

Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

# ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Вариант 2015 г. (гр. 318), глава 3

Москва 2015

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>3 Синтез и сложность управляющих систем</b>	<b>7</b>
§1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций. . . . .	7
§2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем. . . . .	13
§3 Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона. . . . .	21
§4 Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения. Метод Шеннона . . . . .	30
§5 Нижние мощностные оценки функции Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для функций из специальных классов . . . . .	41
§6 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ . . . . .	47

---

§7	Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ . . . . .	52
§8	Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых классов	56
§9	Синтез схем для некоторых дешифраторов и мультиплексоров. Поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ. . . . .	64
<b>Литература</b>		<b>71</b>

## Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкрет-

ное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюн-

ктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

## Глава 3

### Синтез и сложность управляющих систем

#### §1 Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ  $F$  можно реализовать некоторой его схемой  $\Sigma$ , а  $\Psi$  — какой-либо функционал сложности схем класса  $\mathcal{U}$ , то есть отображение  $\mathcal{U}$  во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности  $\Psi$  обладает свойством *монотонности*, то есть  $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$ , если  $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$ , и  $\Sigma'$  получается из  $\Sigma$  в результате удаления вершин или ребер (ср. с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность  $\Psi(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно

функционала  $\Psi$  в классе  $\mathcal{U}$  как минимальное значение величины  $\Psi(\Sigma)$  на множестве тех схем  $\Sigma$  из  $\mathcal{U}$ , которые реализуют  $F$ . При этом схема  $\Sigma$ , принадлежащая классу  $\mathcal{U}$ , которая реализует  $F$  и для которой  $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$ , называется *минимальной схемой* в классе  $\mathcal{U}$  относительно функционала  $\Psi$ . В силу монотонности функционала  $\Psi$ , минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину  $\Psi(F)$ , в том случае когда функционал  $\Psi$  совпадает с введенным в главе 2 функционалом  $L(D, R, \text{ и т. д.})$ , будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ  $F$* . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса  $\mathcal{U}$  относительно функционала сложности  $\Psi$* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  для любого из введенных классов вида  $\mathcal{U}_B^A$  (вида  $\mathcal{U}^A$ ) будем обозначать через  $\Psi_B^A(F)$  (соответственно  $\Psi^A(F)$ ), а функцию Шеннона для этого класса относительно  $\Psi$  — через  $\Psi_B^A(n)$  (соответственно  $\Psi^A(n)$ ). В обозначениях классов  $\mathcal{U}_B^C$ ,  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс  $B$  вида  $B_0$  будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей  $\Psi'(F)$  и  $\Psi''(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  в классах схем  $\mathcal{U}'$  и  $\mathcal{U}''$  соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если  $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$ . В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F)$$



и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют  $\pi$ -схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности  $L(F)$  системы ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** *Для любой функции алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f \neq 0$ , существуют формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , и  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

**Следствие 1.** *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать  $\pi$ -схемой сложности 2, а также формулой из  $\mathcal{U}^\Phi$ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

**Следствие 2.** В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

**Лемма 1.2.** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$  и  $f \neq 0$ , существуют  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$  и формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , которые реализуют  $f$  и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

*Доказательство.* В качестве  $\Sigma_f$  можно взять  $\pi$ -схему, которая получается из  $(1, 2^n)$ -КД порядка  $n$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  (рис. 1.1) в результате снятия тех его выходов, где реализу-

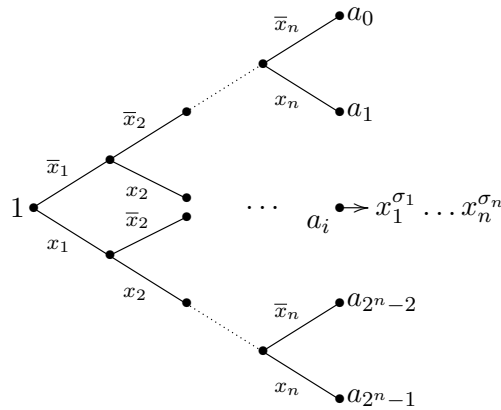


Рис. 1.1:  $(1, 2^n)$ -контактное дерево порядка  $n$

ются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ  $f$ , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула  $\mathcal{F}_f$  получается в результате моделирования построенной  $\pi$ -схемы  $\Sigma_f$  в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где  $L^-(\Sigma_f)$  — число размыкающих контактов в схеме  $\Sigma$ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка  $n$  равно  $2^n - 1$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.2)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.3)$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина  $w$  СФЭ  $\Sigma$  не достижима из ее вершины  $v$ , а СФЭ  $\Sigma'$  получается из СФЭ  $\Sigma$  в результате удаления вершины  $v$ , объявления вершины  $w$  начальной вершиной всех исходивших из  $v$  дуг и переноса в вершину  $w$  всех выходных БП, приписанных вершине  $v$ . Тогда СФЭ  $\Sigma'$  считается результатом применения к СФЭ  $\Sigma$  операции присоединения

вершины  $v$  к вершине  $w$ . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ  $\Sigma$  операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ  $\Sigma'$ , которая, очевидно, эквивалентна  $\Sigma$ .

