Лекция 7. Графы. Числа Рамсея. Верхняя и нижняя оценки чисел Рамсея.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Числа Рамсея

Пусть $G = (V, E)$ — граф (без петель и кратных ребер).

Граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ называется **дополнительным** к графу $G = (V, E)$, если $\bar{E}$ содержит все те ребра, которые не содержатся в E, т. е.

$$\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}.$$

Число $R(m, n)$ — такое наименьшее целое число x, что для любого графа G с x вершинами верно свойство: либо в G найдется подграф K_m, либо в $\bar{G}$ найдется подграф K_n.

Числа Рамсея

Раскраской ребер графа $G = (V, E)$ в два цвета назовем произвольное отображение $\rho : E \to \{1, 2\}$.

Число $R(m, n)$ — такое наименьшее число x, что при любой раскраске ребер полного графа K_x в два цвета верно свойство: либо в нем найдется подграф K_m с ребрами только цвета 1, либо в нем найдется подграф K_n с ребрами только цвета 2.

Задача о знакомых

Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Задача о знакомых

Предложение 1. *Если G — граф с шестью вершинами, то либо G, либо $\bar{G}$ содержит треугольник.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ и $v \in V$ — произвольная вершина.

1. Пусть в графе G вершина v смежна с какими-то тремя вершинами $v_1, v_2, v_3 \in V$.

Если какие-то две вершины из v_1, v_2, v_3 смежны в графе G, то вместе с вершиной v они образуют треугольник.

Если все три вершины v_1, v_2, v_3 не смежны в графе G, то они образуют треугольник в графе $\bar{G}$.

2. Если в графе G вершина v смежна не более, чем с двумя вершинами, то повторим рассуждения для графа $\bar{G}$.

$\square$

Некоторые числа Рамсея

Отметим, что $R(m,n) = R(n,m)$ при $m, n \geqslant 1$, а также при $n \geqslant 1$ верны равенства

$$\begin{aligned} R(1,n) &= 1, \\ R(2,n) &= n. \end{aligned}$$

Верхняя оценка числа Рамсея

Теорема 1. *При $m, n \geqslant 2$ верно неравенство*

$$R(m, n) \leqslant R(m-1, n) + R(m, n-1),$$

при этом если оба числа $R(m-1, n)$, $R(m, n-1)$ — четные, то неравенство строгое.

Доказательство. 1. Положим $x = R(m-1, n) + R(m, n-1)$.

Рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_x в цвета 1 и 2.

Из произвольной вершины v графа K_x исходит либо $R(m-1, n)$ ребер цвета 1, либо $R(m, n-1)$ ребер цвета 2.

Случаи аналогичны, рассмотрим один из них.

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство. Пусть из вершины v графа K_x исходит $R(m-1,n)$ ребер цвета 1.

Рассмотрим множество V из $y = R(m-1,n)$ концов этих ребер.

Вершины из V вместе с соединяющими их ребрами образуют полный подграф K_y графа K_x.

По определению числа $R(m-1,n)$ в графе K_y найдется либо полный подграф K_{m-1} с ребрами цвета 1, либо полный подграф K_n с ребрами цвета 2.

В первом случае добавим к этому полному подграфу K_{m-1} вершину v и получим полный подграф K_m с ребрами цвета 1 в графе K_x.

Во втором случае этот полный подграф K_n с ребрами цвета 2 содержится и в графе K_x.

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство. 2. Пусть оба числа $R(m-1,n)$, $R(m,n-1)$ — четные.

Положим $z = R(m-1,n) + R(m,n-1) - 1$. Рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_z в цвета 1 и 2.

Если из некоторой вершины v графа K_z исходит либо $R(m-1,n)$ ребер цвета 1, либо $R(m,n-1)$ ребер цвета 2, то искомый полный граф найдется (аналогично п. 1).

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство. Пусть из каждой вершины v графа K_z исходит в точности $R(m-1,n)-1$ ребер цвета 1.

