

Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 14

Модальные логики
Эпистемические логики
Темпоральные логики

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Что изучает логика

В первой половине курса обсуждалась вводная часть логики: самые известные логические языки и главные логические задачи

Отдельно обсуждалось введение в *логические исчисления*: чем схожи и чем различаются разные способы доказательного вывода утверждений

Но это далеко не всё, что есть в логике

Что изучает логика

- ✗ В **аксиоматических теориях** анализируется смысл формул со смыслом сигнатурных символов, заданным a priori
- ✗ В языках **логик высшего порядка** кванторы разрешено применять к отношениям, семействам отношений, ...
- ✗ В некоторых логиках (например, **интуиционистской**) “привычные” *логические операции* имеют совсем не такой смысл, как в логиках высказываний и предикатов
- ✓ В некоторых логиках смысл привычных логических операций остаётся прежним, но добавляются “непривычные” операции
- ✓ Для решения некоторых задач, изначально, *казалось бы*, не связанных с логикой, успешно применяются логические методы
- ✗ — это в лекциях не обсуждается
- ✓ — об этом речь пойдёт дальше

Что изучает логика

- ✗ В аксиоматических теориях анализируется смысл формул со смыслом сигнатурных символов, заданным a priori
- ✗ В языках логик высшего порядка кванторы разрешено применять к отношениям, семействам отношений, ...
- ✗ В некоторых логиках (например, интуиционистской) “привычные” логические операции имеют совсем не такой смысл, как в логиках высказываний и предикатов
- ✓ В некоторых логиках смысл привычных логических операций остаётся прежним, но добавляются “непривычные” операции
- ✓ Для решения некоторых задач, изначально, *казалось бы*, не связанных с логикой, успешно применяются логические методы
- ✗ — это в лекциях не обсуждается
- ✓ — об этом речь пойдёт дальше

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима **всегда** близко
- 3: Зима **бывает** близко

Если отбросить всё лишнее, то для высказывания 1 справедлива одна из двух оценок:

правда, если зима действительно близко, и
неправда, если это не так

Смысл высказываний 2 и 3 *тесно связан* со смыслом 1:
если $x =$ “зима близко”, то

1: x 2: **всегда** x 3: **иногда** **бывает** x

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима **всегда** близко
- 3: Зима **бывает** близко

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются **модальностями** (лат. *modus* — мера)

“**Всегда**” и “**иногда**” — это **темпоральные модальности** (модальности времени) (лат. *tempus* — время)

Можно сказать, что “**всегда**” и “**иногда**” — это \forall и \exists , но тогда:

- ▶ **Какими предметами задаётся время, и каковы свойства этих предметов?**
- ▶ **Как устроить анализ смысла высказываний в интерпретациях с такими предметами?**

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Я знаю, что зима близко

3: Я допускаю возможность того, что зима близко

Смысл высказываний 2 и 3 тесно связан со смыслом 1:
если x = “зима близко”, то

1: x

2: известно, что x

3: допустимо x

“Известно” и “допустимо” — это эпистемические модальности
(модальности знания) (др.-греч. ἐπιστήμη — знание)

Если “известно” и “допустимо” трактовать как \forall и \exists ,
то на какие “предметы знаний” указывают эти кванторы?

Модальные логики: вступление

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима **должна быть** близко
- 3: Зима **имеет право быть** близко

Смысл высказываний 2 и 3 *тесно связан* со смыслом 1:
если $x =$ “зима близко”, то

1: x 2: **должно быть** x 3: **имеет право быть** x

“**Должен**” и “**имеет право**” — это **деонтические модальности**
(**модальности долга**) (*др.-греч. δέον* — должное)

Как связан смысл фраз “это так” и “это должно быть так”?

В *рациональных* высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — непростая и иногда невыполнимая задача

Модальные логики: вступление

Чаще всего (хотя и не всегда) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого

необходимо
обязательно
всегда
должен
знает
доказуемо



Модальность возможного

возможно
не исключено
иногда
имеет право
предполагает
непротиворечиво



Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей \square и \diamond — и такой способ используется в

модальных логиках

Модальные логики: синтаксис

Синтаксис **формул** пропозициональных модальных логик над множеством переменных Var :

$\varphi ::= x \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\Box\varphi) \mid (\Diamond\varphi)$,

где φ — формула и $x \in \text{Var}$

Это **синтаксис формул логики высказываний**, расширенный возможностью **расстановки модальностей необходимого и возможного** над любыми (под)формулами

