Занятие 8. Планарность графов. Критерий планарности. Раскраски графов.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Страница курса на сайте http://mk.cs.msu.ru

Геометрическое представление графа в $\mathbb{R}^n$

Геометрическим представлением графа $G = (V, E)$ **в пространстве** $\mathbb{R}^n$ называется такое его отображение в $\mathbb{R}^n$, при котором:

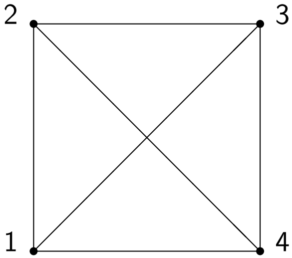
1) каждой *вершине* $v \in V$ сопоставлена *точка* в $\mathbb{R}^n$, причем разным вершинам — разные точки;

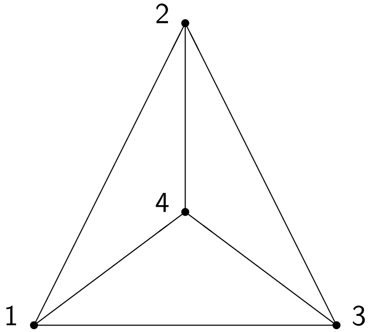
2) каждому *ребру* $(v, w) \in E$ сопоставлена непрерывная *кривая*, соединяющая точки, соответствующие вершинам v и w, и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;

3) кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Геометрическое представление графа

Слева — изображение K_4, не являющееся его геометрическим представлением на плоскости.
Справа — геометрическое представление K_4 на плоскости.





Планарный граф

Граф G называется **планарным**, если найдется его геметрическое представление на плоскости (т. е. в $\mathbb{R}^2$).

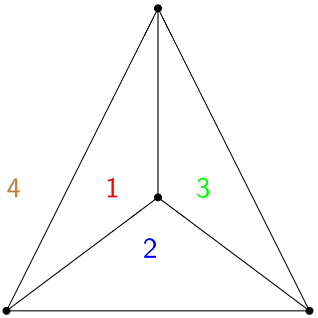
В обратном случае граф G называется **непланарным**.

Грани

Геометрическое представление планарного графа в $\mathbb{R}^2$ назовем его **укладкой на плоскости**.

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область называется также **внешней гранью**.

Грани K_4 при его укладке на плоскости



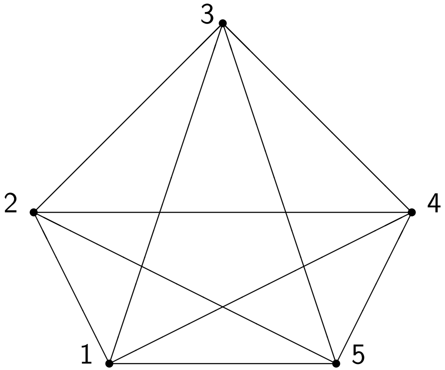
Формула Эйлера

Формула Эйлера для планарных графов. *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где r — число граней в этой укладке.*

Наибольшее число ребер в планарных графах

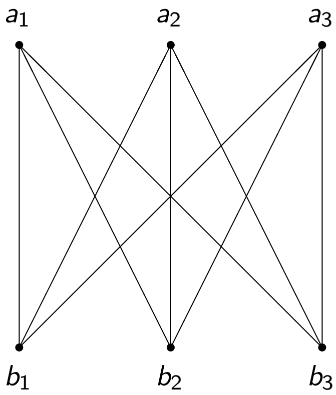
Теорема. *Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с* p, $p \geqslant 3$, *вершинами равно* $3p - 6$.

Граф K_5



Граф K_5 не является планарным.

Граф $K_{3,3}$



Граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Гомеоморфизм графов

Говорят, что граф $G' = (V', E')$ получен из графа $G = (V, E)$ **подразбиением ребра** $e = (v, w) \in E$, если

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{u\}, \text{ где } u \notin V; \\ E' &= E \setminus \{(v, w)\} \cup \{(v, u), (u, w)\}. \end{aligned}$$

Граф G' называется **подразбиением** графа G, если G' может быть получен из G конечным числом подразбиений ребер.

