Математическая логика и теория алгоритмов

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 3.

Выполнимые и общезначимые формулы.
Модели. Логическое следование.
Проблема общезначимости.
Семантические таблицы.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \ldots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется истинной в интерпретации I, если для любого набора элементов $d_1, \ldots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется истинной в интерпретации I, если для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой, если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется истинной в интерпретации I, если для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой, если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется общезначимой (или тождественно истинной), если эта формула истинна в любой интерпретации.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется истинной в интерпретации I, если для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой, если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется общезначимой (или тождественно истинной), если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется противоречивой (или невыполнимой), если она не является выполнимой.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

Выполнимые формулы:
$P(x_1)\&\neg P(x_2), \quad \forall x P(x) \to \exists x P(x), \quad \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

Выполнимые формулы:

$P(x_1)\&\neg P(x_2), \quad \forall x P(x) \to \exists x P(x), \quad \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

$I_1 \;:\; D_I = \{d_1, d_2\},\; \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true},\; \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false};$

$I_2 \;:\; D_I = \{d\},\; \bar{\mathbf{P}}(d) = \mathbf{true}.$

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

Выполнимые формулы:

$P(x_1)\&\neg P(x_2), \quad \forall x P(x) \to \exists x P(x), \quad \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

$I_1 \ : \ D_I = \{d_1, d_2\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false};$

$I_2 \ : \ D_I = \{d\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d) = \mathbf{true}.$

$I_1 \models \ P(x_1)\&\neg P(x_2)[d_1, d_2],$

$I_1 \models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x),$

$I_2 \models \ \exists x P(x) \to \forall x P(x).$

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

Выполнимые формулы:

$P(x_1) \& \neg P(x_2), \quad \forall x P(x) \to \exists x P(x), \quad \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

$I_1 \ : \ D_I = \{d_1, d_2\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false};$

$I_2 \ : \ D_I = \{d\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d) = \mathbf{true}.$

$I_1 \models \ P(x_1) \& \neg P(x_2)[d_1, d_2],$

$I_1 \models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x),$

$I_2 \models \ \exists x P(x) \to \forall x P(x).$

Формулы $P(x_1) \& \neg P(x_2)$, $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ необщезначимые.

$I_2 \not\models \ P(x_1) \& \neg P(x_2)[d, d], \qquad I_1 \not\models \ \exists x P(x) \to \forall x P(x).$

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

Выполнимые формулы:
$P(x_1)\&\neg P(x_2), \quad \forall x P(x) \to \exists x P(x), \quad \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.
$I_1 \ : \ D_I = \{d_1, d_2\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false};$
$I_2 \ : \ D_I = \{d\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d) = \mathbf{true}.$

$I_1 \models \ P(x_1)\&\neg P(x_2)[d_1, d_2],$
$I_1 \models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x),$
$I_2 \models \ \exists x P(x) \to \forall x P(x).$

Формулы $P(x_1)\&\neg P(x_2), \ \exists x P(x) \to \forall x P(x)$ необщезначимые.
$I_2 \not\models \ P(x_1)\&\neg P(x_2)[d, d], \qquad I_1 \not\models \ \exists x P(x) \to \forall x P(x).$

Формула $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ является общезначимой.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

Выполнимые формулы:
$P(x_1)\&\neg P(x_2)$, $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$, $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

$I_1 \ : \ D_I = \{d_1, d_2\}$, $\bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}$, $\bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$;

$I_2 \ : \ D_I = \{d\}$, $\bar{\mathbf{P}}(d) = \mathbf{true}$.

$I_1 \models P(x_1)\&\neg P(x_2)[d_1, d_2]$,

$I_1 \models \forall x P(x) \to \exists x P(x)$,

$I_2 \models \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

Формулы $P(x_1)\&\neg P(x_2)$, $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ необщезначимые.

$I_2 \not\models P(x_1)\&\neg P(x_2)[d, d]$, $I_1 \not\models \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

Формула $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ является общезначимой.

Но почему? И как в этом убедиться?