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ  $G$ ,  $G \subseteq P_2(n)$ , через  $\vec{G}$  будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества  $G$ , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$  будем называть *универсальной системой* порядка  $n$ .

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка  $n$ , то есть ФАЛ  $\ell_n$  или ФАЛ  $\bar{\ell}_n$ ;
2. мультиплексорной ФАЛ  $\mu_n$  порядка  $n$ ;
3. дешифратора  $\vec{Q}_n$  (дизъюнктивного дешифратора  $\vec{J}_n$ ) порядка  $n$ ;
4. универсальной системы  $\vec{P}_2(n)$  порядка  $n$ .

**Лемма 1.3.** Для каждого натурального  $n$  в  $\mathcal{U}_B^C$  существует СФЭ  $U_n$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$  и сложность которой равна  $2^{2^n} - n$ .

*Доказательство.* В силу полноты базиса, в  $\mathcal{U}_B^C$  существует система формул  $\Sigma$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$ . Искомая СФЭ  $U_n$  является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна  $\Sigma$  и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ  $U_n$ , включая  $n$  ее входов, равно  $2^{2^n}$  и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

## §2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

**Лемма 2.1.** *Если ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (2.1)$$

*Если при этом ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ (каждая БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ ), то*

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k). \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ , реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  следует, что  $R(\Sigma_f) \geq n$ , и поэтому, в силу соотношений (2.6) главы 2,

$$L^C(f) \geq L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ, то схема  $\Sigma_f$  должна содержать хотя бы один ФЭ  $\neg$  и, следовательно, в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Пусть теперь  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности  $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_i$ ,  $i \in [1, n]$ , следует, что либо контакт вида  $x_i$ , либо контакт вида  $\bar{x}_i$  встречается в КС  $\Sigma_f$ , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ , то как контакт вида  $x_i$ , так и контакт вида  $\bar{x}_i$  входят в  $\Sigma_f$ , и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

*Замечание.* Нижние оценки сложности ФАЛ  $f = s_n^{[0, n-1]}$ , вытекающие из леммы 2.1, доказывают минимальность  $\pi$ -схемы, моделирующей  $\exists \overline{D} \overline{x_1} \vee \dots \vee \overline{x_n} = f$ , в классе КС и минимальность формулы  $(\overline{x_1} \dots \overline{x_n}) = f$  в классе СФЭ, что устанавливает равенства  $L^K(f) = n$  и  $L^C(f) = n$ .

**Лемма 2.2.** *Для системы  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь  $\Sigma_F$  — приведенная  $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ  $F$ . Из приведенности  $\Sigma_F$  и условий леммы вытекает, что  $\Sigma_F$  — связный граф с не менее чем  $(m+1)$  вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\vec{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

*Замечание.* В силу следствия универсальная СФЭ  $U_n$ , построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе  $\mathcal{U}_B^C$ .

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для некоторых ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

**Лемма 2.3.** *Для любого натурального  $n$  выполняются неравенства:*

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}); \quad (2.4)$$

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2; \quad (2.5)$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (2.6)$$

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (2.7)$$

*Доказательство.* В классе  $\mathcal{U}^C$  построим схемный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий первому неравенству (2.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП  $X(n)$  на группы  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ , где  $q = \lceil n/2 \rceil$ ;
2. возьмем дешифраторы  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  от БП  $x'$  и  $x''$  порядка  $q$  и  $(n - q)$  соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ , после чего конъюнктируем каждый выход  $\Sigma'$  с каждым выходом  $\Sigma''$ , а выходы всех использованных для этого  $2^n$  ФЭ  $\&$  (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Аналогичным образом строится дизъюнктивный схемный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий второму неравенству (2.4).