Приоритет операций: \neg , \Box и \Diamond ; затем $\&$; затем \vee ; затем \rightarrow

Пример формулы: $\Diamond x \& \Box \neg \Diamond(x \vee y)$

“возможно x , и при этом необходимо невозможно, что x или y ”

В этой формуле пока ещё неясно, что подразумевается под “необходимостью” и “возможностью”:

определение этих понятий — часть **семантики** формулы

Модальные логики: семантика Крипке

Описание семантики начнём с примера: Зима *бывает* близко

Представим себе любое строгое определение зимы и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет, то ответ на этот вопрос (да или нет) можно задать как значение пропозициональной переменной x

Время течёт, и мир меняется, как и значение x :

сейчас \longrightarrow через минуту \longrightarrow через месяц \longrightarrow через полгода
 $\neg x$ $\neg x$ $\neg x$ x

Ответ на вопрос “ $\diamond x$?” в так меняющемся мире — да, x бывает

Изменение мира можно представить себе и по-другому: существует много взаимосвязанных миров с разными значениями x , и в семантике \diamond комбинируются значения x многих миров

Модальные логики: семантика Крипке

Модель Крипке (над переменными Var) — это система (W, R, ξ) , где

- ▶ W — множество состояний (возможных миров)
- ▶ $R \subseteq W \times W$ — отношение переходов между мирами
 - ▶ “ $R(w_1, w_2)$ ” = “ $w_1 \rightarrow w_2$ ”
- ▶ $\xi : W \rightarrow 2^{\text{Var}}$ — оценка переменных для каждого мира
 - ▶ “ $x \in \xi(w)$ ” = “переменная x истинна в мире w ”

Шкала Крипке (*Kripke frame*), на которой основывается модель (W, R, ξ) , — это пара (W, R)

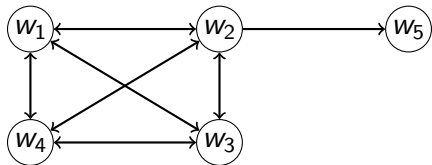
Если $(w, w') \in R$, то w' — мир, альтернативный для w (w -альтернатива)

Модель Крипке — это интерпретация для формул модальной логики

Модальные логики: семантика Крипке

Например,

(Var = {a})



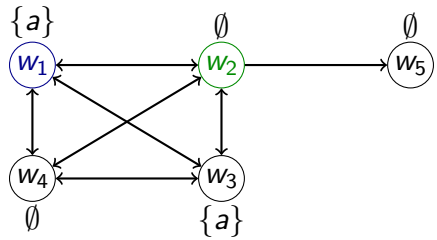
— это шкала Крипке

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models x \iff x \in \xi(w)$ ($x \in \text{Var}$)
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \& \psi \iff \mathcal{I}, w \models \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \vee \psi \iff \mathcal{I}, w \models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$

Например, ($\text{Var} = \{a\}$)



— это модель Крипке (\mathcal{I})

$\mathcal{I}, w_1 \models a$, $\mathcal{I}, w_2 \not\models a$

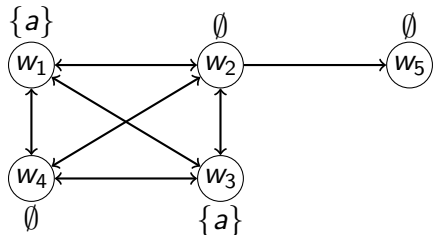
Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

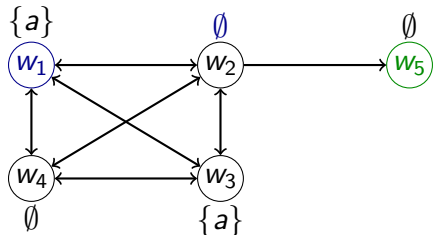
Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \Leftrightarrow$
для любой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a, \quad \mathcal{I}, w_5 \models \Box a$

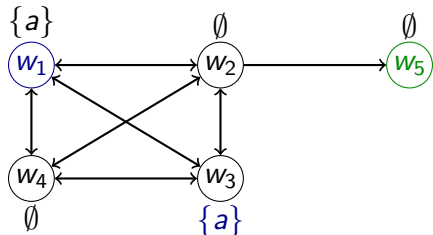
Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости \models для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Diamond \varphi \Leftrightarrow$
существует w -альтернатива w' ,
такая что верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

(Var = {a})