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Выполнимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний. Каждая выполнимая формула несет определенную информацию.

Выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний. Каждая выполнимая формула несет определенную информацию.

Общезначимые формулы — это трюизмы, банальности, тавтологии, не несущие никакой информации.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Выполнимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний. Каждая выполнимая формула несет определенную информацию.

Общезначимые формулы — это трюизмы, банальности, тавтологии, не несущие никакой информации.

Какую же роль играют общезначимые формулы?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модели. Логическое следствие

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ.

Пример

$I \;:\; D_I = \{d_1, d_2\},\; \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true},\; \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ.

Пример

$I \ : \ D_I = \{d_1, d_2\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

Замечание

А какая интерпретация является моделью пустого множества формул $\Gamma = \emptyset$?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ.

Пример

$I \;:\; D_I = \{d_1, d_2\},\; \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true},\; \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

Замечание

А какая интерпретация является моделью пустого множества формул $\Gamma = \emptyset$?

Правильный ответ: любая интерпретация .

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ.

Пример

$I \; : \; D_I = \{d_1, d_2\}, \; \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \textbf{true}, \; \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \textbf{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

Замечание

А какая интерпретация является моделью пустого множества формул $\Gamma = \emptyset$?

Правильный ответ: любая интерпретация . Почему ?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — «x — квадрат»;

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — «x — квадрат»;

$S(x)$ — «x — шар»;

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — «x — квадрат»;

$S(x)$ — «x — шар»;

$B(x)$ — «x — черный предмет»;

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — «x — квадрат»;

$S(x)$ — «x — шар»;

$B(x)$ — «x — черный предмет»;

$W(x)$ — «x — белый предмет»;

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — «x — квадрат»;

$S(x)$ — «x — шар»;

$B(x)$ — «x — черный предмет»;

$W(x)$ — «x — белый предмет»;

$U(x, y)$ — «предмет x лежит под предметом y».

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

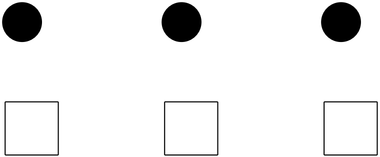
$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Модель I

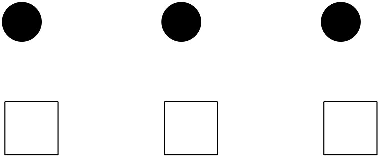


МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Модель I



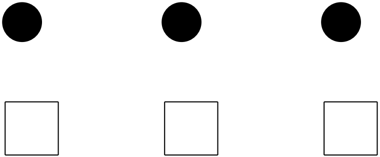
$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Модель I



$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

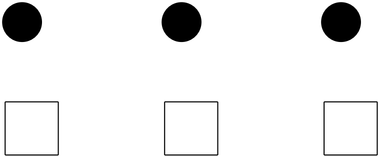
Каждый предмет является белым кубом
и лежит под каким-то черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Модель I



$$\cancel{\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))}$$

Каждый предмет является белым кубом
и лежит под каким-то черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

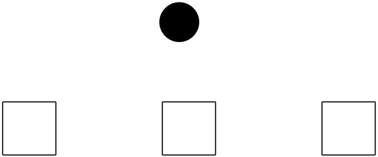
$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель I

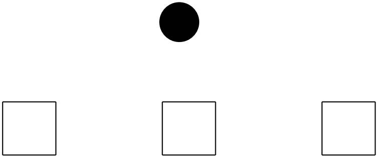


МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x \; (W(x) \; \& \; C(x) \; \& \; \forall y \; (B(y) \; \& \; S(y) \; \to \; U(x, y)))$$

Модель I



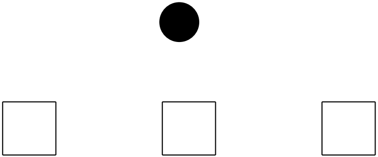
$$\exists x \; (W(x) \; \& \; C(x) \to \forall y \; (B(y) \; \& \; S(y) \; \to \; U(x, y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \to\ U(x,y)))$$

Модель I



$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x) \to \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \to\ U(x,y)))$$

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель J

$$\cancel{\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x) \rightarrow \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))}$$

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Общий принцип правильного построения формул.