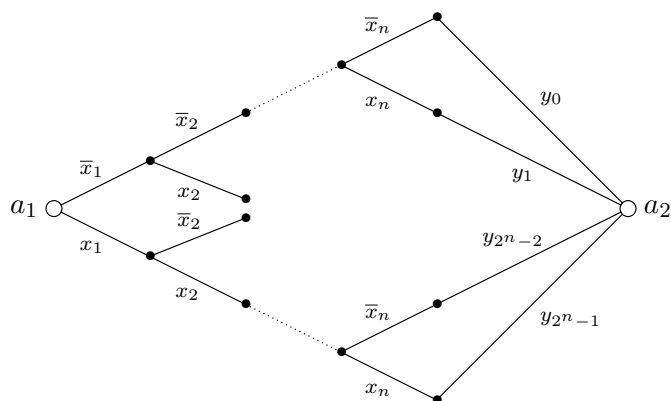


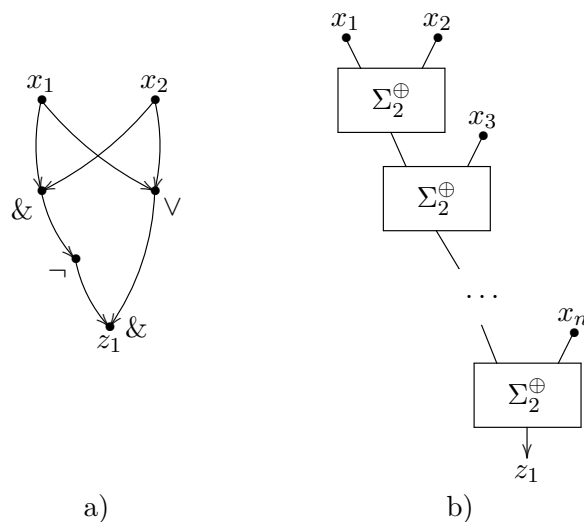
Рис. 2.1:  $\pi$ -схема для ФАЛ  $\mu_n$

Искомым контактным дешифратором порядка  $n$  является  $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рис. 1.1, а искомым контактным мультиплексором порядка  $n$  является  $\pi$ -схема, приведенная на рис. 2.1. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 1.1 и 2.1, равна  $2^{n+1} - 2$  и  $3 \cdot 2^n - 2$  соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.5) и (2.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно  $2^n - 1$ .

В результате моделирования указанной  $\pi$ -схемы можно построить неповторную по информационным БП формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left( \bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left( \dots \left( \bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.6), так как

Рис. 2.2: СФЭ для ФАЛ  $\ell_2$  и  $\ell_n$ 

реализует ФАЛ  $\mu_n$  и имеет сложность  $4 \cdot 2^n - 3$ .

Неравенства (2.7) при  $n = 1$ , очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$ , со сложностью (2.7), является СФЭ  $\Sigma_n^{\oplus}$ , показанная на рис. 2.2а,б. Аналогичная СФЭ для ФАЛ  $\bar{\ell}_n$  получается в результате замены ФЭ  $\&$  на ФЭ  $\vee$  и ФЭ  $\vee$  на ФЭ  $\&$  в первой подсхеме вида  $\Sigma_2^{\oplus}$  схемы  $\Sigma_n^{\oplus}$  (см. рис. 2.2а).

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

**Лемма 2.4.** Если система ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  состоит из попарно различных ФАЛ от БП  $X(n)$ , отличных

от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

*Доказательство.* Возьмем приведенную  $(1, m)$ -КС  $\Sigma$ , реализующую систему ФАЛ  $F$ , и заметим, что при любом  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , в сети  $\Sigma|_\alpha$  имеется связная компонента, которая содержит вход  $\Sigma$  и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе  $\alpha$ . Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , придем к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2.$$

*Замечание.* В силу следствия  $(1, 4)$ -КС с входом  $a$ , которая состоит из двух непересекающихся по внутренним вершинам  $(a - a)$ -цепей (циклов) длины 3 с ЭК проводимости  $\bar{x}_1 x_2 x_1$  и  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1$ , является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.

**Лемма 2.5.** Если для ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , и для любого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $f_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$ , то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f_0), L_{\&, \vee}^C(f_1)\} + 2. \quad (2.8)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma$  — минимальная по числу ФЭ  $\&$  и  $\vee$  СФЭ из класса  $\mathcal{U}^C$ , которая реализует ФАЛ  $f$  и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ  $\neg$ . Из условия леммы следует, что выход ФЭ  $\neg$ , присоединённого к входу  $x_n$  СФЭ  $\Sigma$  не может быть её выходом.

Пусть цепь  $C$  соединяет вход  $x_n$  СФЭ  $\Sigma$  с её выходом  $z_1$  и пусть константа  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , равна 0 тогда и только тогда, когда БП  $x_n$  подается в  $C$  либо на вход ФЭ  $\&$ , либо на вход ФЭ  $\neg$ , к выходу которого в  $C$  присоединён ФЭ  $\vee$ .

Рассмотрим СФЭ  $\widehat{\Sigma}$ , которая реализует ФАЛ  $f_\sigma$ ,  $f_\sigma \neq 0, 1$ , и получена из СФЭ  $\Sigma$  в результате подстановки  $x_n = \sigma$ , а также последующего ЭП на основе тождеств  $\tau^{\text{ПК}}$  (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедимся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа  $\&$  или  $\vee$ .