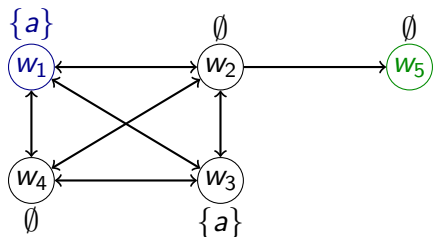
— это модель Крипке (\mathcal{I})

$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a$, $\mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$

Модальные логики: семантика Крипке

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

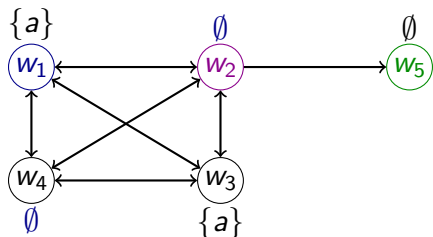
$\mathcal{I}, w_1 \models \Box \Diamond a$,

$\mathcal{I}, w_5 \models \Box \Diamond a$

Модальные логики: семантика Крипке

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке (\mathcal{I})

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \diamond \Box a$, $\mathcal{I}, w_2 \models \diamond \Box a$, $\mathcal{I}, w_5 \not\models \diamond \Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Пусть \mathcal{F} — шкала Крипке, \mathcal{I} — модель Крипке, и φ, ψ — формулы модальной логики

Тогда

- ▶ формула φ **истинна в модели** \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели \mathcal{I} верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- ▶ формула φ **истинна на шкале** \mathcal{F} ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Крипке \mathcal{J} , основанной на \mathcal{F} , верно $\mathcal{J} \models \varphi$
- ▶ формула φ **общезначима** ($\models \varphi$), если для любой шкалы \mathcal{F} верно $\mathcal{F} \models \varphi$
- ▶ формулы φ и ψ **равносильны** ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. Для любой формулы φ верно: $\diamond\varphi \sim \neg\Box\neg\varphi$

Доказательство. “Для любой альтернативы верно φ ” = “Не существует альтернативы, такой что не- φ ” ▼

Утверждение

Для любой формулы φ верно: если $\models \varphi$, то $\models \Box\varphi$

Доказательство. Если φ верно в любом мире любой модели, то φ верно и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение

Для любых формул φ, ψ верно: $\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Доказательство. Рассмотрим модель $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мир w

Предположим, что $\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Тогда

- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \rightarrow \psi)$, а значит, для каждой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi \rightarrow \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$, а значит, для каждой w -альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$ — и, по семантике связки \rightarrow , $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$, а значит, существует w -альтернатива w' , такая что $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$, что противоречит предыдущему пункту ▼

Эпистемические логики

Смыслом модальностей могут определяться и другие законы

Для примера рассмотрим *эпистемическую логику*, в которой \Box имеет смысл “я знаю”, а \Diamond — “я допускаю”

Если “я” — **идеальный познающий субъект**, то совокупность моих знаний и допущений должна подчиняться, помимо общих законов модальных логик, *как минимум* таким законам:

- ▶ мои знания верны

$$\Box\varphi \rightarrow \varphi \quad (\text{закон адекватности знания})$$

- ▶ мне известно, что именно я знаю

$$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi \quad (\text{закон позитивной интроспекции})$$

- ▶ мне известно, что именно я **не** знаю

$$\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi \quad (\text{закон негативной интроспекции})$$

Эпистемические логики

Рассмотрим произвольную шкалу Крипке $\mathcal{F} = (W, R)$

Утверждение

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$ верно для любой формулы φ

\Leftrightarrow

отношение R рефлексивно

Утверждение

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ верно для любой формулы φ

\Leftrightarrow

отношение R транзитивно

Утверждение. Пусть отношение R транзитивно. Тогда

$\mathcal{F} \models \neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$ верно для любой формулы φ

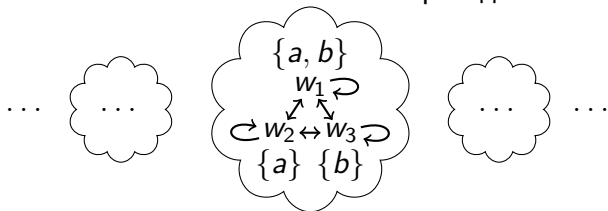
\Leftrightarrow

отношение R симметрично

Доказательство. Самостоятельно

Эпистемические логики

Следствие: модель Крипке идеального познающего субъекта — это модель \mathcal{I} , миры которой разбиваются на *классы эквивалентности* по отношению переходов:

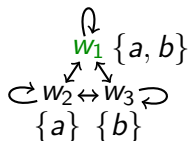


Пояснение

Пусть w_1 — мир достоверных фактов

Тогда мирами класса эквивалентности w_1 описываются всевозможные допущения об истинности высказываний, не противоречащие знаниям познающего субъекта

Эпистемические логики



Пояснение

- ▶ a — это факт, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \models a$$

- ▶ ..., но моих знаний недостаточно, чтобы это утверждать, ...