Каждый предмет, наделенный атрибутом A, обладает свойством B:

$$\forall x\ (A(x)\ \rightarrow\ B(x))$$

Некоторый предмет, наделенный атрибутом A, обладает свойством B:

$$\exists x\ (A(x)\ \&\ B(x))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определение

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется логическим следствием множества предложений (базы знаний) Γ, если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ, т. е. для любой интерпретации I верно

$$I \models \Gamma \;\Rightarrow\; I \models \varphi$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определение

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется логическим следствием множества предложений (базы знаний) Γ, если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ, т. е. для любой интерпретации I верно

$$I \models \Gamma \;\Rightarrow\; I \models \varphi$$

Логические следствия — это «производные» знания, которые неизбежно сопутствуют «базовым» знаниям Γ, находятся в причинно-следственной зависимости от предложений Γ. Одна из главных задач (и одновременно наиболее характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это извлечение логических следствий из баз знаний.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

А какие формулы являются логическими следствиями пустой базы знаний $\Gamma = \emptyset$?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

А какие формулы являются логическими следствиями пустой базы знаний $\Gamma = \emptyset$? Правильный ответ: общезначимые .

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

А какие формулы являются логическими следствиями пустой базы знаний $\Gamma = \emptyset$? Правильный ответ: общезначимые .

Поэтому для обозначения общезначимости формулы φ будем использовать запись $\models \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Вот подходящая логическая задача для проверки выразительных возможностей нашего формализма.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Вот подходящая логическая задача для проверки выразительных возможностей нашего формализма.

Известно, что

- Даша любит Сашу,

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Вот подходящая логическая задача для проверки выразительных возможностей нашего формализма.

Известно, что

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Вот подходящая логическая задача для проверки выразительных возможностей нашего формализма.

Известно, что

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Вот подходящая логическая задача для проверки выразительных возможностей нашего формализма.

Известно, что

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша.

Любима ли Даша?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Вначале сформулируем задачу на языке логики предикатов.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Вначале сформулируем задачу на языке логики предикатов.

Сформируем алфавит, состоящий из:

- Константы *Даша* ,
- Константы *Саша* ,
- Константы *Паша* ,
- Константы *пиво* ,
- Предикатного символа $L^{(2)}$: «$L(x, y)$ — x любит y».

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \; L(\text{\textit{Даша}}, \text{\textit{Саша}}),$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \ L(\textit{Даша}, \textit{Саша}),$
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : \ L(\textit{Саша}, \textit{пиво}),$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \ L(\textit{Даша}, \textit{Саша})$,
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : \ L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \ \& \ \varphi_4$,

  $\varphi_3 : \ L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$

  $\varphi_4 : \ \forall x \ (\exists y \ (L(\textit{Паша}, y) \ \& \ L(x, y)) \ \rightarrow \ L(\textit{Паша}, x))$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1: \ L(\textit{Даша}, \textit{Саша})$,
- а Саша любит пиво: $\varphi_2: \ L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \ \& \ \varphi_4$,

  $\varphi_3: \ L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$

  $\varphi_4: \ \forall x \ (\exists y \ (L(\textit{Паша}, y) \ \& \ L(x, y)) \ \rightarrow \ L(\textit{Паша}, x))$.

Любима ли Даша? : $\varphi_0: \ \exists z \ L(z, \textit{Даша})$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \ L(\textit{Даша}, \textit{Саша})$,
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : \ L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \ \& \ \varphi_4$,

  $\varphi_3 : \ L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$

  $\varphi_4 : \ \forall x \ (\exists y \ (L(\textit{Паша}, y) \ \& \ L(x, y)) \ \rightarrow \ L(\textit{Паша}, x))$.

Любима ли Даша? : $\varphi_0 : \ \exists z \ L(z, \textit{Даша})$.

Формулировка задачи.

Проверить, верно ли, что $\{\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \varphi_4\} \models \varphi_0$.