Действительно, в случае  $\sigma = 0$  из СФЭ  $\Sigma$  будет удален ФЭ  $\mathcal{E}'$ , являющийся первым ФЭ типа  $\&$  или  $\vee$  цепи  $C$ . Заметим, что выход ФЭ  $\mathcal{E}'$  не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ  $\neg$ , выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ  $f_\sigma$  была бы равна константе. Следовательно, на цепи  $C$  СФЭ  $\Sigma$  имеется ФЭ  $\mathcal{E}''$  типа  $\&$  или  $\vee$ , на вход которого поступает либо выход  $\mathcal{E}'$ , либо выход ФЭ  $\neg$ , присоединённого к выходу  $\mathcal{E}'$ . Легко видеть, что ФЭ  $\mathcal{E}''$  тоже будет удален при переходе от  $\Sigma$  к  $\widehat{\Sigma}$  и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&,\vee}(f) = L_{\&,\vee}(\Sigma) \geq L_{\&,\vee}(\widehat{\Sigma}) + 2 \geq L_{\&,\vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (2.8).

Случай  $\sigma = 1$ , когда БП  $x_n$  подаётся в  $C$  либо на вход ФЭ  $\vee$ , либо на вход ФЭ  $\neg$ , к выходу которого присоединён ФЭ типа  $\&$ , рассматривается аналогично.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.**

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1. \quad (2.9)$$

Действительно, (2.9) получается в результате применения леммы 2.5 последовательно ко всем информационным БП  $y_{2^n-1}, \dots, y_1$  и учитывая, что получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП  $x_1, \dots, x_n, y_0$ .

**Следствие 2.** Из (2.9) в силу леммы 4.1 главы 2 вытекает неравенство

$$D(\mu_n) \geq n + 1.$$

*Замечание.* В силу следствия 1 формула  $\bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$  является минимальной СФЭ, реализующей ФАЛ  $\mu_1$  и  $L^C(\mu_1) = 4$ .

### §3 Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона.

Рассмотрим структурные преобразования схем, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется *тождественной вершиной кратности  $k$* ,  $k \geq 0$ , если она одновременно является  $k$ -кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается *фиктивной*.

Простейшими видами суперпозиции схем являются: 1) операция *переименования входов схемы* с возможным их отождествлением; 2) операция *переименования выходов схемы*

с возможным их дублированием или снятием; 3) операция *объединения схем*, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая, как обычное объединение соответствующих графов.

Будем говорить, что схема  $\Sigma$  имеет вид  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , то есть является *суперпозицией схем*  $\Sigma''$  и  $\Sigma'$  без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы  $\Sigma''$  к (некоторым) выходам схемы  $\Sigma'$ . Указанная суперпозиция считается *бесповторной*, если различные входы  $\Sigma''$  присоединяются к различным выходным вершинам  $\Sigma'$ . Суперпозиция вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  называется *стыковкой*, если число входов схемы  $\Sigma''$  равно числу выходов схемы  $\Sigma'$  и каждый вход  $\Sigma''$  присоединяется к выходу  $\Sigma'$  с тем же номером.

Заметим, что операции объединения схем и переименования их входов (выходов) являются частными случаями введенной операции суперпозиции. Действительно, для объединения схем это очевидно, а любое переименование выходов (входов) схемы  $\Sigma$  можно задать суперпозицией вида  $\Sigma_2''(\Sigma_1''(\Sigma))$  (соответственно  $\Sigma(\Sigma_1'(\Sigma_2'))$ ), где схемы  $\Sigma_i'$  и  $\Sigma_i''$ ,  $i = 1, 2$ , состоят из тождественных вершин различной кратности.

Заметим также, что суперпозиция общего вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  всегда может быть сведена к стыковке вида  $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$ , где схемы  $\widehat{\Sigma}'$  и  $\widehat{\Sigma}''$  получаются из схем  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно добавлением тождественных вершин и переименованием выходов. Стыковка вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , в свою очередь, может быть сведена к бесповторной стыковке вида  $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$ , где схемы  $\widehat{\Sigma}'$  и  $\widehat{\Sigma}''$  получаются из схем  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  снятием выходов и отождествлением входов соответственно.