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **гомеоморфными**, если найдутся изоморфные их подразбиения G_1' и G_2' соответственно.

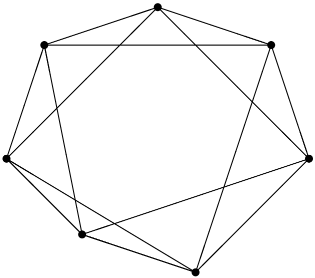
Критерий планарности

Критерий Понтрягина-Куратовского.
Граф $G = (V, E)$ *планарен тогда и только тогда, когда в нем не найдется ни одного подграфа, гомеоморфного либо графу* K_5*, либо графу* $K_{3,3}$.

Гл. 6, 2.1(2)

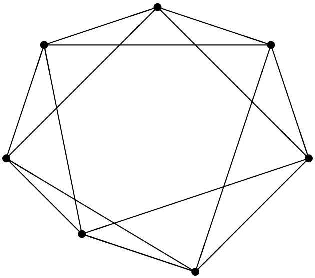
2.1(2). *По критерию планарности обосновать непланарность графа* G:

G :



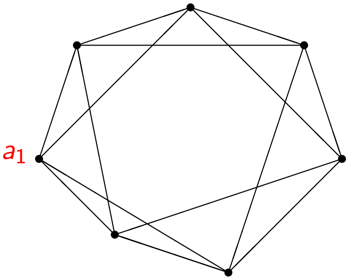
Гл. 6, 2.1(2)

Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



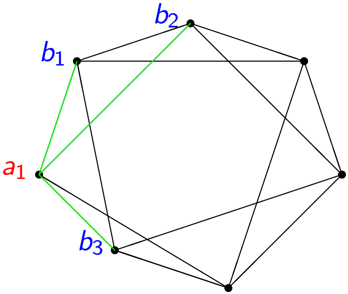
Гл. 6, 2.1(2)

Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



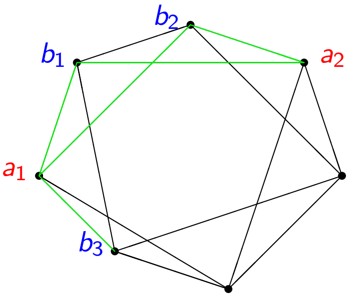
Гл. 6, 2.1(2)

Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



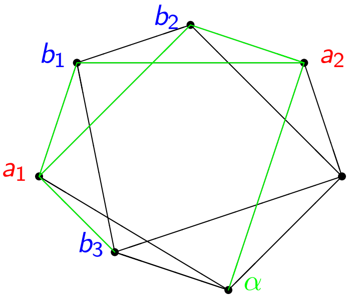
Гл. 6, 2.1(2)

Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



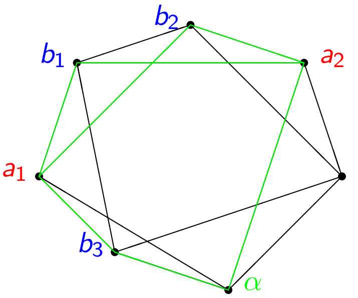
Гл. 6, 2.1(2)

Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



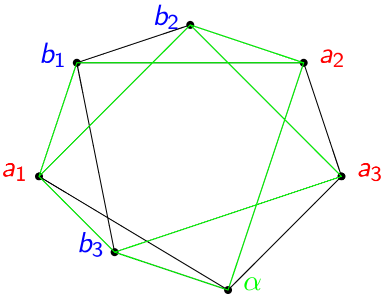
Гл. 6, 2.1(2)

Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



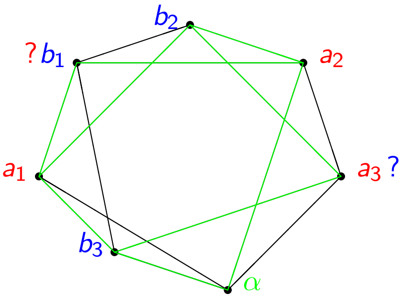
Гл. 6, 2.1(2)

Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



Гл. 6, 2.1(2)

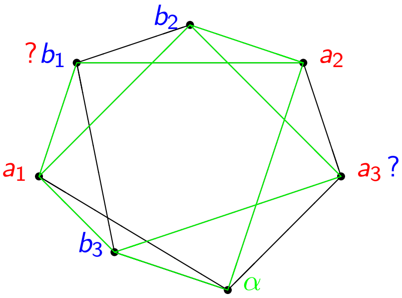
Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



Вершины a_3 и b_1 невозможно соединить.