Модели. Логическое следствие

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Модели. Логическое следствие

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Если $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$, то $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$, т. е. I — модель для Γ. Поскольку $\Gamma \models \varphi$, получаем $I \models \varphi$.
Значит, $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$.

Если $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_i$, $1 \le i \le n$, т. е. I — модель для Γ. Поскольку $\Gamma \models \varphi$, получаем $I \models \varphi$.
Значит, $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$.

Таким образом, для любой интерпретации I имеет место $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $\psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi.$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$**,** $\varphi \in CForm$**. Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \le i \le n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$.

Так как $\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула, имеет место $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$**,** $\varphi \in CForm$**. Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$.

Так как $\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула, имеет место $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $I \models \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$.

Так как $\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула, имеет место $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $I \models \varphi$.

Так как I — произвольная модель для Γ, приходим к заключению $\Gamma \models \varphi$.

$\square$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

Практически важно уметь определять эти каналы и настраивать их на извлечение нужных знаний.

- База знаний — множество предложений Γ;
- Запрос к базе знаний — предложение φ;
- Получение ответа на запрос — проверка логического следствия $\Gamma \models \varphi$.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

Практически важно уметь определять эти каналы и настраивать их на извлечение нужных знаний.

- База знаний — множество предложений Γ;
- Запрос к базе знаний — предложение φ;
- Получение ответа на запрос — проверка логического следствия $\Gamma \models \varphi$.

Если Γ — конечное множество, то проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости формулы

$$\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Таким образом, возникает проблема общезначимости формул:

Для заданной формулы φ проверить ее общезначимость:

$$\models \varphi?$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Утверждение.

Для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ верно, что

1. $\models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$;
2. $$\begin{array}{l} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — \textbf{выполнимая}} \\ \iff \\ \exists x_1 \ldots \exists x_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — \textbf{выполнимая}}; \end{array}$$
3. $$\begin{array}{l} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — \textbf{выполнима в любой интерпретации}} \\ \iff \\ \models \exists x_1 \ldots \exists x_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Утверждение.

Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ верно, что

1. $\models \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \models \forall x_1 \dots \forall x_n \, \varphi(x_1, \dots, x_n)$;
2. $$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнимая} \\ \iff & \\ & \exists x_1 \dots \exists x_n \, \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнимая;} \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнима в любой интерпретации} \\ \iff & \\ & \models \exists x_1 \dots \exists x_n \, \varphi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Доказательство

Самостоятельно. Это просто.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Как же решать проблему общезначимости

$$\models \varphi \quad ?$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Как же решать проблему общезначимости

$$\models \varphi \quad ?$$

Может быть проверять все интерпретации по очереди ?

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Нет, такой подход заведомо обречен на неудачу.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Нет, такой подход заведомо обречен на неудачу. Почему?
Потому, что верно

Утверждение.

Существует такая замкнутая формула φ, которая истинна в любой интерпретации I с конечной предметной областью D_I, но не является общезначимой.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Нет, такой подход заведомо обречен на неудачу. Почему?
Потому, что верно

Утверждение.

Существует такая замкнутая формула φ, которая истинна в любой интерпретации I с конечной предметной областью D_I, но не является общезначимой.

$$\forall x \neg R(x,x) \;\&\; \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \& R(y,z) \;\rightarrow\; R(x,z)) \;\rightarrow\; \exists x \forall y \neg R(x,y).$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект **y** — начальник субъекта **x**»;

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект **y** — начальник субъекта **x**»;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект **y** — начальник субъекта **x**»;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

2). $\forall x \forall y \forall z \ (R(x, y) \& R(y, z) \ \rightarrow \ R(x, z))$: «начальник моего начальника — мой начальник»;

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект **y** — начальник субъекта **x**»;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

2). $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \& R(y, z)\ \rightarrow\ R(x, z))$: «начальник моего начальника — мой начальник»;

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$: «кто-то никому не подчиняется».

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект **y** — начальник субъекта **x**»;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

2). $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \& R(y, z) \ \rightarrow \ R(x, z))$: «начальник моего начальника — мой начальник»;

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$: «кто-то никому не подчиняется».

