Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

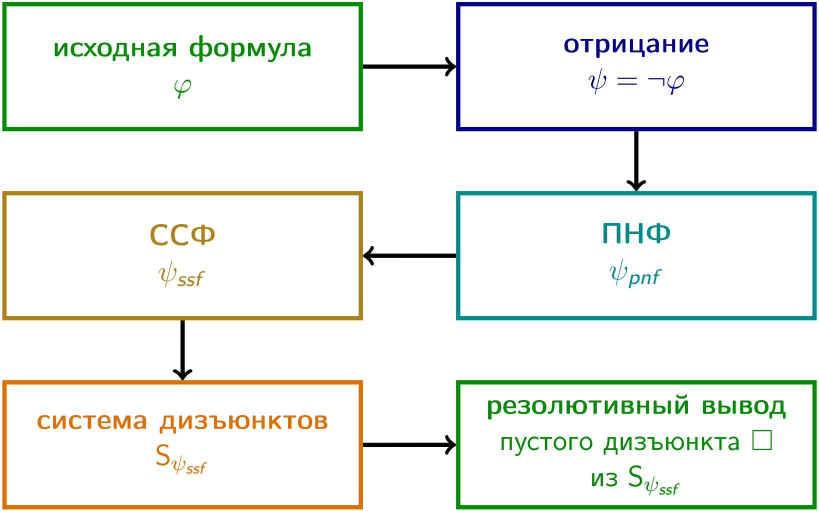
Блок 17

Сколемовская стандартная форма (ССФ)

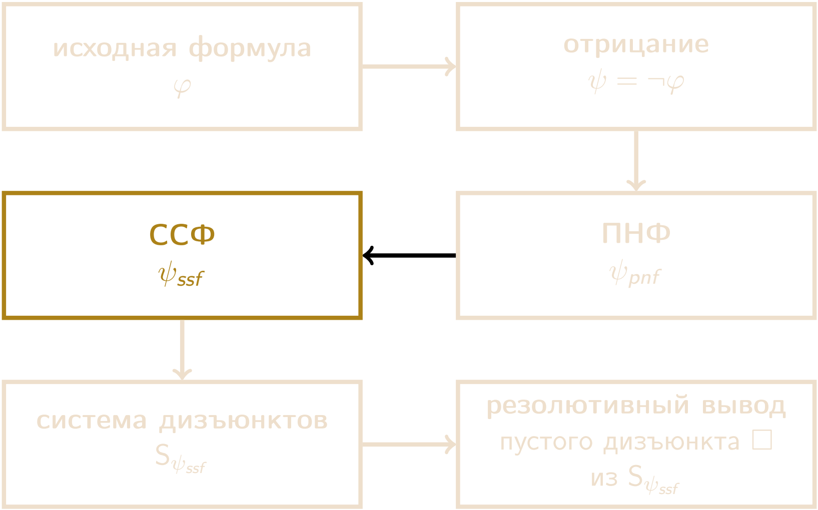
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf}$$

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула находится в
сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$$

Например, формула

$$\forall x \, \forall u \, (P(x) \,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x, u))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с “находится в ССФ” будем говорить “является ССФ”

На одном из этапов метода резолюций следует преобразовать ПНФ
в настолько же (не)выполнимую ССФ

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$|\!\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство.

($\Leftarrow$):
Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$

По семантике "$\forall$", для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно

$$\mathcal{I} \models \chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\, [\widetilde{d}^n]$$

Следовательно, верно и $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathsf{f}}(\widetilde{d}^n)]$

По семантике "$\exists$", верно $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi)[\widetilde{d}^n]$

По семантике "$\forall$", так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ **— замкнутая формула (**$n \geq 0$**) и функциональный символ f не содержится в** χ**. Тогда**

$$\models\!\!\!\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models\!\!\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство.

