

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 11

Метод семантических таблиц
в логике предикатов:
корректность табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$
 $L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$
таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима
таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg$

Доказательство корректности этих правил
почти дословно переносится из доказательства той же леммы
для **ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ** — достаточно только

- ▶ начать с
“Пусть \tilde{x}^n — все свободные переменные формул верхней таблицы”
- ▶ заменить “существует интерпретация \mathcal{I} ”
на “существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n ”
- ▶ заменить (не)выполнимость формулы в интерпретации \mathcal{I}
на (не)выполнимость ... на наборе предметов \tilde{d}^n

Лемма(о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$

$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi, \varphi \{x/t\} \mid \Delta \rangle}$

(\Leftarrow): очевидно:

если вычеркнуть формулу ($\varphi\{x/t\}$)

из выполнимой (нижней) таблицы,

то она (станет верхней и) останется выполнимой

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\forall$: $\frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi, \varphi \{x/t\} \mid \Delta \rangle}$

(\Rightarrow): пусть верхняя таблица выполнима,

и \tilde{x}^n — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима \Leftrightarrow

существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n , такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \psi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \chi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- ▶ $\mathcal{I} \models (\forall x \varphi)[\tilde{d}^n]$

При этом $\mathcal{I} \models (\forall x \varphi)[\tilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi[t[\tilde{d}^n], \tilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi \{x/t\} [\tilde{d}^n]$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется **правильность** подстановки $\{x/t\}$ для φ ?

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \{x/c\} \mid \Delta \rangle}$

(\Leftarrow): очевидно, т.к. если $\mathcal{I} \models \varphi \{x/c\} [\tilde{d}^n]$, то $\mathcal{I} \models (\exists x \varphi) [\tilde{d}^n]$

(\Rightarrow): пусть верхняя таблица выполнима,
и \tilde{x}^n — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима \Leftrightarrow

существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n , такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \psi(\tilde{x}^n) [\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \chi(\tilde{x}^n) [\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- ▶ $\mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi) [\tilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0 , такой что $\mathcal{I} \models \varphi [d_0, \tilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \{x/c\} \mid \Delta \rangle}$

$(\Rightarrow): \quad \psi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n] \quad \chi \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi[\tilde{d}^n] \quad \mathcal{I} \models \varphi[d_0, \tilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию \mathcal{J} ,

отличающуюся от \mathcal{I} только оценкой константы c : $\bar{c} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi \{x/c\})[\tilde{d}^n]$

Кроме того,

- ▶ $\mathcal{J} \models \psi[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{J} \not\models \chi[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что c — “неиспользованная” константа?

Для правил $R\forall, R\exists$ доказательство аналогично ▼

Теорема (о корректности табличного вывода)

Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство. Следует из определения табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие. Если для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А верно ли утверждение в обратную сторону?