Тогда рассмотрим подграф H графа K_z, образованный всеми вершинами графа K_z и всеми ребрами цвета 1.

Граф H содержит нечетное число вершин $z = R(m-1,n) + R(m,n-1) - 1$, причем степень каждой вершины — нечетна (равна $R(m-1,n)-1$), чего не может быть.

$\square$

Верхняя оценка числа Рамсея

Следствие 1.1. *При* $m, n \geqslant 1$ *верно неравенство*

$$R(m, n) \leqslant C_{m+n-1}^{m-1}.$$

Доказательство проведем индукцией по m.

Базис индукции $m = 1$ верен.

Индуктивный переход: по теореме получаем

$$\begin{aligned} R(m, n) &\leqslant R(m-1, n) + R(m, n-1) \leqslant \\ &\leqslant C_{m+n-2}^{m-2} + C_{m+n-2}^{m-1} = C_{m+n-1}^{m-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Верхняя оценка числа Рамсея

Следствие 1.2. *При* $m, n \geqslant 1$ *верно неравенство*

$$R(m, n) \leqslant 2^{m+n-1}.$$

Доказательство.

$$R(m, n) \leqslant C_{m+n-1}^{m-1} \leqslant 2^{m+n-1}.$$

$\square$

Некоторые оценки чисел Рамсея

Применяя равенства $R(1,n)=1$, $R(2,n)=n$, получам:

$$R(3,3) \leqslant R(2,3)+R(3,2)=3+3=6;$$
$$R(3,4) \leqslant R(2,4)+R(3,3) \leqslant 4+6 \leqslant 10;$$
$$R(3,5) \leqslant R(2,5)+R(3,4) \leqslant 5+10=15;$$
$$R(4,4) \leqslant R(3,4)+R(4,3) \leqslant 10+10=20.$$

Нижняя оценка числа Рамсея

Теорема 2 (Эрдеша). *При $k \geqslant 2$ верно неравенство*

$$R(k,k) \geqslant 2^{k/2}.$$

Доказательство. Рассмотрим $k \geqslant 3$, т. к. $R(2,2) = 2$.

Оценим долю $\gamma(p,k)$ графов с p помеченными вершинами, в которых найдется полный подграф с k вершинами.

Возможных ребер в графах с p вершинами ровно C_p^2, откуда графов с p вершинами в точности $2^{C_p^2}$.

Выбрать k вершин, образующих полный подграф, из p вершин можно C_p^k способами.

Оставшиеся $C_p^2 - C_k^2$ ребра могут быть проведены произвольно.

Поэтому число графов с p вершинами, содержащих полный подграф с k вершинами, не более $C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}$.

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство. Значит,

$$\gamma(p,k) \leqslant \frac{C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}}{2^{C_p^2}} = \frac{p^k}{k!2^{C_k^2}}.$$

При $p < 2^{k/2}$ получаем

$$\gamma(p,k) < \frac{2^{k^2/2}}{k!2^{k^2/2-k/2}} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство. Разобьем все графы с p вершинами на пары $(G, \bar{G})$.

Тогда по доказанному выше при $p < 2^{k/2}$ в этом разбиении найдется такая пара графов $(G, \bar{G})$, что ни G, ни $\bar{G}$ не содержат полный подграф с k вершинами.

Поэтому $R(k, k) \geqslant 2^{k/2}$.

$\square$

Нижняя оценка числа Рамсея

Следствие 2.1. *При* $m, n \geqslant 2$ *верно неравенство*

$$R(m, n) \geqslant 2^{\min(m,n)/2}.$$

Известные числа Рамсея

Числа Рамсея $R(m, n)$:

$m \setminus n$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18			

Задачи

1. Найти значение числа Рамсея:

1) $R(2,2)$;
2) $R(2,3)$;
3) $R(2,4)$;
4) $R(2,5)$.

Ответ обосновать.

2. Обосновать, что:

1) $R(3,3) > 5$;
2) $R(3,4) > 8$.