Для суперпозиции схем вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  характерно, как правило, то, что схема  $\Sigma$  реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или ча-

сти) функций, реализованных схемой  $\Sigma'$  вместо (всех или части) входных переменных схемы  $\Sigma''$ . В случае стыковки, например, это означает, что схема  $\Sigma$  реализует набор функций вида  $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$ , где  $\mathcal{F}''$  и  $\mathcal{F}'$  — наборы функций, реализованные схемами  $\Sigma''$  и  $\Sigma'$  соответственно. Суперпозиция  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  считается *правильной*, если схема  $\Sigma$  обладает указанным свойством, и *корректной*, если, кроме того, в любой вершине  $\Sigma$ , которая соответствует выходной вершине  $\Sigma'$ , реализуется та же самая функция, что и в  $\Sigma'$ . Заметим, что правильная суперпозиция вида  $\Sigma''(\Sigma')$  автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины  $\Sigma'$  больше числа присоединяемых к ней входов  $\Sigma''$ . Заметим также, что с содержательной точки зрения корректность суперпозиции вида  $\Sigma''(\Sigma')$  позволяет одновременно использовать выходы  $\Sigma'$  в других суперпозициях.

Легко видеть, что любая СФЭ может быть получена в результате многократного применения операции суперпозиции, на каждом шаге которой происходит дублирование выхода или присоединение одного ФЭ к выходам СФЭ, первоначально состоящей из тождественных вершин.

Так, на рис. 2.2а показана СФЭ  $\Sigma_2^\oplus$ , имеющая сложность 4 и реализующая ФАЛ  $x_1 \oplus x_2$ , а на рис. 2.2б — СФЭ  $\Sigma_n^\oplus$ ,  $n \geq 3$ , которая является результатом «последовательной» суперпозиции  $(n - 1)$  схем  $\Sigma_2^\oplus$  и реализует ФАЛ  $\ell_n(x_1, \dots, x_n)$  со сложностью  $4n - 4$ .

Операция суперпозиции КС и все ее частные случаи определяются обычным образом. При этом пометками входов и выходов КС, в отличие от СФЭ, не обязательно являются переменные, а БП, управляющие проводимостью контактов КС, никак не связаны с ее входами.

Рассмотрим вопросы, связанные с нахождением функционирования для суперпозиций сетей или КС. Из соображений удобства будем допускать наличие в КС ориентированных (неориентированных) ребер без пометок, которые про-

водят при любых значениях управляющих входных БП в указанном (соответственно в любом) направлении и называются вентилями (соответственно *проводниками*). Это позволяет считать, что сети являются частным случаем КС и реализуют свои матрицы достижимости, состоящие из константных ФАЛ.

Легко видеть, что перестановка входов(выходов) КС порождает в реализуемой ею матрице такую же перестановку связанных с ними строк (соответственно столбцов), а снятие (дублирование) выходов этой КС — удаление (соответственно добавление) связанных с ними столбцов. Заметим также, что КС  $\Sigma$ , которая является объединением КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ , реализующих матрицы  $F'$  и  $F''$  соответственно, реализует матрицу  $F$  вида<sup>1</sup>:

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline F' & 0 \\ \hline 0 & F'' \\ \hline \end{array}$$

Обратимся, далее, к особенностям функционирования КС, получающихся в результате применения операций суперпозиции общего вида. Напомним, что суперпозиция общего вида сводится к последовательному выполнению операций переименования выходов, добавления тождественных вершин и стыковки. При этом стыковка, в свою очередь, сводится к снятию выходов, отождествлению входов и неповторной стыковке.

Заметим, что результат отождествления первых  $p$  входов КС  $\Sigma$  эквивалентен результату стыковки вида  $\Sigma(\Sigma')$ , а результат  $p$ -кратного дублирования первого выхода КС  $\Sigma$  — результату стыковки  $\Sigma''(\Sigma)$ , где КС  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  состоят из

<sup>1</sup>Предполагается, что номер любого входа (выхода) КС  $\Sigma'$  меньше номера любого входа (соответственно выхода) КС  $\Sigma''$  в КС  $\Sigma$ , а внутренняя упорядоченность полюсов КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  в КС  $\Sigma$  сохраняется. В остальных случаях происходит необходимая перестановка входов и выходов КС  $\Sigma$ .



