Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Осенний семестр 2023–2024 уч. г. группы 311–319

Лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.ru)

Информационная поддержка курса:
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

7. Формулы и способы их задания, эквивалентность формул ифункционалы их сложности. Оптимизация подобных формул по глубине

Утверждение 7.1 Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}$, вида $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{F}_k$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \leqslant L(\mathcal{F}) + 1 \leqslant \\ \leqslant 2^{D(\mathcal{F}_1)} + \ldots + 2^{D(\mathcal{F}_k)} \leqslant 2^{D(\mathcal{F})},$$

где $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$ — число ФС & и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Следствие

$$D(\mathcal{F}) \geqslant \left\lceil \log\left(2^{D(\mathcal{F}_1)} + \ldots + 2^{D(\mathcal{F}_k)}\right) \right\rceil \geqslant \\ \geqslant \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil.$$

Утверждение 7.2 Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^{\Phi}$ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая,что

$$D\left(\check{\mathcal{F}}\right) \leqslant \lceil \log\left(L\left(\mathcal{F}\right) + 1\right)\rceil + \mathrm{Alt}\ \left(\mathcal{F}\right).$$

Следствие 1. Для любой ЭК или ЭД Kсуществует подобная ей формула $\check{K}$ такая, что
$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$
которая, минимальна по глубине.

Следствие 2. Для любой ДНФ или КНФ $\mathfrak{A}$ существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что
$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leqslant \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

8. Эквивалентные преобразования формул с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$

$$
\begin{aligned}
\tau^{\textsf{осн}} &= \left\{ t^{\mathrm{M}}_{\&},\ t^{\mathrm{M}}_{\neg},\ t^{\mathrm{A}}_{\&},\ t^{\mathrm{K}}_{\&},\ t^{\mathrm{O}\Pi}_{\&},\ t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{1,\&},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{0,\&} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{A}} &= \left\{ t^{\mathrm{A}}_{\&},\ t^{\mathrm{A}}_{\vee} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{K}} &= \left\{ t^{\mathrm{K}}_{\&},\ t^{\mathrm{K}}_{\vee} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{O}\Pi} &= \left\{ t^{\mathrm{O}\Pi}_{\&},\ t^{\mathrm{O}\Pi}_{\vee} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{D}} &= \left\{ t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee},\ t^{\mathrm{D}}_{\vee,\&} \right\}, \\
\tau^{\Pi\mathrm{K}} &= \left\{ t^{\Pi\mathrm{K}}_{0,\&},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{1,\&},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{0,\vee},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{1,\vee} \right\}, \\
\widetilde{\tau}^{\textsf{осн}} &= \left\{ \tau^{\mathrm{M}},\ \tau^{\mathrm{A}},\ \tau^{\mathrm{K}},\ \tau^{\mathrm{O}\Pi},\ \tau^{\mathrm{D}},\ \tau^{\Pi\mathrm{K}},\ t^{\Pi} \right\}.
\end{aligned}
$$

Утверждение 8.1 Система $\widetilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Утверждение 8.2 Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Утверждение 8.3 Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.

9. Контактные схемы и π-схемы, моделирование формул и π-схем. Особенности функционирования многополюсных контактных схем