$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a$$

- ▶ ..., но и опровергнуть a я тоже не могу

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a$$

- ▶ а что я точно знаю, так это то, что если не a , то обязательно b

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box(\neg a \rightarrow b)$$

Эпистемические логики

В более широкой и “полезной” постановке задачи познающий субъект

- ▶ может изменять мир согласно своим скромным возможностям
- ▶ может взаимодействовать с другими такими же субъектами, обмениваясь с ними знаниями
- ▶ пытается достичь некоторой цели, кооперируясь или конкурируя с другими субъектами

Таких взаимодействующих субъектов принято называть **агентами**, а совокупность всех агентов с описанием их возможностей и целей — **мультиагентной системой**

Каждому агенту a такой системы присваивается своя эпистемическая модальность \square_a : “агент a знает, что ...”

Иногда рассматриваются и групповые модальности — например, \square_{\forall} : “все агенты знают, что ...”

Эпистемические логики

Пример: задача о трёх мудрецах

Король призвал трёх мудрецов, показал им три чёрные шапки и две белые, завязал глаза, надел на мудрецов чёрные шапки, спрятал белые и развязал глаза

“Из пяти шапок, что я показал, три надеты на вас”, —
сказал король

“Знаете ли вы, какая на вас шапка?” — спросил король

“Нет, не знаю”, хором ответили мудрецы

“Знаете ли вы, какая на вас шапка?” — повторил король

“Нет, не знаю”, хором ответили мудрецы

“Знаете ли вы, какая на вас шапка?” — ещё раз повторил король

“Да, чёрная”, хором ответили мудрецы

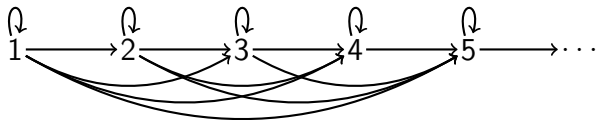
Как может выглядеть ход рассуждений мудрецов в терминах эпистемической логики?

Темпоральные логики

Темпоральная логика — это модальная логика (или её расширение), в которой модальности \square и \diamond имеют значения “всегда [в будущем]” и “когда-нибудь [в будущем]”

Шкалой Крипке темпоральной логики описывается течение времени: миры — это **моменты времени**, а отношение достижимости миров — это порядок моментов времени

Пример: шкала дискретного линейного отсчёта времени



Пропозициональные переменные формул темпоральных логик — это **атомарные высказывания**, истинность которых может изменяться с течением времени

Темпоральные логики

Время может истолковываться по-разному, и в зависимости от истолкования (*то есть точного вида рассматриваемых шкал*) могут получаться разные темпоральные логики, например:

- ▶ **Логика линейного времени**

(LTL, Linear Temporal Logic)

- ▶ время дискретно линейно течёт вперёд
- ▶ формула — это свойство линейного развития событий

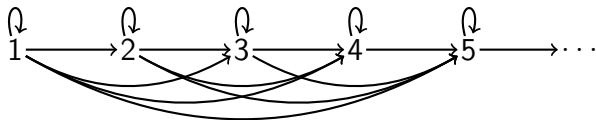
- ▶ **Логика деревьев вычислений**

(CTL, Computation Tree Logic)

- ▶ время — это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
- ▶ формула — это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

Логика линейного времени (LTL)

LTL-шкала — это естественно упорядоченный натуральный ряд (моментов времени):



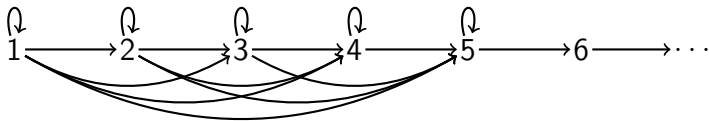
LTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на LTL-шкале

Модальности \square и \diamond в LTL обозначаются символами **G** (Globally) и **F** (Future)

К ним добавляются и другие модальности — о них и об этой логике в целом подробнее будет рассказано в заключительных лекциях