($\Rightarrow$): Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы φ

По семантике "$\forall$" и "$\exists$", для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ существует предмет d_{n+1}, такой что $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

По $\mathcal{I}$ построим **новую** интерпретацию $\mathcal{J}$:

если в сигнатуре был функциональный символ **f**, удалим его
добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$
оценим **f** так, чтобы выполнялось равенство $\bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n)]$
Следовательно $\mathcal{J} \models \chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\, [\widetilde{d}^n]$
По семантике "$\forall$", так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{J} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$ ▼

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$||\!\!= \varphi \quad \Leftrightarrow \quad ||\!\!= \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}} / \mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Небольшая вольность: если слева от $\exists$ не стоит ни одного $\forall$, то, согласно лемме, **f** — 0-местный функциональный символ, то есть **константа**, и ψ подстановка в условии леммы имеет вид

$$\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}} / \mathsf{f}\}$$

Устранение квантора $\exists$ с введением новых символов с целью получить более простую “хорошую” формулу обычно называют сколемизацией (*здесь “хорошая” — сохраняющая выполнимость и невыполнимость*)

При устранении $\exists$ на место удаляемой переменной подставляются сколемовские термы (*здесь* — $\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}
Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор $\exists$, самый левый $\exists$ удаляется при помощи подстановки сколемовского терма:

$$\varphi_{pnf} = \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \forall x_{k+1} \ldots \forall x_{m-1} \exists x_m \ldots \chi$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \ldots \forall x_{m-1} \exists x_m \ldots (\chi \{x_k / \mathbf{f}_1(x_1, \ldots, x_{k-1})\})$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \ldots \forall x_{m-1} \ldots \\ (\chi \{x_k / \mathbf{f}_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_m / \mathbf{f}_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1})\})$$

$$\ldots$$

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

При этом **важно** (!) при удалении очередного $\exists$
каждый раз выбирать **новый** функциональный символ:
не содержащийся в формуле после всех предыдущих удалений

Алгоритм сколемизации ПНФ

Пример:

$$\exists u\ \exists v\ \forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(u,v) \,\&\, P(v,w) \,\&\, P(w,x) \,\&\, P(x,y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,u))$$

$$\exists v\ \forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c},v) \,\&\, P(v,w) \,\&\, P(w,x) \,\&\, P(x,y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,\mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c},\mathbf{d}) \,\&\, P(\mathbf{d},w) \,\&\, P(w,x) \,\&\, P(x,y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,\mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \forall y\ \exists z\ (P(\mathbf{c},\mathbf{d}) \,\&\, P(\mathbf{d},w) \,\&\, P(w,\mathbf{f}(w)) \,\&\, P(\mathbf{f}(w),y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,\mathbf{c}))$$

$$\forall w\ \forall y\ (\quad P(\mathbf{c},\mathbf{d}) \,\&\, P(\mathbf{d},w) \,\&\, P(w,\mathbf{f}(w)) \,\&\, P(\mathbf{f}(w),y) \,\&\, P(y,\mathbf{g}(w,y)) \,\&\, P(\mathbf{g}(w,y),\mathbf{c}) \quad)$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- **c** — любая константа (ни одной не содержится в формуле)
- **d** — константа, отличная от **c**
- **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- **g** — любой функциональный символ местности 2 (ни один не содержится в формуле)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Другой пример:

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x) \,\&\, (\neg P(z) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

$$\forall x\ \exists y\ \forall u\ (P(x) \,\&\, (\neg P(\mathsf{f}(x)) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

$$\forall x\ \forall u\ (P(x) \,\&\, (\neg P(\mathsf{f}(x)) \vee R(x,\mathsf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x,u))$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- **g** — любой функциональный символ местности 1, кроме **f**

Алгоритм сколемизации ПНФ

Теорема(*о сколемизации*). Если φ_{pnf} — ПНФ, то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:

$$|\!\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство.

Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ — формулы, последовательно получающиеся удалением кванторов $\exists$ (по одному) согласно алгоритму сколемизации ($\psi_1 = \varphi_{pnf}$, $\psi_k = Sk(\varphi_{pnf})$)

По *лемме об удалении квантора $\exists$*, справедливы равносильности

$$|\!\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \psi_2 \quad \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad |\!\models Sk(\varphi_{pnf}) \; \blacktriangledown$$

А если в формулировке теоремы заменить "выполнима" ($|\!\models$) на "общезначима" ($\models$), останется ли она справедливой?