично.

Направленный простой цикл в орграфе называется также **контуром**.

Пути и циклы в орграфах

Контур $C = 1, (1, 2), 2, (2, 4), 4, (4, 1), 1$ в орграфе G:



Задачи для самостоятельного решения

1. Определите понятие изоморфизма для псевдографов.

2. Проверьте, верны ли предложения 1–4

1) для мультиграфов;
2) для псевдографов?

Если верны, то обоснуйте их; если не верны, то укажите, как нужно изменить формулировки, чтобы они стали верными.

Литература к лекции

1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра М, 2012. С. 26–29.

2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 9–11, 17, 22–25, 26–27.