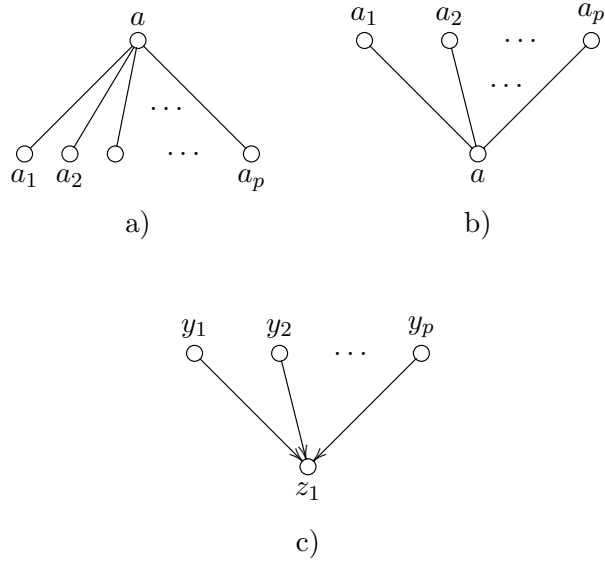


Рис. 3.1: проводящие и вентильная звезды порядка  $p$

( $1, p$ )-проводящей звезды (см. рис. 3.1а,  $a$  — вход) и тождественных вершин. Заметим также, что стыковка вида  $\Sigma(\widehat{\Sigma})$ , где КС  $\widehat{\Sigma}$  состоит из ( $p, 1$ )-проводящей звезды (см. рис. 3.1б,  $a$  — выход) и тождественных вершин, соответствует отождествлению первых  $p$  выходов КС  $\Sigma$ .

В соответствии с общими правилами стыковка (суперпозиция) КС вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  называется<sup>2</sup> *правильной*, если для матриц  $F$ ,  $F'$  и  $F''$ , реализуемых КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно, выполняется равенство

$$F = F' \cdot F''. \tag{3.1}$$

<sup>2</sup>Это определение соответствует «обычному» определению корректной суперпозиции в рамках модели так называемых преобразующих КС.

Указанная суперпозиция считается *корректной*, если, кроме того, в выходных вершинах подсхемы  $\Sigma''$  схемы  $\Sigma$  реализуются те же самые столбцы ФАЛ, что и в самой схеме  $\Sigma$ . Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП.

Заметим, что при правильной стыковке  $(1, p)$ -КС и  $(p, 1)$ -КС, реализующих строку и столбец из ФАЛ  $(f'_1, \dots, f'_p)$  и  $(f''_1, \dots, f''_p)$  соответственно, получается  $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ  $f'_1 f''_1 \vee \dots \vee f'_p f''_p$ , при правильном отождествлении входов (выходов) КС в реализуемой ею матрице происходит поразрядная дизъюнкция тех строк (соответственно столбцов), которые соответствуют отождествленным входам (соответственно выходам) и т. п.

Легко видеть, что операция переименования входов (выходов) КС без отождествления, операция объединения КС, а также операция последовательного соединения  $(1, 1)$ -КС корректны в любом случае. В то же время параллельное соединение  $(1, 1)$ -КС, при котором сначала отождествляются входы, а затем выходы соединяемых КС, не является, в общем случае, корректной операцией суперпозиции, хотя является при этом правильной суперпозицией, так как полученная КС реализует дизъюнкцию ФАЛ, реализуемых исходными КС. Заметим, что корректное дизъюнктивное соединение выходных ФАЛ можно осуществить с помощью стыковки исходной КС с вентильной звездой (см. рис. 3.1с).

Схема называется *разделительной по входам (выходам)*, если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так  $(p, 1)$ -схема  $\Sigma'' = \Sigma''(y_1, \dots, y_p; z_1)$ , показанная на рисунке 3.1с, является разделительной по входам схемой, которая называется *вентильной звездой порядка  $p$* . Примером разделительной по выходам (входам) КС может служить  $(1, 2^n)$  (соответственно  $(2^n, 1)$ ) контактное дерево порядка  $n$  (см. рис. 1.1).

Будем говорить, что КС  $\Sigma$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  *разделительна* на наборе  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть  $\Sigma|_\alpha$ . Следующее утверждение является обобщением известной леммы Шеннона (см. [32, 14]).

**Лемма 3.1.** *Пусть КС  $\Sigma$  является результатом стыковки вида  $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ , а  $F, F'$  и  $F''$  — матрицы, реализуемые КС  $\Sigma, \Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно. Тогда*

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'', \quad (3.2)$$

*если КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.*

*Доказательство.* Пусть КС  $\Sigma$  является сначала результатом бесповторной стыковки  $(p, q)$ -КС  $\Sigma'$  и  $(q, s)$ -КС  $\Sigma''$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть, кроме того,  $v'$  ( $v''$ ) — произвольная вершина КС  $\Sigma'$  (соответственно  $\Sigma''$ ), а ФАЛ  $f'_j$  (соответственно  $f''_j$ ),  $j \in [1, q]$ , — ФАЛ проводимости от вершины  $v'$  к  $j$ -му выходу в КС  $\Sigma'$  (соответственно от  $j$ -го входа к вершине  $v''$  в КС  $\Sigma''$ ). Докажем, что для ФАЛ  $f$  — ФАЛ проводимости от вершины  $v'$  к вершине  $v''$  в КС  $\Sigma$ , — справедливо неравенство

