Упражнения по теме «натуральные исчисления»

Сокращения: НИВ — натуральное исчисление высказываний, НИП — натуральное исчисление предикатов

Аксиомы и правила вывода натуральных исчислений

В схемах аксиом и правилах используются следующие параметры:

- \bullet A, B, C формулы
- Г множество формул
- х, у предметные переменные
- t терм

Схемы аксиом НИВ и НИП:

$$\mathfrak{A}: \quad \Gamma \cup \{A\} \vdash A \qquad \qquad \mathfrak{A}_{\lor}: \quad \Gamma \vdash A \lor \neg A$$

Правила вывода НИВ и НИП для логических связок:
$$R_{\&}^{+}: \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \qquad R_{\&}^{-}: \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B}$$

$$R_{\vee}^{+}: \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \qquad R_{\vee}^{-}: \frac{\Gamma \vdash A \vee B, \ \Gamma \cup \{A\} \vdash C, \ \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

$$R_{\rightarrow}^{+}: \qquad \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \qquad \qquad R_{\rightarrow}^{-}: \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

$$R_{\neg}^{+}: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \quad \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \qquad \qquad R_{\neg}^{-}: \qquad \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A}$$

$$R_{\neg}^{+}:\frac{\Gamma\cup\{A\}\vdash B,\ \Gamma\cup\{A\}\vdash\neg B}{\Gamma\vdash\neg A} \qquad \qquad R_{\neg}^{-}: \qquad \frac{\Gamma}{\Gamma\vdash \forall \mathbf{x}\ A}$$
 Правила вывода НИП для кванторов:
$$R_{\forall}^{+}:\frac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash \forall \mathbf{x}\ A} \qquad \qquad R_{\neg}^{-}: \qquad \frac{\Gamma\vdash \forall \mathbf{x}\ A}{\Gamma\vdash A\left\{\mathbf{x}/t\right\}}$$
 Ограничение:

 ${\bf x}$ не является свободной переменной формул из Γ

$$R_{\exists}^{+}: \frac{\Gamma \vdash A\left\{\mathbf{x}/t\right\}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \ A}$$

$$Corpanu \textit{ venue:}$$

$$R_{\exists}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \ A, \quad \Gamma \cup \left\{A\left\{\mathbf{x}/\mathbf{y}\right\}\right\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

$$Corpanu \textit{ venue:}$$

подстановка $\{x/y\}$ правильна для A, и подстановка $\{x/t\}$ правильна для Aу — переменная, не являющаяся свободной в формулах из $\Gamma \cup \{\exists x \ A, B\}$

подстановка $\{x/t\}$ правильна для A

Два вспомогатеьных правила вывода НИВ и НИП:

$$R_m: \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vdash A} \qquad R_a: \frac{\Gamma \vdash A, \ \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

Другие правила и аксиомы применять при решении задач запрещено

Упражнение 1. Докажите утверждение на естественном языке, обозначив правила, по которым построено доказательство. Преобразуйте предложенное доказательство в соответствующую последовательность секвенций НИВ или НИП.

- 1. Пусть верно следующее: звонок звенит тогда и только тогда, когда нажата кнопка звонка и в доме есть свет; мне страшно в том и только том случае, если в доме нет света или звенит звонок. Тогда верно и следующее: если нажата кнопка звонка, то мне страшно.
- 2. Если ёжики существуют и все они колючие, то существует и кто-то колючий.
- 3. Если враг моего врага мой друг и враг моего друга мой враг, то враг врага врага моего врага мой друг.
- 4. Если у моей матери есть брат, у которого есть дочь, то у меня есть двоюродная сестра.

Упражнение 2. Докажите заданную формулу логики высказываний в НИВ.

1.
$$A \& \neg A \rightarrow B$$

5.
$$A \& B \rightarrow B \& A$$

9.
$$\neg (A \lor B) \to \neg A \& \neg B$$

2.
$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

6.
$$A \lor B \to B \lor A$$

10.
$$\neg A \& \neg B \rightarrow \neg (A \lor B)$$

$$3. \ (A \to B) \to \neg A \lor B$$

7.
$$A \& (B \lor C) \rightarrow A \& B \lor A \& C$$
 11. $\neg (A \& B) \rightarrow \neg A \lor \neg B$

11.
$$\neg (A \& B) \rightarrow \neg A \lor \neg B$$

$$4. \neg A \lor B \to (A \to B)$$

8.
$$A \& B \lor A \& C \rightarrow A \& (B \lor C)$$
 12. $\neg A \lor \neg B \rightarrow \neg (A \& B)$

12.
$$\neg A \lor \neg B \to \neg (A \& B)$$

Упражнение 3. Докажите заданную формулу логики предикатов в НИП.

1.
$$\forall x P(x) \rightarrow P(c)$$

7.
$$\forall x P(x) \& \forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \& Q(x))$$

2.
$$P(\mathbf{c}) \& \forall \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \to P(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \to P(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))))$$

8.
$$\exists x (P(x) \lor Q(x)) \to \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$$

3.
$$\forall x P(x, x) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$$

9.
$$\exists x \ P(x) \lor \exists x \ Q(x) \to \exists x \ (P(x) \lor Q(x))$$

4.
$$\exists y \ \forall x \ P(x,y) \rightarrow \forall x \ \exists y \ P(x,y)$$

10.
$$\exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

5.
$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$$

11.
$$\forall x P(x) \rightarrow \neg \exists x \neg P(x)$$

6.
$$\forall x (P(x) \& Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \& \forall x Q(x)$$

12.
$$\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$$

Упражнение 4. Дополните последовательности секвенций, предложенные в упражнении 1, до доказательств в НИВ и НИП, и дополните предложенные доказательства на естественном языке соответствующими суждениями.

Упражнение 5. Известно, что Даша любит Сашу, Саша любит пиво, а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он. Докажите в НИП, что кто-то любит Дашу.

Упражнение 6. Похвалы достоин только тот, кто умён или не ленится. Умный обязательно знает что-то нетривиальное. Я ленюсь, и всё, что я знаю, тривиально. Докажите в НИП, что если всё это правда, то я не достоин похвалы.