Лекция 2.
Двухуровневый логический синтез

Математические модели и методы синтеза СБИС
Весна 2018

Двухуровневый логический синтез

- Реализация булевых функций в виде ДНФ и программируемые логические матрицы (ПЛМ)
- Эвристические подходы к минимизации ДНФ
- Обобщенно-монотонное разложение булевых функций
- Основные этапы алгоритма ESPRESSO

Реализация булевых функций в виде ДНФ

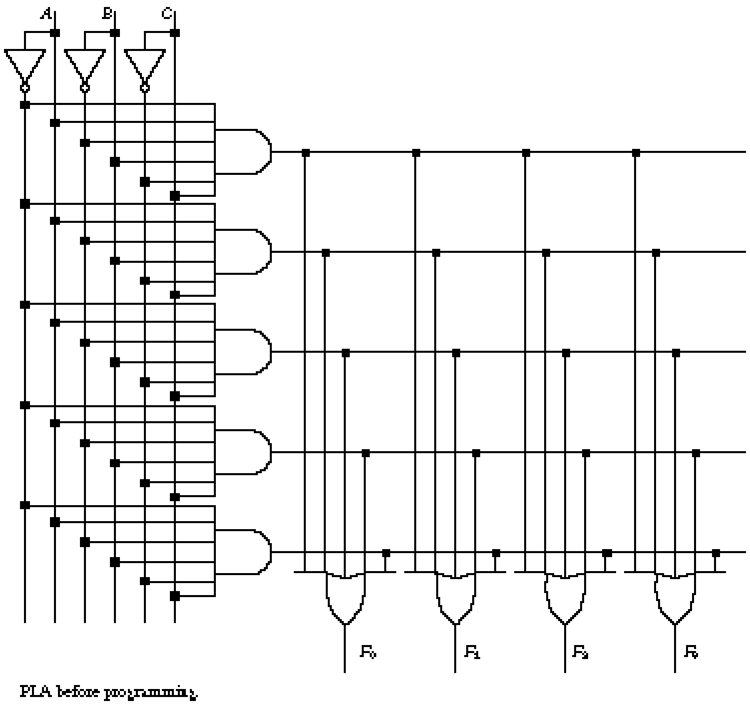
- Функция алгебры логики (ФАЛ) f *имплицирует* ФАЛ g, *если* $f \to g \equiv 1$
- K_f - *импликанта* ФАЛ f*:*
  - K_f является элементарной конъюнкцией (ЭК)
  - K_f имплицирует f
- K_f - *простая импликанта* ФАЛ f*:*
  - K_f является импликантой f
  - K_f перестает быть импликантой f, при удалении любого литерала из нее

Реализация булевых функций в виде ДНФ

- ДНФ ФАЛ f – дизъюнкция ЭК
- *Сокращенная* ДНФ ФАЛ f – дизъюнкция всех простых импликант f
  - Сокращенная ДНФ функции задает пространство, в котором производится поиск оптимальных ДНФ
- *Тупиковая* ДНФ ФАЛ f – ДНФ f, из которой нельзя выкинуть ЭК и литералы
- *Кратчайшая* ДНФ ФАЛ f – ДНФ f, содержащая минимальное количество ЭК
- *Минимальная* ДНФ ФАЛ f – ДНФ f, содержащая минимальное количество литералов

Программируемые логически матрицы (ПЛМ)

- Реализация системы булевых функций на основе ДНФ
- Первая интегральная схема TMS2000 (Texas Instruments, 1970)
- Оптимизация числа литералов приводит к уменьшению площади схемы.



Минимизация ДНФ – основные подходы

- Известные методы минимизации ДНФ
  - Эквивалентные преобразования. Сложно применим при большом числе переменных и неясно как оценить качество полученного результата.
  - Метод карт Карно. Применим только при малом числе переменных.
  - Метод Квайна. Экспоненциальная сложность в худшем случае.
- Эвристические подходы - свойства.
  - Поиск ДНФ близких к минимальным.
  - Последовательное (итеративное) улучшение текущего решения.
- Эвристические подходы
  - Градиентный метод. Получение некоторой тупиковой ДНФ.
  - Алгоритм ESPRESSO

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- Пример – функция 4-х переменных, заданная таблицей
- Указаны только единичные наборы
- Покрытие построено из некоторого набора импликант функции (не обязательно простых)

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани

K_1	0*0*
K_2	0*10
K_3	1001
K_4	1101
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Расширение» граней (EXPAND) – последовательное преобразование граней в максимальные грани
- Для каждой грани может быть несколько различных способов сделать её максимальной
- В нашем примере «расширяются» грани K_2, K_3, K_4
- Полученное покрытие состоит только из максимальных граней
- Полученное покрытие может не быть тупиковым или минимальным