Гл. 6, 2.1(2)

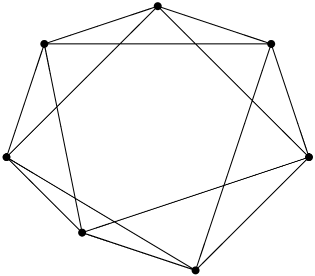
Решение. Попытаемся найти в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



Вершины a_3 и b_1 невозможно соединить. Попробуем по-другому искать в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$.

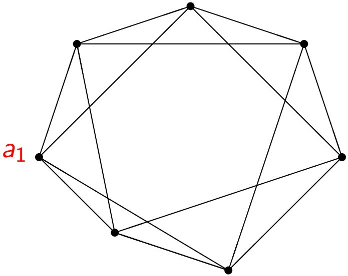
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



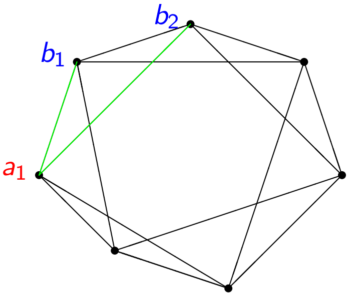
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



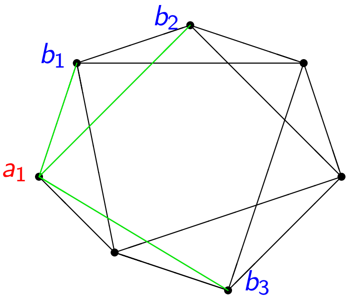
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



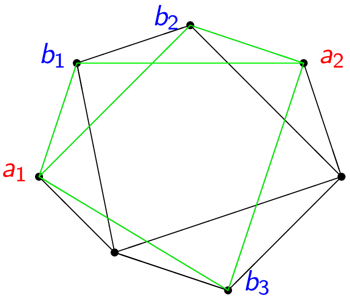
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



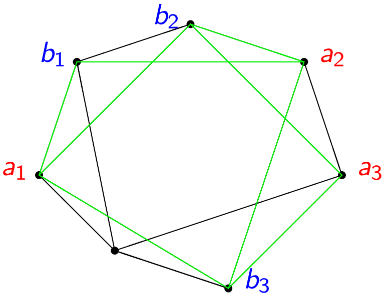
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



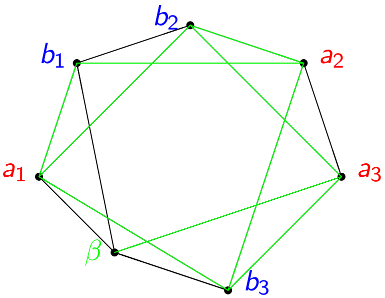
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



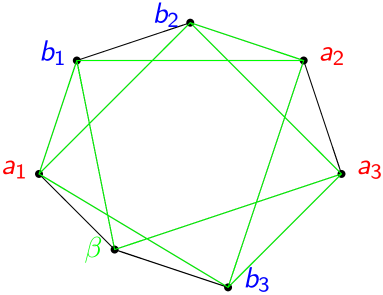
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



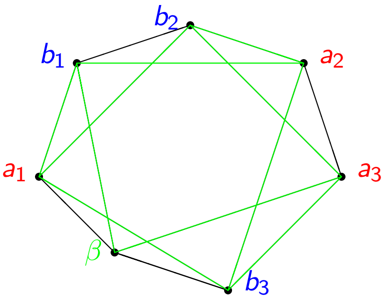
Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



Гл. 6, 2.1(2)

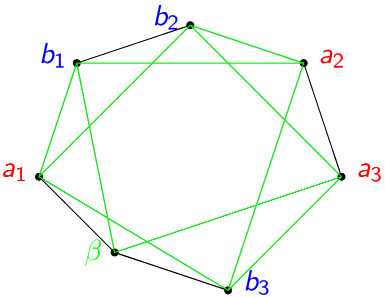
Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:



Нашли в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$.

