

# Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Весенний семестр 2016–2017 уч. г.  
группы 320–328

лектор — профессор С. А. Ложкин  
(lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса:

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы\\_кибернетики\\_\(3-й\\_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток))

# Аудиторная нагрузка и формы контроля

Группы	Лекции	Семинары	
320–328	48 часов	16 часов	Экзамен

---

**Контрольные**

4 основных (по 2 часа) и ряд текущих

---

**Предварительная  
оценка**

по итогам тестов с учётом посещаемости  
и самостоятельной работы

---

**Итоговая оценка**

выставляется на экзамене, не больше чем  
предварительная + 1 балл.

---

# Материалы

Программа курса и литература

Предварительный список вопросов

Типы задач и планы семинарских занятий

График проведения тестов-контрольных

Текущие результаты

Организация аудиторной и самостоятельной работы

Проведение экзамена и др.

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/  
Основы\\_кибернетики\\_\(3-й\\_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток))

# Введение

## **Курс «Основы кибернетики»**

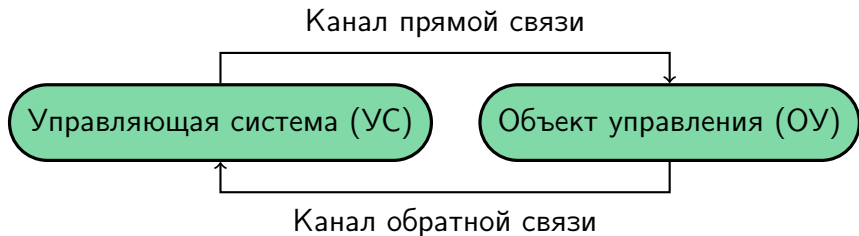
(ранее «Элементы кибернетики») читается с 1971 г.  
Создатель и основной лектор (до 1998 г.) — чл.-корр.  
РАН С. В. Яблонский

**Кибернетика** — наука об управлении  
(Н. Винер, 1948 г.)

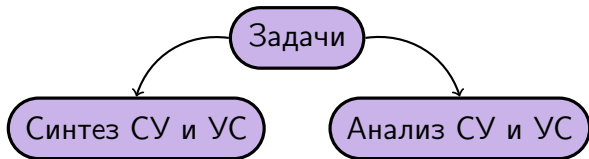
**Кибернетика** — наука об общих законах хранения,  
получения, преобразования и передачи информации  
в сложных системах управления  
(С.В. Яблонский, 1959 г.)

**Математическая кибернетика** —  
математические модели и методы исследования  
сложных систем управления

# Система управления (СУ)



Функционирование СУ — круговорот информации:  $УС \longrightarrow ОУ \longrightarrow УС \longrightarrow \dots$



# Построение (синтез) СУ

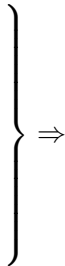
Закон поведения и управляемости ОУ

Цель управления

Класс функций управления

Класс (тип) УС

Критерий качества



1. Выбор оптимальной функции управления из данного класса (синтез управления)
2. Построение (синтез) оптимальной УС заданного типа (программа, СБИС, механическое устройство и др.)
3. Оценка качества построенной СУ, а затем, возможно, коррекция классов и переход к п. 1

- ▶ Курс посвящён основным моделям, методам и результатам математической кибернетики, связанным с теорией дискретных управляющих систем (ДУС), задачей их анализа и синтеза
- ▶ Продолжает курс дискретной математики, использует некоторые результаты математического анализа, теории вероятностей и др.
- ▶ Является сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует систематической аудиторной и самостоятельной работы

# Основные разделы курса

- I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи
- II. Основные классы ДУС, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования УС
- III. Синтез и сложность УС
- IV. Надёжность и контроль УС
- V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов и классы схем, связанные с их программно-аппаратной реализацией



# Основные сферы применения результатов курса

- ▶ Схемная и структурная реализация дискретных функций и алгоритмов, оценки её сложности
- ▶ Различные задачи программно-аппаратной реализации алгоритмов
- ▶ Разработка методов автоматизации проектирования заказных СБИС, программирование FPGA и др.

# I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ

**Утверждение 1.1.** Совершенная ДНФ ФАЛ  $f$ ,  $f \neq 0$ ,  $f \in P_2(n)$ , является единственной ДНФ от БП  $X(n)$ , которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве  $N_f$  нет соседних наборов.

**Следствие.** Совершенная ДНФ ФАЛ  $\ell$ ,  $\bar{\ell}$ , является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП  $X(n)$ .

## 2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

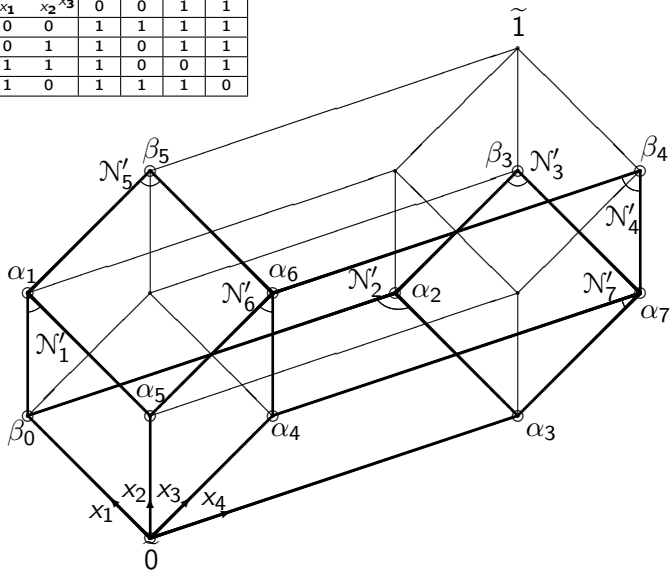
**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  — сокращенные ДНФ ФАЛ  $f'$  и  $f''$  соответственно, а ДНФ  $\mathcal{A}$  без поглощений ЭК получается из формулы  $\mathcal{A}' \cdot \mathcal{A}''$  в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда  $\mathcal{A}$  — сокращенная ДНФ ФАЛ  $f = f' \cdot f''$ .