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани	
K_1	0*0*
K_2	**10
K_3	1001
K_4	1101
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Расширение» граней (EXPAND) – последовательное преобразование граней в максимальные грани
- Для каждой грани может быть несколько различных способов сделать её максимальной
- В нашем примере «расширяются» грани K_2, K_3, K_4
- Полученное покрытие состоит только из максимальных граней
- Полученное покрытие может не быть тупиковым или минимальным

$x_3\ x_4$ \ $x_1\ x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани

K_1	0*0*
K_2	**10
K_3	1**1
K_4	1101
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Расширение» граней (EXPAND) – последовательное преобразование граней в максимальные грани
- Для каждой грани может быть несколько различных способов сделать её максимальной
- В нашем примере «расширяются» грани K_2, K_3, K_4
- Полученное покрытие состоит только из максимальных граней
- Полученное покрытие может не быть тупиковым или минимальным

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани

K_1	0*0*
K_2	**10
K_3	1**1
K_4	**01
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Расширение» граней (EXPAND) – последовательное преобразование граней в максимальные грани
- Для каждой грани может быть несколько различных способов сделать её максимальной
- В нашем примере «расширяются» грани K_2, K_3, K_4
- Полученное покрытие состоит только из максимальных граней
- Полученное покрытие может не быть тупиковым или минимальным

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани

K_1	0*0*
K_2	**10
K_3	1**1
K_4	**01
K_5	1*1*

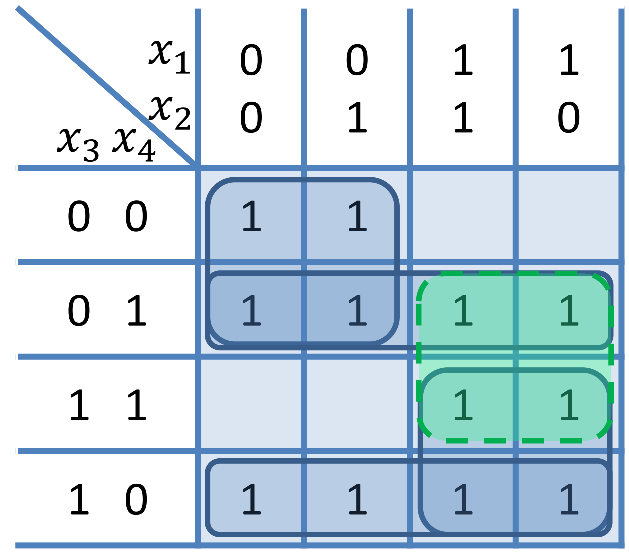
Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Тупиковое покрытие» – удаление граней, которые покрываются другими максимальными гранями (IRREDUNDANT)

- В нашем примере можно удалить K_3

- Полученное покрытие является тупиковым

- Полученное покрытие может не быть минимальным



Грани	
K_1	0*0*
K_2	**10
K_3	1**1
K_4	**01
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

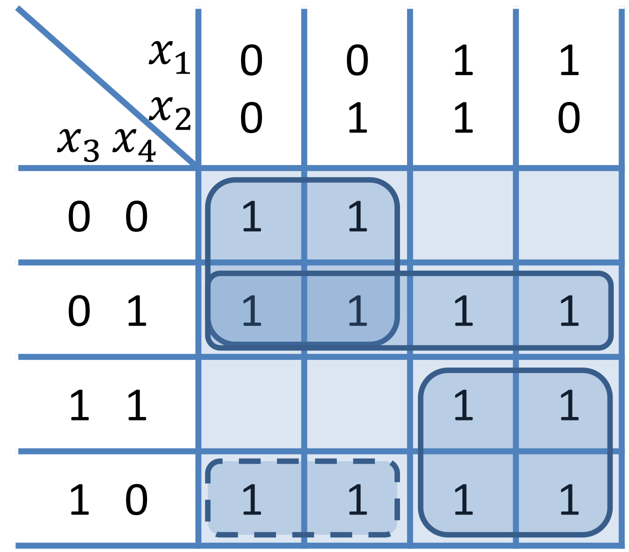
- «Тупиковое покрытие» – удаление граней, которые покрываются другими максимальными гранями (IRREDUNDANT)
- В нашем примере можно удалить K_3
- Полученное покрытие является тупиковым
- Полученное покрытие может не быть минимальным

$x_3\,x_4$ \ x_1 x_2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

	Грани
K_1	0*0*
K_2	**10
K_4	**01
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Сужение» граней (REDUCE) – последовательное уменьшение каждой из граней при сохранении покрытия
- Результирующее покрытие состоит не только из максимальных граней
- Позволяет изменить форму покрытия
- Порядок «сужения» граней имеет важное значение
- Является ключевым шагом, так как позволяет в дальнейшем произвести такое «расширение» граней, которое позволит покрыть другие грани
- В нашем примере можно «сузить», например, K_2 и K_4



