Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (часть III)

1. Планы семинарских занятий и методические указания к ним на осенний семестр 2021–2022 уч. года

Семинар 12 (семинар 1 раздела III): 3.XII, 4.XII

Постановка задачи синтеза схем для ФАЛ (операторов) из специальных классов, мощностные характеристики этих классов и соответствующие нижние оценки функций Шеннона для их сложности. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, особенности поведения их мощностных последовательностей. Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для невырожденных квазиинвариантных классов. Теоретический материал [4, §§1–3, 11], [1, слайды лекций к вопросам 26–28].

В классе.

1. Выяснить, какие из следующих классов ФАЛ (операторов) являются невырожденными, и получить нижние мощностные оценки (НМО) функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из данных классов СФЭ в стандартном базисе:

    1) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = 0$;
    2) Q — класс ФАЛ, симметричных по БП x_1, x_2, x_3;
    3) Q — класс ФАЛ, монотонных по БП x_1, x_2;
    4) Q — класс ФАЛ, равных 0 на наборах с чётным числом 1;
    5) Q — класс линейных[1] ФАЛ;
    6) Q — класс самодвойственных[1] ФАЛ;
    7) Q — класс симметрических[1] ФАЛ;
    8) Q — класс операторов вида $F = (f_1, f_2, f_3)$ таких, что $f_i \cdot f_j \equiv 0$ при $i \neq j$ и $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \equiv$ $\equiv 1$.

2. Выделить среди классов ФАЛ из задачи 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти асимптотическое поведение функции Шеннона для классов из пунктов 1–4, 8 задачи 2.

На дом.

1. Исследовать на невырожденность и, в случае невырожденности, установить асимптотику НМО функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где:

    1) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = x_2 = 1$;
    2) Q — класс ФАЛ, монотонных по x_1 и антимонотонных по x_2;
    3) Q — класс ФАЛ, у которых любая подфункция от БП x_1, x_2 принадлежит множеству $\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ x_1,\ x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \sim x_2\}$;
    4) Q — класс ФАЛ, симметричных по своим $n, n = 1, 2, \ldots$ существенным БП с рабочими числами вида $a, a+4, a+8, \ldots, a+4k$, где $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $k = \lfloor (n-a)/4 \rfloor$;

2. Выделить среди классов ФАЛ из задачи 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти асимптотическое поведение функций Шеннона из пунктов 1–4 задачи 2.

[1]Класс рассматривался на лекциях.

Методические указания.

Задача 1 решается на основе подсчета мощности множества $Q(n), n = 1, 2, \ldots,$ для рассматриваемого класса Q, а также определения невырожденного класса. Класс ФАЛ (операторов), то есть последовательность $Q(1), Q(2), \ldots, Q(n), \ldots$, где $Q(n)$ — некоторое множество систем из $m = m(n)$ ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, считается невырожденным, если $n + m(n) = o(\log|Q(n)|/\log\log|Q(n)|)$.

Задача 2 решается на основе понятий квазиинвариантного и инвариантного классов. Класс ФАЛ $Q = Q(1) \cup Q(2) \cup \ldots \cup Q(n) \cup \ldots$, называется *квазиинвариантным*, если для некоторого n_0 и любого n, $n \geq n_0$, множество ФАЛ, получающихся из ФАЛ множества $Q(n)$ подстановкой констант 0 и 1 вместо БП x_n, содержится в $Q(n-1)$. При этом его мощностная последовательность $\sigma_Q(n) = \log|Q(n)|/2^n$ монотонно не возрастает, если $n \geq n_0$, и стремится к пределу $\sigma_Q = \lim_{n\to\infty} \sigma_Q(n)$, $0 \leq \sigma_Q \leq 1$.

Аналогично определяется квазиинвариантный класс операторов $Q = Q(0) \cup \ldots \cup Q(n) \cup \ldots$, где $Q(n) \subseteq P_2^{m(n)}(n)$, причём $m(n) = m = \text{const}$, для которого соответствующая последовательность $\sigma_Q(n)$ монотонно не возрастая стремится к пределу σ_Q, где $0 \leq \sigma_Q \leq m$.

Класс ФАЛ Q называется *инвариантным*, если он замкнут относительно операций: 1) добавление и изъятие фиктивных БП ФАЛ; 2) переименование БП без отождествления; 3) подстановка констант вместо БП.

Задача 3 из списка как классных, так и домашних задач решается с помощью утверждения 29.1 про квазиинвариантные классы. При этом для решения классной задачи №4 достаточно «погрузить» класс $Q(n)$ в инвариантный класс $\hat{Q}(n)$, состоящий из ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n) \in \hat{Q}(n)$ вида $f = g(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma)$, где $g \in P_2(n)$, $\sigma \in B$.

Для решения классной задачи №8 достаточно «распространить» утверждение 29.1 на квазиинвариантные классы операторов, состоящие из наборов ФАЛ фиксированной длины $m = m(n) = 3$.

Семинар 13 (семинар 2 раздела III): 10.XII, 11.XII

Синтез СФЭ для ФАЛ из специальных классов на основе идей принципа локального кодирования, установление асимптотики соответствующих функций Шеннона. Сложность не всюду определённых функций, их использование при синтезе схем для ФАЛ из специальных классов. Теоретический материал [4, §§4–8], [1, слайды лекций к вопросам 30–34].

В классе.

1. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где $Q(n)$ — класс тех ФАЛ из $P_2(n)$, которые на любой паре противоположных наборов, за исключением, возможно, одной такой пары, принимают одинаковые значения.

2. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1222)$.

3. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не меньше $n/2$ единиц.