Гл. 6, 2.1(2)

Решение (продолжение). По-другому ищем в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

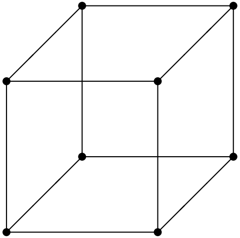


Нашли в G подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$. Значит, G — непланарный граф.

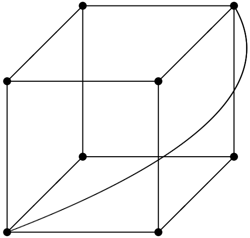
Дополнительная задача

1. *Являются ли планарными следующие графы?*

G_1 :



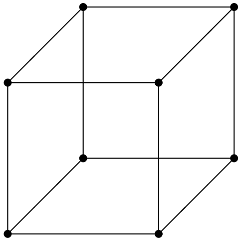
G_2 :



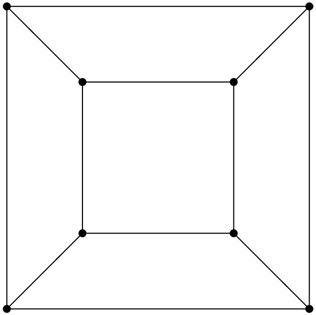
Дополнительная задача

Решение. 1. Граф G_1 допускает укладку $\Phi(G_1)$ на плоскости. Значит, G_1 — планарный граф.

G_1 :



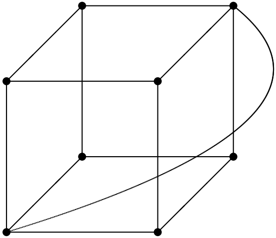
$\Phi(G_1)$:



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

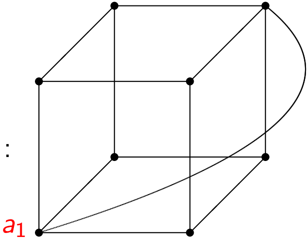
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

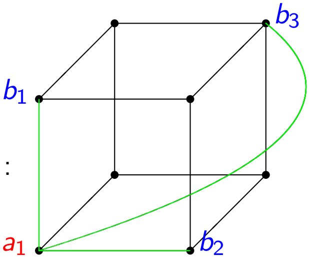
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

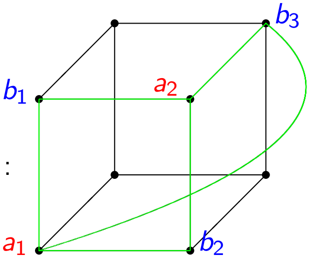
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

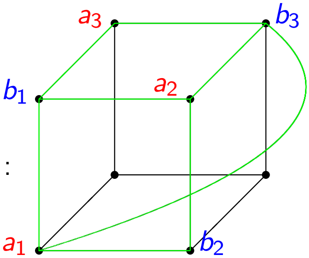
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

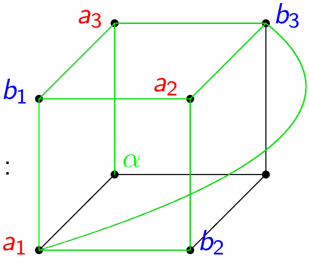
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

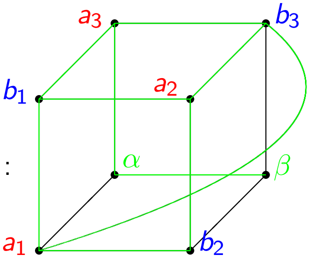
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