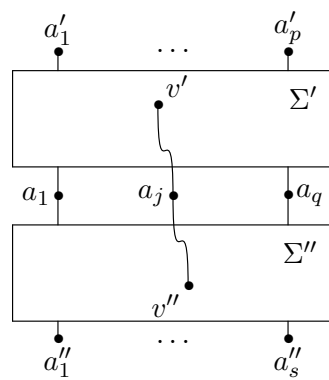
$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (3.3)$$

которое переходит в равенство

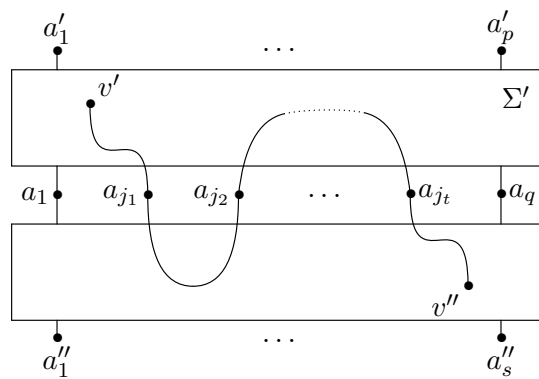
$$f(x_1, \dots, x_n) = f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (3.4)$$

если КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам или КС  $\Sigma''$  разделительна по входам.

Действительно, пусть  $a_j, j \in [1, q]$ , — вершина КС  $\Sigma$ , которая получается в результате присоединения  $j$ -го входа КС  $\Sigma''$  к  $j$ -му выходу КС  $\Sigma'$  (см. рис. 3.2а). Справедливость неравенства (3.3) следует из того, что его правая



a)



b)

Рис. 3.2: к доказательству леммы 3.1

часть описывает «суммарную» проводимость тех  $(v' - v'')$ -цепей КС  $\Sigma$ , которые проходят через вершины  $a_1, \dots, a_q$  ровно один раз (см. рис. 3.2а). Любая другая  $(v' - v'')$ -цепь КС  $\Sigma$  проходит через указанные вершины не меньше трех раз (см. рис. 3.2б) и в случае разделительности КС  $\Sigma'$  по выходам или разделительности КС  $\Sigma''$  по входам имеет нулевую проводимость.

Из (3.3) и (3.4) непосредственно вытекает (3.2) с учетом того, что при  $v' = a'_i$  и  $v'' = a''_j$ , где  $i \in [1, p]$  и  $j \in [1, s]$ , левая(правая) часть этих соотношений равна элементу матрицы  $F$  (соответственно  $F' \cdot F''$ ), расположенному в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце.

Пусть теперь КС  $\Sigma$  получается из КС  $\Sigma''$  в результате применения операции отождествления входов, то есть  $\Sigma$  эквивалентна бесповторной стыковке вида  $\Sigma'' (\Sigma')$ , где КС  $\Sigma'$  состоит из проводящей звезды и тождественных вершин. В этом случае неравенство (3.2) имеет вид  $F \geq \widehat{F}''$ , где матрица  $\widehat{F}''$  получается из матрицы  $F''$  в результате поразрядной дизъюнкции строк, соответствующих отождествляемым входам КС  $\Sigma''$ , и по-прежнему переходит в равенство, если КС  $\Sigma''$  разделительна по входам. В последнем случае, кроме того, из аналогичного равенства, связанного с КС  $\Sigma''$ , которая получается из КС  $\Sigma''$  в результате объявления ее входов входами и, одновременно, выходами  $\check{\Sigma}''$ , следует разделительность КС  $\Sigma$  по входам.

Заметим, наконец, что стыковка общего вида  $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$  сводится к последовательному выполнению отождествления входов вида  $\widehat{\Sigma}'' = \Sigma'' (\check{\Sigma}'')$  и бесповторной стыковки вида  $\Sigma = \widehat{\Sigma}'' (\widehat{\Sigma}')$ , где КС  $\check{\Sigma}''$  состоит из проводящей звезды и тождественных вершин, а КС  $\widehat{\Sigma}'$  получается из КС  $\Sigma'$  снятием некоторых выходов. При этом неравенство (в случае разделительности КС  $\Sigma''$  по входам равенство) (3.2) для КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  вытекает из установленных выше аналогичных соотношений для КС  $\widehat{\Sigma}''$ ,  $\check{\Sigma}''$ ,  $\Sigma''$  и КС  $\Sigma$ ,  $\widehat{\Sigma}'$ ,  $\widehat{\Sigma}''$  в силу ассоци-

ативности произведения матриц. Случай разделительности КС  $\Sigma'$  по выходам рассматривается аналогично.