**Следствие.** Если ДНФ  $\mathcal{A}$  без поглощений ЭК получается из КНФ  $\mathcal{B}$  ФАЛ  $f$  в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то  $\mathcal{A}$  — сокращенная ДНФ ФАЛ  $f$ .

**Утверждение 2.2.** ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

**Следствие.** Из любой ДНФ  $\mathcal{A}$  ФАЛ  $f$  можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

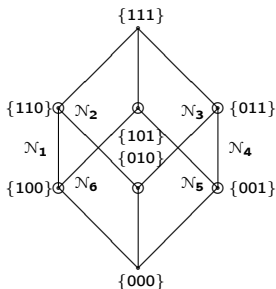
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0







$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\bar{x}_2x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2}_{K_6}.$$



$$\bar{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и  
ДНФ пересечение тупиковых.  
ДНФ Квайна, критерий  
вхождения простых  
импликант в ДНФ сумма  
тупиковых, его локальность

**Утверждение 3.1.** Дизъюнктивная нормальная форма  $\cap T$  ФАЛ  $f$  состоит из тех простых импликант ФАЛ  $f$ , которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

**Следствие.** Сокращенная ДНФ ФАЛ  $f$  является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда  $f$  — ядровая ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

**Утверждение 3.2.** Простая импликанта  $K$  ФАЛ  $f$  входит в ДНФ  $\Sigma T$  тогда и только тогда, когда грань  $N_K$  не является регулярной гранью этой ФАЛ.

# 4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ

**Утверждение 4.1.** Сокращенная ДНФ  $\mathfrak{A}$  монотонной ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_{\beta}^+(x_1, \dots, x_n).$$

При этом все наборы из  $N_f^+$  являются ядровыми точками ФАЛ  $f$ .

**Следствие.** Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

**Утверждение 4.2.** Функция покрытия  $F(y_1, \dots, y_p)$  матрицы  $M$ ,  $M \in B^{p,s}$ , без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left( \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M\langle i,j \rangle = 1}} y_i \right).$$

**Следствие.** В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ  $F(y)$ , простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы  $M$ .



5. Градиентный алгоритм и  
оценка длины градиентного  
покрытия, лемма о  
протыкающих наборах.

Использование градиентного  
алгоритма для построения  
ДНФ

**Утверждение 5.1** Пусть для действительного  $\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , в каждом столбце матрицы  $M$ ,  $M \in B^{p,s}$ , имеется не меньше, чем  $\gamma \cdot p$ , единиц. Тогда покрытие матрицы  $M$ , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

$$\text{где } \ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geq 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

**Утверждение 5.2** При любых натуральных  $n$  и  $m$ ,  $m \leq n$ , в кубе  $B^n$  всегда найдется подмножество мощности не более, чем  $n \cdot 2^m$ , протыкающее все грани ранга  $m$ .

# 6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ

**Утверждение 6.1** Для любого  $n, n \in \mathbb{N}$ ,  
имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

**Утверждение 6.2** Для почти всех ФАЛ  $f$ ,  
 $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})),$$

$$R(f) \leq \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})).$$

7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных

**Утверждение 7.1** Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ  $f$  из  $P_2(n)$ ,  $n \geq 4$ , вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \dots \oplus x_n),$$

где  $\bar{N}_g = \{(000), (111)\}$ , равно  $5^{2^{n-4}}$  (соответственно  $2^{2^{n-4}}$ ).

**Следствие**

$$\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}, \quad \mu(n) \geq 2^{2^{n-4}}.$$

## Утверждение 7.2

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geq e_1 \frac{3^n}{n},$$

где  $e_1$  — некоторая константа.

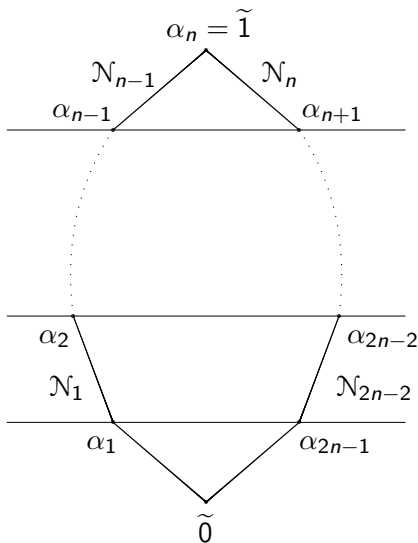


Рис.: цепная ФАЛ длины  $(2n - 2)$  в кубе  $B^n$



**Утверждение 7.3** При любом  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , в  $P_2(n)$  существуют ФАЛ  $f'$  и  $f''$ , имеющие общую простую импликанту  $K$ , которая входит в ДНФ  $\Sigma M$  одной, но не входит в ДНФ  $\Sigma M$  другой из этих ФАЛ и для которой  $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$ .

**Замечание 1** Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ  $\Sigma M$  не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ  $\Sigma T$ .

**Замечание 2** Известно, что при  $n \geq 14$  в  $P_2(n)$  имеется цепная ФАЛ четной длины  $t$ ,  $t \geq 2^{n-11} - 4$ , на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка  $(\frac{t}{2} - 2)$ .