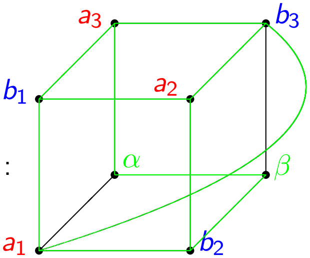
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

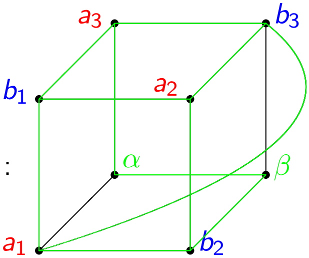
G_2 :



Дополнительная задача

Решение. 2. Найдем в графе G_2 подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

G_2 :



Значит, G_2 — непланарный граф.

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.1(2), 2.2

2.1(2). *Является ли планарным граф на рис.* $6.6(\mathrm{a})$?

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.1(2), 2.2

2.1(2). *Является ли планарным граф на рис.* $6.6(\mathrm{a})$?

Ответ: нет.

Для самостоятельного разбра: гл. 6, 2.1(2), 2.2

2.1(2). *Является ли планарным граф на рис.* 6.6(а)?

Ответ: нет.

2.2. *При каких* $n \geqslant 2$ *являются планарными графы на рис.* 6.8(а, б)?

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.1(2), 2.2

2.1(2). *Является ли планарным граф на рис.* 6.6(а)?

Ответ: нет.

2.2. *При каких* $n \geqslant 2$ *являются планарными графы на рис.* 6.8(а, б)?

Ответ: а) планарны при $n \geqslant 2$; б) планарен при $n = 2$, непланарны при $n \geqslant 3$.

Гл. 6, 2.8(1)

2.8(1). *Найдется ли планарный граф* (*без петель и кратных ребер*), *в котором* 7 *вершин и* 16 *ребер*?

Гл. 6, 2.8(1)

2.8(1). *Найдется ли планарный граф (без петель и кратных ребер), в котором 7 вершин и 16 ребер?*

Решение. Если в планарном графе (без петель и кратных ребер) p вершин и q ребер, то обязано выполняться неравенство:

$$q \leqslant 3p - 6.$$

Гл. 6, 2.8(1)

2.8(1). *Найдется ли планарный граф (без петель и кратных ребер), в котором 7 вершин и 16 ребер?*

Решение. Если в планарном графе (без петель и кратных ребер) p вершин и q ребер, то обязано выполняться неравенство:

$$q \leqslant 3p - 6.$$

Проверяем:

$$16 > 3 \cdot 7 - 6.$$

Гл. 6, 2.8(1)

2.8(1). *Найдется ли планарный граф (без петель и кратных ребер), в котором 7 вершин и 16 ребер?*

Решение. Если в планарном графе (без петель и кратных ребер) p вершин и q ребер, то обязано выполняться неравенство:

$$q \leqslant 3p - 6.$$

Проверяем:

$$16 > 3 \cdot 7 - 6.$$

Значит, такой планарный граф не найдется.

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.8(2)

2.8(2). *Найдется ли планарный граф (без петель и кратных ребер), в котором 8 вершин и 17 ребер?*

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.8(2)

2.8(2). *Найдется ли планарный граф (без петель и кратных ребер), в котором 8 вершин и 17 ребер?*

Ответ: да (нужно привести пример).

Гл. 6, 2.17(1)

2.17(1). *Показать, что любой планарный граф, в котором степень любой вершины равна 3 и границе любой грани принадлежат не менее 5 вершин, содержит не менее 20 вершин.*

Гл. 6, 2.17(1)

2.17(1). *Показать, что любой планарный граф, в котором степень любой вершины равна 3 и границе любой грани принадлежат не менее 5 вершин, содержит не менее 20 вершин.*

Решение. Пусть $G = (V, E)$ — такой связный планарный граф, $|V| = p$, $|E| = q$ и $d_G(v) = 3$ для всех $v \in V$.