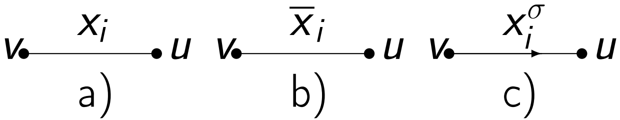

Рис. 1: типы контактов

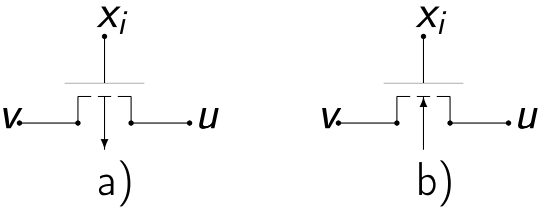

Рис. 2: физическая интерпретация контактов

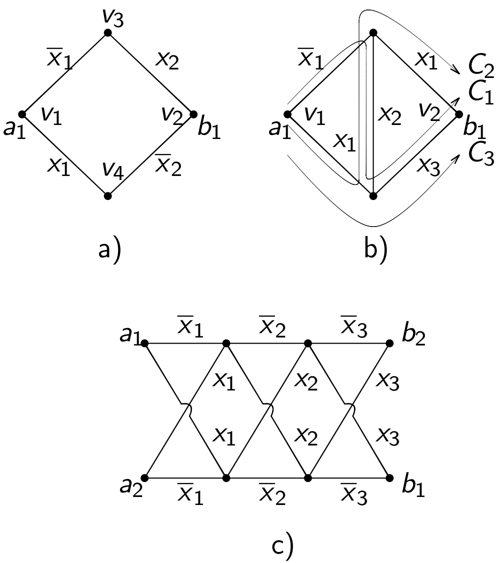

Рис. 3: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Утверждение 9.1 Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Утверждение 9.2 Контактная схема $\Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_p)$ из неориентированных контактов реализует матрицу M, $M \in (P_2(n))^{p,q}$, которая обладает свойствами рефлексивности, транзитивности, симметричности и удовлетворяет равенству $M^2 = M$. При этом для любой матрицы M указанного вида существеут реализующая её КС Σ данного типа.

10. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств

Утверждение 10.1 Имеет место выводимость $\{t_1 — t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \models\!\!\Rightarrow \{t_7 — t_{11}\}$.

Утверждение 10.2 При $n \geqslant 2$ имеет место выводимость $\tau_n \models\!\!\Rightarrow \tau^{(n)}$.

11. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Утверждение 11.1 Для любой КС Σ, где $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{U}^{\mathrm{K}}$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}$.

Утверждение 11.2 Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma''$.

Следствие Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ от БП $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$.

Утверждение 11.3 Если $\Sigma'(x_1,\ldots,x_n) \underset{\{t_1-t_5\}}{\rightrightarrows} \Sigma''(x_1,\ldots,x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, где $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k}.

Утверждение 11.4 В классе $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ не существует конечной полной системы тождеств.

12. Схемы из функциональных элементов и операции их приведения. Оценки числа формул и схем в базисе $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, числа контактных схем и числа π-схем.

Утверждение 12.1 Для приведенной СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leqslant L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \leqslant L(\Sigma) + 1 \leqslant 2^{D(\Sigma)},$$

где $L_{\&,\vee}$ — число ФЭ & и $\vee$ в Σ.

Утверждение 12.2 Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства

$$\left|\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)\right| \leqslant (10n)^{L+1},$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)\right\| \leqslant (8n)^{L+1},$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}[D,n]\right\| \leqslant (8n)^{2^{D}}.$$

Следствие Число попарно не коммутативно подобных формул с поднятыми отрицаниями ранга R от БП $x_1, \ldots, x_n$ не больше, чем $(12n)^R$.

Утверждение 12.3 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^{\pi}(L, n)\| \leqslant (12n)^L.$$

Утверждение 12.4 Для любых натуральных n и L выполняются неравенства

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)\right\| \leqslant (8(L+n))^{L+1}.$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L, n)\right\| \leqslant (8nL)^L.$$

13. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований схем из функциональных элементов базиса $Б_0$. Теорема перехода

Утверждение 13.1 Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, то $\left\{\underline{\tau},\ \tau^{\mathrm{C}},\ \tau^{\mathrm{B}}\right\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$

Следствие Система тождеств $\left\{\underline{\tau}^{\text{осн}},\ \tau^{\mathrm{B}},\ \tau^{\mathrm{C}}\right\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$.

Утверждение 13.2 Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{Ф}_{Б}$, а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса Б к базису Б$'$ и от базиса Б$'$ к базису Б соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{Ф}_{Б}$.

Следствие Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{Ф}$ указанным в утверждении способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе Б.