Грани	
K_1	0*0*
K_2	0*10
K_4	**01
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Сужение» граней (REDUCE) – последовательное уменьшение каждой из граней при сохранении покрытия
- Результирующее покрытие состоит не только из максимальных граней
- Позволяет изменить форму покрытия
- Порядок «сужения» граней имеет важное значение
- Является ключевым шагом, так как позволяет в дальнейшем произвести такое «расширение» граней, которое позволит покрыть другие грани
- В нашем примере можно «сузить», например, K_2 и K_4

$x_3\,x_4$ \\ x_1 x_2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани	
K_1	0*0*
K_2	0*10
K_4	1*01
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

- «Сужение» граней (REDUCE) – последовательное уменьшение каждой из граней при сохранении покрытия
- Результирующее покрытие состоит не только из максимальных граней
- Позволяет изменить форму покрытия
- Порядок «сужения» граней имеет важное значение
- Является ключевым шагом, так как позволяет в дальнейшем произвести такое «расширение» граней, которое позволит покрыть другие грани
- В нашем примере можно «сузить», например, K_2 и K_4

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани	
K_1	0*0*
K_2	0*10
K_4	1*01
K_5	1*1*

Алгоритм ESPRESSO – общая идея

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани	
K_1	0*0*
K_2	**10
K_4	1**1
K_5	1*1*

«Расширение» граней

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		
0 1	1	1	1	1
1 1			1	1
1 0	1	1	1	1

Грани	
K_1	0*0*
K_2	**10
K_4	1**1
K_5	1*1*

«Тупиковое покрытие»

Алгоритм ESPRESSO


- Этапы алгоритма
  - «Сужение» граней (REDUCE)
  - «Расширение» граней (EXPAND)
  - «Тупиковое покрытие» (IRREDUNDANT)
- Разработка алгоритма
  - началась в компании IBM
  - завершена в университет Berkeley
- Литература
  - Brayton, Hachtel, McMullen, Sangiovanni-Vincentelli, Logic Minimization Algorithms for VLSI Synthesis, Kluwer Academic Press, 1984
  - Richard L. Rudell, (1986-06-05), “Multiple-Valued Logic Minimization for PLA Synthesis” Memo No. UCB/ERL M86-65 (U. California Berkeley M.S. Thesis)
  - Giovanni DeMicheli, Synthesis and Optimization of Digital Circuits, McGraw Hill, 1994

Табличное задание ДНФ

- Таблица ЭК (англ. Positional cube notation, PCN)
  - все литералы упорядочены и кодируются двумя битами
  - ЭК задают строки таблицы и являются битовыми последовательностями

- x – кодируется «01»
- $\overline{x}$ – кодируется «10»
- Пропущенные литералы кодируется «11»
- Код «00» является индикатором пустой ДНФ

$$f = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	x_1	x_2	x_3
$x_1 x_2$	01	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  - добавление/удаление литералов

$$f = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
$x_1 x_2$	01	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  - добавление/удаление литералов

$$f = \boldsymbol{x_1} x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
$x_1 x_2$	**01**	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  - добавление/удаление литералов

$$f = x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	x_1	x_2	x_3
$x_1 x_2$	**11**	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  - добавление/удаление литералов
  - добавление/удаление ЭК

$$f = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
$x_1 x_2$	01	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  – добавление/удаление литералов
  – добавление/удаление ЭК

$$f = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \boldsymbol{\bar{x}_1\bar{x}_3}$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
x_1x_2	01	01	11
$\bar{x}_1x_3$	10	11	01
$x_1\bar{x}_3$	01	11	10
$\boldsymbol{\bar{x}_1\bar{x}_3}$	**10**	**11**	**10**

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  - добавление/удаление литералов
  - добавление/удаление ЭК
  - проекция по переменной

$$f = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
$x_1 x_2$	01	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  - добавление/удаление литералов
  - добавление/удаление ЭК
  - проекция по переменной

$$f\Big|_{x_1} = x_2 \vee \overline{x}_3$$

	x_1	x_2	x_3
$x_1 x_2$	01	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Табличное задание ДНФ

- Операции над ДНФ, заданной таблицей:
  - добавление/удаление литералов
  - добавление/удаление ЭК
  - проекция по переменной

$$f\Big|_{x_1} = x_2 \vee \overline{x}_3$$

	x_1	x_2	x_3
$x_1 x_2$	**11**	01	11
$x_1 \overline{x}_3$	**11**	11	10

Задача проверки тождественности

- Дано:
  – ДНФ для ФАЛ f (в PCN формате).
- Задача:
  – Установить, является ли ФАЛ f тождественно равной 1.