Гл. 6, 2.17(1)

Решение (продолжение). По формуле Эйлера для степеней вершин верно:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2q, \quad 3p = 2q, \quad q = \frac{3}{2} \cdot p.$$

Гл. 6, 2.17(1)

Решение (продолжение). По формуле Эйлера для степеней вершин верно:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2q, \quad 3p = 2q, \quad q = \frac{3}{2} \cdot p.$$

По формуле Эйлера для планарных графов верно:

$$p - q + r = 2,$$

где r — число граней в укладке G на плоскости.

Гл. 6, 2.17(1)

Решение (продолжение). По формуле Эйлера для степеней вершин верно:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2q, \quad 3p = 2q, \quad q = \frac{3}{2} \cdot p.$$

По формуле Эйлера для планарных графов верно:

$$p - q + r = 2,$$

где r — число граней в укладке G на плоскости.

Из этих двух равенств получаем:

$$r = q - p + 2 = \frac{1}{2} \cdot p + 2.$$

Гл. 6, 2.17(1)

Решение (продолжение). Пусть q_i — число ребер, встречающееся при обходе границы i-й грани, $i = 1, \ldots, r$.

Гл. 6, 2.17(1)

Решение (продолжение). Пусть q_i — число ребер, встречающееся при обходе границы i-й грани, $i = 1, \ldots, r$. По условию $q_i \geqslant 5$.

Гл. 6, 2.17(1)

Решение (продолжение). Пусть q_i — число ребер, встречающееся при обходе границы i-й грани, $i = 1, \ldots, r$. По условию $q_i \geqslant 5$.

Тогда:

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q, \quad 5r \leqslant 2q, \quad r \leqslant \frac{2}{5} \cdot q = \frac{3}{5} \cdot p.$$

Гл. 6, 2.17(1)

Решение (продолжение). Пусть q_i — число ребер, встречающееся при обходе границы i-й грани, $i = 1, \ldots, r$. По условию $q_i \geqslant 5$.

Тогда:

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q, \quad 5r \leqslant 2q, \quad r \leqslant \frac{2}{5} \cdot q = \frac{3}{5} \cdot p.$$

Значит,

$$r = \frac{1}{2} \cdot p + 2 \leqslant \frac{3}{5} \cdot p, \quad p \geqslant 20.$$

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.10(1)

2.8(2). *Найдется ли планарный граф (без петель и кратных ребер), в котором 6 вершин и 9 граней?*

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.10(1)

2.8(2). *Найдется ли планарный граф (без петель и кратных ребер), в котором 6 вершин и 9 граней?*

Ответ: нет.

Раскраска вершин графа

Раскраска вершин графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : V \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

в котором из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Т. е. любые смежные вершины обязаны быть окрашены в разные цвета.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить его вершины.

Для любого графа $G = (V, E)$ верно соотношение $\chi(G) \leqslant |V|$.

Раскраска вершин графа в два цвета

Теорема (Кенига). *Вершины графа можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.*

Раскраска вершин планарного графа

Теорема. *Вершины любого планарного графа можно раскрасить не более, чем в пять цветов.*

Раскраска ребер графа

Раскраска ребер графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : E \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

в котором из $e_1 = (v, w) \in E$, $e_2 = (v, u) \in E$ следует $\rho(e_1) \neq \rho(e_2)$.

Т. е. любые ребра с общей вершиной обязаны быть окрашены в разные цвета.

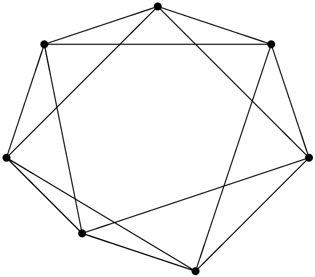
Хроматический индекс $\chi'(G)$ графа G — наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить его ребра.

Для любого графа G верно соотношение $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$.