На дом.

1. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — класс операторов $F = (f_1, f_2)$ таких, что $f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bar{f}_1(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где набор $\tilde{\beta}$ имеет номер на единицу больше, чем набор $\tilde{\alpha}$, если $\tilde{\alpha} \neq (1, \ldots, 1)$, и $F(\tilde{\alpha}) = (0, 0)$ в противном случае.

2. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0111\,2221)$.

3. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не равное i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$ число единиц.

Методические указания.

Для решения классной (домашней) задачи №1 достаточно воспользоваться принципом локального кодирования аналогично тому, как это делалость в утверждениях 30.1 и 31.2, связанных с кодированием для оператора $F \in Q(n)$ всех его «остаточных» операторов вида $F_{\sigma'}(x'') = F(\sigma', x'')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ и $\sigma' \in B^q$, двоичными наборами подходящей длины. При этом основную по сложности часть искомой схемы будет составлять схема, реализующая оператор, который по набору σ' БП x' выдаёт код (в домашней задаче №4 в этом коде должен быть учтён один «дополнительный» разряд столбца значений ФАЛ f_1, позволяющий перейти к «следующему» набору значений БП x'') соответствующего остаточного оператора $F_{\sigma'}(x'')$. Вспомогательный оператор декодирования, который по набору σ'' значений БП x'' и коду оператора $F_{\sigma'}(x'')$ вычисляет $F(\sigma', \sigma'')$, при подходящем выборе параметров будет иметь существенно меньшую сложность.

При решении классной (домашней) задачи №2 необходимо сначала убедиться в том, что любое доопределение g ФАЛ f существенно зависит от k, где $k = 3$ (соответственно $k = 2$) БП, т. е. $L^{\mathrm{C}}(g) \geq k - 1$. После этого достаточно взять в качестве доопределения g ФАЛ f из классной (домашней) задачи ФАЛ, столбец значения которой имеет вид $(0001\,1111)$ (соответственно $(0111\,0111)$) и реализовать её формулой $x_1 \vee x_2 x_3$ (соответственно $x_1 \vee x_3$) сложности k.

В классной (домашней) задаче №3 нижние мощностные асимптотические оценки вида $2^{n-1}/n$ (соответственно $c_n^i / \log c_n^i$) функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(Q(n))$ устанавливаются с помощью утверждения 26.1. Для получения соответствующих верхних оценок произвольная ФАЛ g, $g \in Q(n)$, представляется в виде $g = f \cdot h$, где $f \in \hat{P}_2(n)$ с областью определения A, $A \subseteq B^n$, которая состоит из «нижней» половины слоёв куба в случае классной задачи и i-го слоя куба в случае домашней задачи, а h — характеристическая ФАЛ множества A. После этого ФАЛ f реализуется как не всюду определённая ФАЛ по утверждению[1] 32.2, а ФАЛ h — как симметрическая ФАЛ, имеющая линейную сложность (замечание к утв. 31.1).

Семинар 14 (семинар 3 раздела III): 17.XII, 18.XII

Теорема Храпченко и её применение для получения нижних оценок сложности ФАЛ в классе π-схем. Теоретический материал [4, §§9–10], [1, слайды лекций к вопросам 34–35].

Проведение контрольной работы по материалам III раздела на втором часу занятия.

В классе.

1. Доказать, что $12 \leqslant L^{\pi}(s_4^2) \leqslant 16$, где s_n^I — симметрическая ФАЛ от n БП, «рабочие» числа которой составляют множество I, $I \subseteq [0, n]$.

2. Доказать, что $L^{\pi}((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/2$.

На дом.

1. Доказать, что $63 \leqslant L^{\pi}(s_8^{\{2,4,6\}}) \leqslant 80$.

2. Доказать, что $L^{\pi}((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_s)(x_{s+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/3$, где $1 \leqslant k < s < n$.

[1] В этом утверждении $\hat{P}_2(n, t)$ — множество всех не всюду определённых ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, имеющих область определённости из t наборов куба B^n.

Методические указания.

Как классная, так и домашняя задачи 1, 2 решаются с помощью теоремы Храпченко (утверждение 36.1) при подходящем подборе множеств $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$, который максимизирует оценку сложности. Так, в классной задаче №1 $\mathcal{N}' = B_2^4$ и $\mathcal{N}'' = B_1^4 \cup B_3^4$, в классной задаче №2 — $\mathcal{N}' = N_f$, а $\mathcal{N}''$ состоит из всех соседних с $\mathcal{N}'$ наборов и т. п.

Требуемые верхние оценки получаются прямым построением искомых π-схем или соответствующих им формул с поднятыми отрицаниями:

$$s_4^2 = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus x_4) \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4,$$
$$s_8^{\{2,4,6\}} = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_8) s_8^{\{0,8\}}(x_1, \ldots, x_8).$$

2. Литература

1. Ложкин С. А. Видеозаписи лекций ДГДМиК 2020 года и презентация к ним. https://m.cs.msu.ru/s/SzdHtfy8q67277g

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.

3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. — 256 с.

4. Ложкин С. А. Дополнительные главы кибернетики. — МГУ, 2019. http://mk.cs.msu.ru/images/0/0b/Dgcyb-lect-190113.pdf

5. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007. — 188 с.

6. Сапоженко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 46 с. http://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko_alg.pdf (номера страниц не соответствуют печатному изданию)

7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.

8. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнёва С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики»: 2-е изд. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2011. — 71 с. http://mk.cs.msu.ru/images/a/ab/Задачи_по_курсу_Основы_кибернетики_2011.pdf