В каждой компании с конечным множеством сотрудников, в которой действуют законы 1) и 2), выполняется и закон 3).

Значит, наша формула истинна во всех интерпретациях с конечной предметной областью.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

$R(x, y)$: «натуральное число **y** больше натурального числа **x**»

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

$R(x, y)$: «натуральное число **y** больше натурального числа **x**»

1). $\forall x \neg R(x, x)$;

2). $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \& R(y, z)\ \rightarrow\ R(x, z))$;

выполняются на множестве натуральных чисел.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

$R(x, y)$: «натуральное число **y** больше натурального числа **x**»

1). $\forall x \neg R(x, x)$;

2). $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \& R(y, z)\ \rightarrow\ R(x, z))$;

выполняются на множестве натуральных чисел.

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$ на множестве натуральных чисел не выполняется: неверно, что существует максимальное натуральное число.

$\square$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Не только перебор всех интерпретаций, но даже проверку истинности формулы в интерпретации с бесконечной предметной областью осуществить затруднительно.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Не только перебор всех интерпретаций, но даже проверку истинности формулы в интерпретации с бесконечной предметной областью осуществить затруднительно.

Значит, необходимо придумать более изощренный способ проверки.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) \ \rightarrow \ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x)) \ .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x))\ \rightarrow\ (\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \to\ R(x)) \ \to\ (\forall x\ P(x) \ \to\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\Big|\ I \not\models \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) \ \rightarrow \ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x)) \ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \varphi \\ I \models \ \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) & I \not\models \ \forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \varphi \\ I \models \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)) & I \not\models \forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x) \\ I \models \forall x\ P(x) & I \not\models \forall x\ R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow\ R(x)) \ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \varphi \\ I \models\ \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x)) & I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x) \\ I \models\ \forall x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ R(x) \\ & I \not\models\ R(x)[d] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow\ R(x)) \ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l}
 & I \not\models \varphi \\
I \models \forall x\ (P(x) \ \rightarrow\ R(x)) & I \not\models \ \forall x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ R(x) \\
I \models \ \forall x\ P(x) & I \not\models \ \forall x\ R(x) \\
 & I \not\models \ R(x)[d] \\
I \models (P(x) \ \rightarrow R(x))[d] &
\end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x\,P(x) \rightarrow \forall x\,R(x))\,.$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l}
 & I \not\models \varphi \\
I \models \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)) & I \not\models \forall x\,P(x) \rightarrow \forall x\,R(x) \\
I \models \forall x\,P(x) & I \not\models \forall x\,R(x) \\
 & I \not\models R(x)[d] \\
I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d] & \\
I \models P(x)[d] &
\end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) \ \rightarrow \ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x)) \ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

	$I \not\models \varphi$
$I \models \ \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x))$	$I \not\models \ \forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x)$
$I \models \ \forall x\ P(x)$	$I \not\models \ \forall x\ R(x)$
	$I \not\models \ R(x)[d]$
$I \models (P(x) \ \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow\ R(x)) \ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ R(x)) \ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

	$I \not\models \varphi$
$I \models\ \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x))$	$I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x)$
$I \models\ \forall x\ P(x)$	$I \not\models\ \forall x\ R(x)$
	$I \not\models\ R(x)[d]$
$I \models (P(x)\ \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

Значит, $\models \varphi$.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x \ P(x) \ \rightarrow \ \forall x \ P(x) \ .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x)\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x)\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\Big|\ I \not\models \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x)$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x)\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{r|l} & I \not\models \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x) \\ I \models\ \exists x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ P(x)\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{r|l}
 & I \not\models \exists x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ P(x) \\
I \models \ \exists x\ P(x) & I \not\models \ \forall x\ P(x) \\
I \models \ P(x)[d_1] &
\end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x)\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{r|l}
 & I \not\models \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x) \\
I \models\ \exists x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \\
I \models\ P(x)[d_1] & \\
 & I \not\models\ P(x)[d_2]
\end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x)\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{r|l} & I \not\models \exists x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x) \\ I \models\ \exists x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \\ I \models\ P(x)[d_1] & \\ & I \not\models\ P(x)[d_2] \end{array}$$

Противоречия нет.