Гл. 6, 2.18(4)

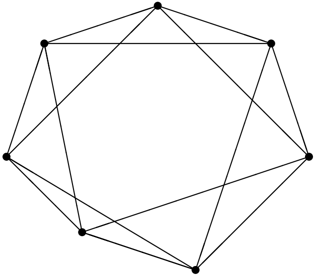
2.18(4). *Найти хроматическое число графа G:*

G :



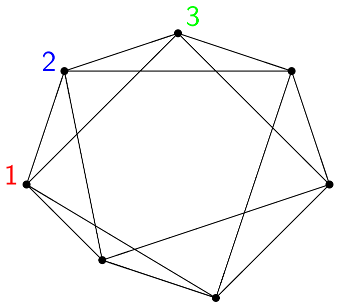
Гл. 6, 2.18(4)

Решение. Граф G содержит циклы нечетной длины, поэтому $\chi(G) \geqslant 3$. Попытаемся раскрасить его вершины в 3 цвета:



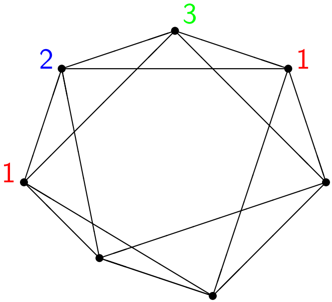
Гл. 6, 2.18(4)

Решение. Граф G содержит циклы нечетной длины, поэтому $\chi(G) \geqslant 3$. Попытаемся раскрасить его вершины в 3 цвета:



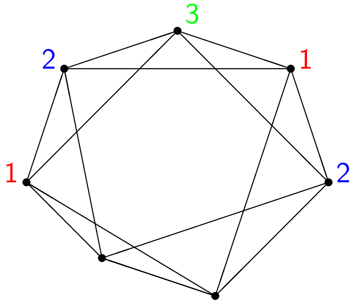
Гл. 6, 2.18(4)

Решение. Граф G содержит циклы нечетной длины, поэтому $\chi(G) \geqslant 3$. Попытаемся раскрасить его вершины в 3 цвета:



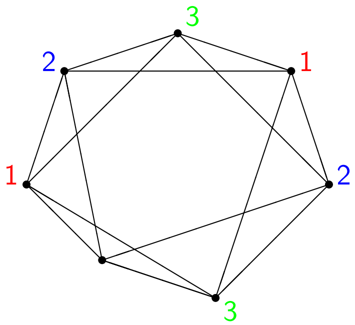
Гл. 6, 2.18(4)

Решение. Граф G содержит циклы нечетной длины, поэтому $\chi(G) \geqslant 3$. Попытаемся раскрасить его вершины в 3 цвета:



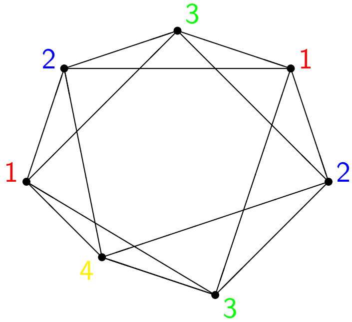
Гл. 6, 2.18(4)

Решение. Граф G содержит циклы нечетной длины, поэтому $\chi(G) \geqslant 3$. Попытаемся раскрасить его вершины в 3 цвета:



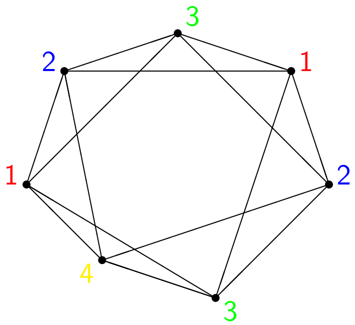
Гл. 6, 2.18(4)

Решение. Граф G содержит циклы нечетной длины, поэтому $\chi(G) \geqslant 3$. Попытаемся раскрасить его вершины в 3 цвета:



Гл. 6, 2.18(4)

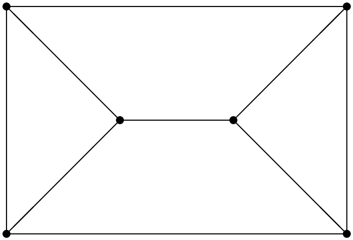
Решение. Граф G содержит циклы нечетной длины, поэтому $\chi(G) \geqslant 3$. Попытаемся раскрасить его вершины в 3 цвета:



Значит, $\chi(G) = 4$.