- Какому классу сложности принадлежит данная задача?

Рекурсивная проверка тождественности

- Разложение Шеннона:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot f(x_1, \dots, x_n)\Big|_{x_1} \vee \overline{x}_1 f(x_1, \dots, x_n)\Big|_{\overline{x}_1}$$

$$f(\tilde{x}) \equiv 1 \Leftrightarrow f(\tilde{x})\Big|_{x_1} \equiv 1 \wedge f(\tilde{x})\Big|_{\overline{x}_1} \equiv 1$$

- Основные вопросы:
  – Выбор переменной: по какой переменной лучше всего проводить разложение?
  – Критерий останова: когда можно остановить рекурсию?
  – Особенности реализации: как эффективно хранить подфункции в памяти?

Обобщенно-монотонные ФАЛ и поляризованные ДНФ

- ФАЛ f – *обобщенно-монотонная*, если она монотонна или антимонотонна по каждой своей переменной
- ДНФ D_f - *поляризованная*, если каждая переменная D_f входит в нее в заданной степени
- Поляризованная ДНФ реализует обобщенно-монотонную ФАЛ

Обобщенно-монотонные ФАЛ и поляризованные ДНФ

- **Утверждение:** Поляризованная ДНФ D_f реализует ФАЛ $f \equiv 1$ тогда и только тогда, когда $D_f = 1$
- **Доказательство:**
  - Если $D_f = 1$, то $f \equiv 1$
  - Пусть D_f - поляризованная ДНФ $f \equiv 1$. Произведем замену всех переменных, входящих с отрицанием в D_f, новыми переменными без отрицания ($\overline{x}_i = y_i$) и получим полином Жегалкина для ФАЛ f. В силу единственности полинома Жегалкина получаем, что $D_f \equiv 1$.
- **Следствие:** Решение задачи проверки тождественности для поляризованных ДНФ заключается в проверки наличия ЭК $K = 1$ в записи ДНФ

Рекурсивное разложения ФАЛ по обобщенно-монотонным ФАЛ

- Решение задачи проверки тождественности для произвольной ДНФ:
  – последовательное разложение по переменным
  – разложение останавливается, когда ДНФ для остаточной ФАЛ становится поляризованной
  – Проверка тождественности для поляризованной ДНФ делается за линейное по числу ЭК время и без использования дополнительной памяти
- Указанное разложение может быть использовано в качестве основы для решения ряда других задач

Рекурсивное разложения ФАЛ по обобщенно-монотонным ФАЛ

$$f = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
$x_1 x_2$	01	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

Рекурсивное разложения ФАЛ по обобщенно-монотонным ФАЛ

$$f = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3$$

ДНФ не является поляризованной

	x_1	x_2	x_3
x_1x_2	01	01	11
$\overline{x}_1x_3$	10	11	01
$x_1\overline{x}_3$	01	11	10

Рекурсивное разложения ФАЛ по обобщенно-монотонным ФАЛ

Раскладываем ФАЛ по переменной x_1

$$f = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$$

	x_1	x_2	x_3
$x_1 x_2$	01	01	11
$\overline{x}_1 x_3$	10	11	01
$x_1 \overline{x}_3$	01	11	10

ДНФ не является поляризованной

Рекурсивное разложения ФАЛ по обобщенно-монотонным ФАЛ

Раскладываем ФАЛ по переменной x_1

$$f = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3$$

ДНФ не является поляризованной

	x_1	x_2	x_3
x_1x_2	01	01	11
$\overline{x}_1x_3$	10	11	01
$x_1\overline{x}_3$	01	11	10

$$f\big|_{\overline{x}_1} = x_3$$

	x_1	x_2	x_3
x_1x_2	01	01	11
$\overline{x}_1x_3$	10	11	01
$x_1\overline{x}_3$	01	11	10

Рекурсивное разложения ФАЛ по обобщенно-монотонным ФАЛ

Раскладываем ФАЛ по переменной x_1

$$f = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3$$

ДНФ не является поляризованной

	x_1	x_2	x_3
x_1x_2	01	01	11
$\overline{x}_1x_3$	10	11	01
$x_1\overline{x}_3$	01	11	10

$$f\big|_{\overline{x}_1} = x_3$$

	x_1	x_2	x_3
x_1x_2	01	01	11
$\overline{x}_1x_3$	10	11	01
$x_1\overline{x}_3$	01	11	10

$$f\big|_{x_1} = x_2 \vee \overline{x}_3$$

	x_1	x_2	x_3
x_1x_2	01	01	11
$\overline{x}_1x_3$	10	11	01
$x_1\overline{x}_3$	01	11	10