

Лекция 7. Графы. Числа Рамсея. Верхняя и нижняя оценки чисел Рамсея.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Лекции по «Дискретным моделям».
Магистратура, 1-й курс,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Числа Рамсея

Граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ называется **дополнительным** к графу $G = (V, E)$, если \bar{E} содержит все те ребра, которых нет в E , т.е. $\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}$.

Число $R(m, n)$ — такое наименьшее целое число x , что для любого графа G с x вершинами:
либо в G найдется подграф K_m ,
либо в \bar{G} найдется подграф K_n .

Числа Рамсея

Раскраской ребер графа $G = (V, E)$ в два цвета назовем произвольное отображение $\rho : E \rightarrow \{1, 2\}$.

Число $R(m, n)$ — такое наименьшее число x , что при любой раскраске ребер полного графа K_x в два цвета либо в нем найдется подграф K_m с ребрами цвета 1, либо в нем найдется подграф K_n с ребрами цвета 2.

Задача о знакомых

Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Задача о знакомых

Предложение 1. Если G — граф с шестью вершинами, то либо G , либо \bar{G} содержит треугольник.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ и $v \in V$ — произвольная вершина.

1. Пусть в графе G вершина v смежна с какими-то тремя вершинами $v_1, v_2, v_3 \in V$.

Если какие-то две вершины из v_1, v_2, v_3 смежны в графе G , то вместе с вершиной v они образуют треугольник.

Если все три вершины v_1, v_2, v_3 не смежны в графе G , то они образуют треугольник в графе \bar{G} .

2. Если в графе G вершина v смежна не более, чем с двумя вершинами, то повторим рассуждения для графа \bar{G} .



Верхняя оценка числа Рамсея

Теорема 1. При $m, n \geq 2$ справедливо неравенство

$$R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1),$$

при этом если оба числа $R(m - 1, n)$, $R(m, n - 1)$ — четные, то неравенство строгое.

Доказательство.

Положим $x = R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$.

Рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_x в цвета 1 и 2.

Из произвольной вершины v графа K_x исходит либо $R(m - 1, n)$ ребер цвета 1, либо $R(m, n - 1)$ ребер цвета 2.

Случаи аналогичны, рассмотрим один из них.

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство.

1. Пусть из вершины v графа K_x исходит $R(m-1, n)$ ребер цвета 1.

Положим V — множество из $y = R(m-1, n)$ концов этих ребер. Множество V вместе с соединяющими их ребрами образуют полный подграф K_y графа K_x .

По определению числа $R(m-1, n)$ в графе K_y найдется либо полный подграф K_n с ребрами цвета 2, либо полный подграф K_{m-1} с ребрами цвета 1.

В первом случае этот полный подграф K_n с ребрами цвета 2 есть и в графе K_x .

Во втором случае добавим к этому полному подграфу K_{m-1} вершину v и получим полный подграф K_m с ребрами цвета 1 в графе K_x .

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство.

2. Пусть оба числа $R(m-1, n)$, $R(m, n-1)$ — четные.
Положим $z = R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$. Рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_z в цвета 1 и 2. Если из некоторой вершины v графа K_z исходит либо $R(m-1, n)$ ребер цвета 1, либо $R(m, n-1)$ ребер цвета 2, то искомый полный граф найдется.
Пусть из каждой вершины v графа K_z исходит в точности $R(m-1, n) - 1$ ребер цвета 1.
Тогда рассмотрим подграф H графа K_z , образованный всеми вершинами графа K_z и всеми ребрами цвета 1.
В графе H нечетное число вершин $z = R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$, причем степень каждой вершины — нечетна (равна $R(m-1, n) - 1$), чего не может быть.



Верхняя оценка числа Рамсея

Следствие 1.1. При $m, n \geq 1$ справедливо неравенство

$$R(m, n) \leq C_{m+n-1}^{m-1}.$$

Доказательство: индукция по m .

Базис индукции $m = 1$ верен.

Индуктивный переход: по теореме получаем

$$\begin{aligned} R(m, n) &\leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \leq \\ &\leq C_{m+n-2}^{m-2} + C_{m+n-2}^{m-1} = C_{m+n-1}^{m-1}. \end{aligned}$$



Некоторые оценки чисел Рамсея

Верны равенства $R(1, n) = 1$, $R(2, n) = n$.

Поэтому получаем:

$$R(3, 3) \leq R(2, 3) + R(3, 2) = 3 + 3 = 6;$$

$$R(3, 4) \leq R(2, 4) + R(3, 3) \leq 4 + 6 = 10;$$

$$R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) \leq 5 + 10 = 15;$$

$$R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) \leq 10 + 10 = 20.$$

Нижняя оценка числа Рамсея

Теорема 2 (Эрдеша). При $k \geq 2$ справедливо неравенство

$$R(k, k) \geq 2^{k/2}.$$

Доказательство. Рассмотрим $k \geq 3$, т.к. $R(2, 2) = 2$.

Оценим долю $\gamma(p, k)$ графов с p помеченными вершинами, в которых найдется полный подграф с k вершинами.

Возможных ребер в графах с p вершинами ровно C_p^2 , откуда графов с p вершинами в точности $2^{C_p^2}$.

Выбрать k вершин, образующих полный подграф, из p вершин можно C_p^k способами.

Оставшиеся $C_p^2 - C_k^2$ ребра могут быть проведены произвольно.

Поэтому число графов с p вершинами, содержащих полный подграф с k вершинами, не более $C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}$.

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство. Значит,

$$\gamma(p, k) \leq \frac{C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}}{2^{C_p^2}} = \frac{p^k}{k! 2^{C_k^2}}.$$

При $p < 2^{k/2}$ получаем

$$\gamma(p, k) < \frac{2^{k^2/2}}{k! 2^{k^2/2 - k/2}} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство.

Разобьем все графы с p вершинами на пары (G, \bar{G}) .

Тогда по доказанному выше при $p < 2^{k/2}$ в этом разбиении найдется такая пара графов (G, \bar{G}) , что ни G , ни \bar{G} не содержат полный подграф с k вершинами.

Поэтому $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.



Нижняя оценка числа Рамсея

Следствие 2.1. При $m, n \geq 2$ справедливо неравенство

$$R(m, n) \geq 2^{\min(m,n)/2}.$$

Известные числа Рамсея

Верны равенства $R(1, n) = 1$, $R(2, n) = n$, $R(m, n) = R(n, m)$.

Числа Рамсея $R(m, n)$:

$m \setminus n$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18			

Задачи

1. Найти значение числа Рамсея:

1) $R(2, 2)$;

2) $R(2, 3)$;

3) $R(2, 4)$;

4) $R(2, 5)$.

Ответ обосновать.

2. Обосновать, что:

1) $R(3, 3) > 5$;

2) $R(3, 4) > 8$.

Конец лекции 7