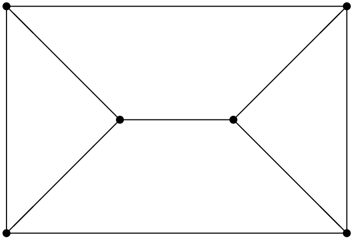
Гл. 6, 2.18(1)

2.18(1). *Найти хроматический индекс графа* G:

G : 

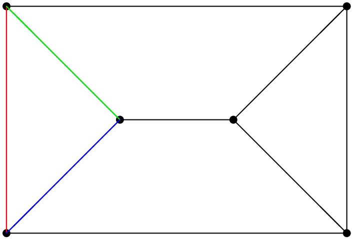
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



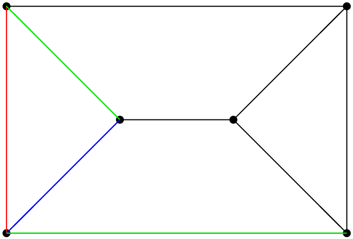
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



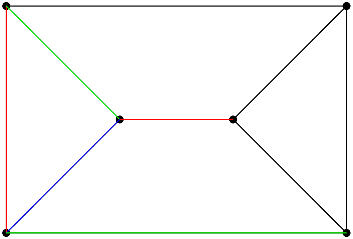
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



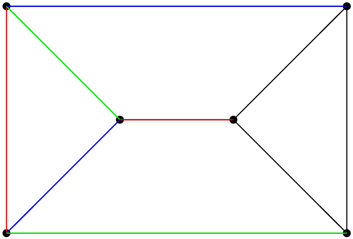
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



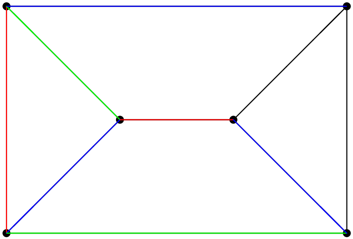
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



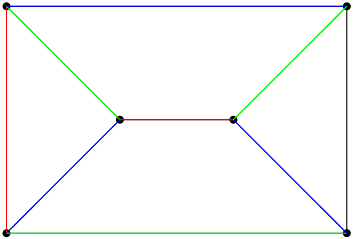
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



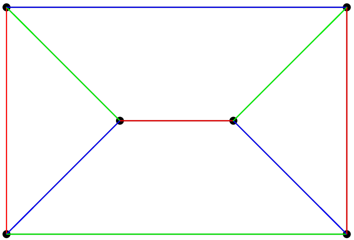
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



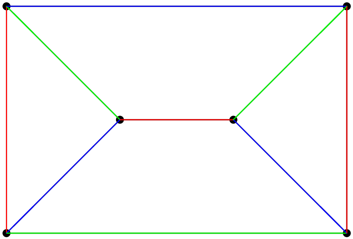
Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



Гл. 6, 2.18(1)

Решение. Заметим, что $\chi'(G) \geqslant 3$, т. к. $\Delta(G) = 3$. Попытаемся раскрасить ребра G в 3 цвета:



Значит, $\chi'(G) = 3$.

Для самостоятельного разбра: гл. 6, 2.18(2)

2.18(2). *Найти хроматическое число и хроматический индекс графа G на рис.* 6.3.

Для самостоятельного разбра: гл. 6, 2.18(2)

2.18(2). *Найти хроматическое число и хроматический индекс графа G на рис.* 6.3.

Ответ: $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 4$.

Для самостоятельного разбра: гл. 6, 2.19(3)

2.19(3). *Найти хроматическое число и хроматический индекс графа* $K_{m,n}$, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$.

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 2.19(3)

2.19(3). *Найти хроматическое число и хроматический индекс графа* $K_{m,n}$, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$.

Ответ: $\chi(K_{m,n}) = 2$, $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n)$.

Домашнее задание

По задачнику: Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Гл. 6: 2.1(1), 2.3, 2.4, 2.10(2), 2.17(2), 2.18(рис. 6.2), 2.19(2), 1.54, 1.60.