$I = \langle D_I, \overline{Pred}\rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$,

$I \not\models \varphi$.

Следовательно, $\not\models \varphi$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

Семантические таблицы

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

- Общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель.

Семантические таблицы

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

- Общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель.
- Контрмодель строим, указывая, какие формулы должны в ней выполняться, а какие нет. Требования (не)выполнимости формул, предъявляемые к контрмодели, сводим в таблицу и последовательно их уточняем.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

- Общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель.
- Контрмодель строим, указывая, какие формулы должны в ней выполняться, а какие нет. Требования (не)выполнимости формул, предъявляемые к контрмодели, сводим в таблицу и последовательно их уточняем.
- Если требования, которые предъявляются к контрмодели, оказываются несовместными, значит, проверяемая формула неопровержима, т. е. общезначима.

Семантические таблицы

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, $\Gamma, \Delta\ \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, $\Gamma, \Delta\ \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, $\Gamma, \Delta\ \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.
Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ.
Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$ называется выполнимой , если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \dots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

Семантические таблицы

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, $\Gamma, \Delta\ \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$ называется выполнимой , если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

- $I \models\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ для любой формулы φ, $\varphi \in \Gamma$,

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, $\Gamma, \Delta\ \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$ называется выполнимой , если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \dots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

- $I \models\ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы φ, $\varphi \in \Gamma$,
- $I \not\models\ \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы ψ, $\psi \in \Delta$,

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Примеры

Семантическая таблица

$$T = \langle \{\exists x\, P(x),\ \neg P(y)\} \ ; \ \{\forall x P(x),\ P(x) \,\&\, \neg P(x)\} \rangle$$

выполнима. Ее выполнимость подтверждает интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Pred} \rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$, и набор d_1, d_2 значений свободных переменных $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Семантические таблицы

Примеры

Семантическая таблица

$$T = \langle\ \{\exists x\ P(x),\ \neg P(y)\}\ ;\ \{\forall x P(x),\ P(x)\ \&\ \neg P(x)\}\ \rangle$$

выполнима. Ее выполнимость подтверждает интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Pred}\rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$, и набор d_1, d_2 значений свободных переменных $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Семантическая таблица

$$T = \langle\ \emptyset\ ;\ \{\forall x \exists y R(x,y)\ \rightarrow\ \exists y \forall x R(x,y)\}\ \rangle$$

невыполнима. Почему?

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Теорема (о табличной проверке общезначимости)

$\models \varphi \iff$ таблица $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ невыполнима.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Теорема (о табличной проверке общезначимости)

$$\models \varphi \iff \text{таблица } T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle \text{ невыполнима.}$$

Доказательство. $\models \varphi \iff$ для любой интерпретации I и для любого набора $d_1, \dots, d_n \in D_I$ значений свободных переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n] \iff$ таблица $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ невыполнима ни в одной интерпретации.

$\square$

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Семантические таблицы

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из **атомарных** формул, называется атомарной .

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из **атомарных** формул, называется атомарной .

Утверждение

Незакрытая атомарная таблица выполнима.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из **атомарных** формул, называется атомарной .

Утверждение

Незакрытая атомарная таблица выполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ к закрытым таблицам.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ к закрытым таблицам.

Доказательства такого вида называются логическим выводом . Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется табличным .

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ к закрытым таблицам.

Доказательства такого вида называются логическим выводом .
Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется табличным .

Чтобы табличный вывод был корректным, правила преобразования таблиц (правила табличного вывода) должны сохранять выполнимость семантических таблиц.

Семантические таблицы

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ к закрытым таблицам.

Доказательства такого вида называются логическим выводом . Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется табличным .

Чтобы табличный вывод был корректным, правила преобразования таблиц (правила табличного вывода) должны сохранять выполнимость семантических таблиц.

Поэтому начнем с разработки правил табличного вывода и проверки их корректности.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 3.