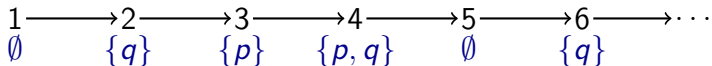
Логика линейного времени (LTL)

Пример:



Логика линейного времени (LTL)

Пример: рассмотрим такую LTL-интерпретацию \mathcal{I} с оценкой элементарных событий, повторяющейся с периодом 4:

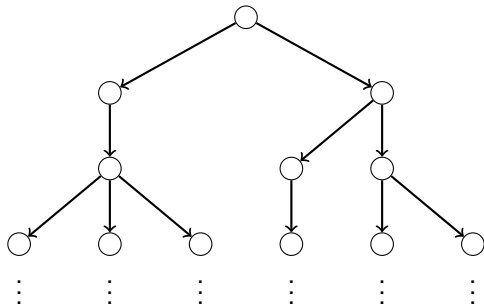


Справедливы следующие соотношения:

- ▶ в момент времени 1 неверно p и верно $p \rightarrow q$
 $\mathcal{I}, 1 \not\models p, \quad \mathcal{I}, 1 \models p \rightarrow q$
- ▶ p иногда бывает верным, но не всегда
 $\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{F}p, \quad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{G}p$
- ▶ p бесконечно часто бывает верным, но нет такого момента, начиная с которого p всегда верно
 $\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{GF}p, \quad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{FG}p$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Течение времени в CTL описывается ориентированным деревом, содержащим только бесконечные ветви:



CTL-шкала — это шкала Крипке, являющаяся рефлексивно-транзитивным замыканием такого дерева

CTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на CTL-шкале

Логика деревьев вычислений (CTL)

В логике деревьев вычислений модальности \square , \diamond обозначаются записями **AG** и **EF**

CTL содержит и другие модальности — например, **EG** и **AF**

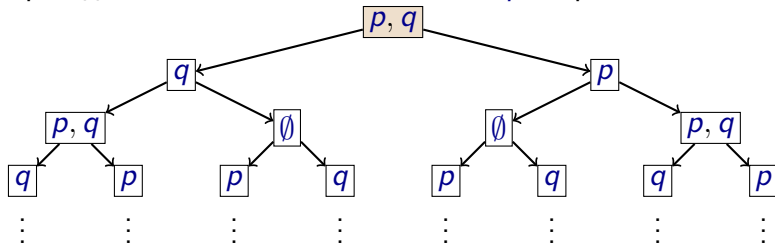
Значение этих модальностей определяется так:

- ▶ $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$ существует ветвь дерева, исходящая из v , такая что для каждой вершины v' этой ветви верно $\mathcal{I}, v' \models \varphi$
- ▶ $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$ в каждой ветви дерева, исходящей из v , существует вершина v' , такая что $\mathcal{I}, v' \models \varphi$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию \mathcal{I}

(при переходе влево изменяется значение p , вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- ▶ в начале развития событий верно p , но события могут развиваться так, что p станет неверным

$$\mathcal{I}, \square \models p, \quad \mathcal{I}, \square \models \mathbf{EF}\neg p$$

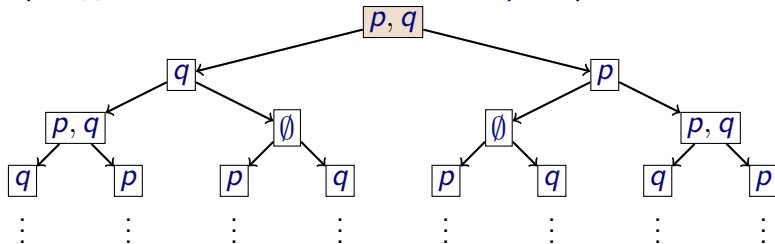
- ▶ есть вариант развития событий, при котором p всегда остаётся верным, но не для всех вариантов это так

$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{EG}p, \quad \mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию \mathcal{I}

(при переходе влево изменяется значение p , вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- ▶ как бы ни развивались события, всегда есть способ в дальнейшем сделать p и q одновременно верными

$$\mathcal{I}, \blacksquare \models \mathbf{AGEF}(p \& q)$$

- ▶ утверждение “после возникновения события p обязательно рано или поздно возникает событие q ” неверно

$$\mathcal{I}, \blacksquare \not\models \mathbf{AG}(p \rightarrow \mathbf{AF}q)$$