Лемма доказана. □

**Следствие 1.** *В случае разделительности КС  $\Sigma''$  по входам в каждой вершине КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma)$ , которая соответствует выходу КС  $\Sigma'$ , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС  $\Sigma'$ , то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.*

Действительно, полагая  $v' = a'_i$  и  $v'' = a_j$ , где  $i \in [1, p]$ , а  $j \in [1, q]$ , из (3.4) получим требуемое равенство  $f = f'_j$ . Случай стыковки общего вида рассматривается аналогично.

**Следствие 2.** *Равенство (3.2) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.*

#### §4 Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения. Метод Шеннона

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и  $\pi$ -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [21] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Рассмотрим сначала специальный частный случай корректной суперпозиции КС — операцию присоединения к выходам одноходовой КС одного или двух противоположных контактов, которая заключается в следующем. Пусть  $(1, m)$ -КС  $\Sigma$  получается из  $(1, \check{m})$ -КС  $\check{\Sigma}$  в результате добавления но-

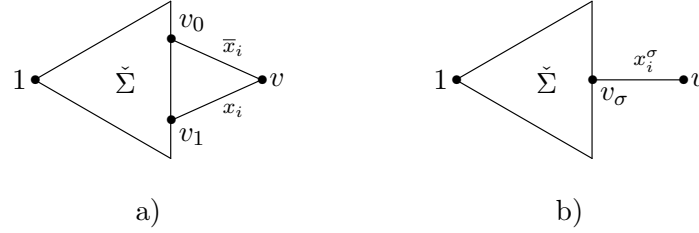


Рис. 4.1: присоединение одного или двух противоположных контактов

вой выходной вершины  $v$ , которая соединяется с выходными вершинами  $v_0$  и  $v_1$  КС  $\tilde{\Sigma}$  контактами  $\bar{x}_i$  и  $x_i$  соответственно (см. рис. 4.1a). Тогда в вершинах  $v_0$  и  $v_1$  КС  $\Sigma$  в силу нулевой проводимости между входами присоединяемой (2, 1)-КС реализуются те же самые ФАЛ  $g_0$  и  $g_1$ , что и в КС  $\tilde{\Sigma}$ , а в вершине  $v$  — ФАЛ  $g$  вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1. \quad (4.1)$$

Аналогичные соотношения будут справедливы и тогда, когда вершина  $v$  КС  $\Sigma$  связана с вершиной  $v_\sigma$  только одним контактом вида  $x_i^\sigma$ ,  $\sigma \in \{0, 1\}$  (см. рис. 4.1b). В этом случае в вершине  $v$  КС  $\Sigma$  реализуется ФАЛ

$$g = x_i^\sigma g_\sigma, \quad (4.2)$$

а в вершине  $v_\sigma$  по-прежнему реализуется ФАЛ  $g_\sigma$ .

Описанные выше операции присоединения одного или двух противоположенных контактов очевидным образом распространяются на случай КС с несколькими входами. Кроме того, они допускают моделирование в классе СФЭ в базисе  $B_0$ . Так, переход от СФЭ  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{U} \in \mathcal{U}^C$ , которая реализует в выходных вершинах  $v_0$  и  $v_1$  ФАЛ  $g_0$  и  $g_1$  соответственно, к СФЭ  $U$ ,  $U \in \mathcal{U}^C$ , которая реализует ФАЛ  $g$ , удовлетворяющую (4.1) ((4.2)), показан на рис. 4.2a (соответственно 4.2b).

Заметим, что при этом разложение (4.1) в случае  $g_{\bar{\sigma}} \equiv 1$  эквивалентно представлению

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma},$$

схемная реализация которого показана на рис. 4.2с.

Определим, далее, *каскадную* КС как приведенную КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается *полной*, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта. Так, например, к числу ККС относится контактное дерево, показанное на рис. 1.1, причем соответствующее ему  $(2^n, 1)$ -КД является полной ККС.

Заметим, далее, что, в силу отмеченных выше свойств рассматриваемых операций присоединения контактов, ККС имеет нулевые ФАЛ проводимости между своими входами. Отсюда следует, что в каждой вершине ККС реализуется столбец, в котором никакие две ФАЛ не обращаются в единицу одновременно, причем в случае полной ККС дизъюнкция всех ФАЛ этого столбца дает 1. Так, в частности, в каждой вершине полной ККС с двумя входами реализуется столбец из двух противоположных ФАЛ.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется *неполной вершиной* этой ККС. Будем говорить, что ККС  $\Sigma''$  является *дополнением* неполной ККС  $\Sigma'$ , если она получается в результате соединения всех неполных вершин  $\Sigma'$  отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом, очевидно,

$$L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma'), \quad (4.3)$$



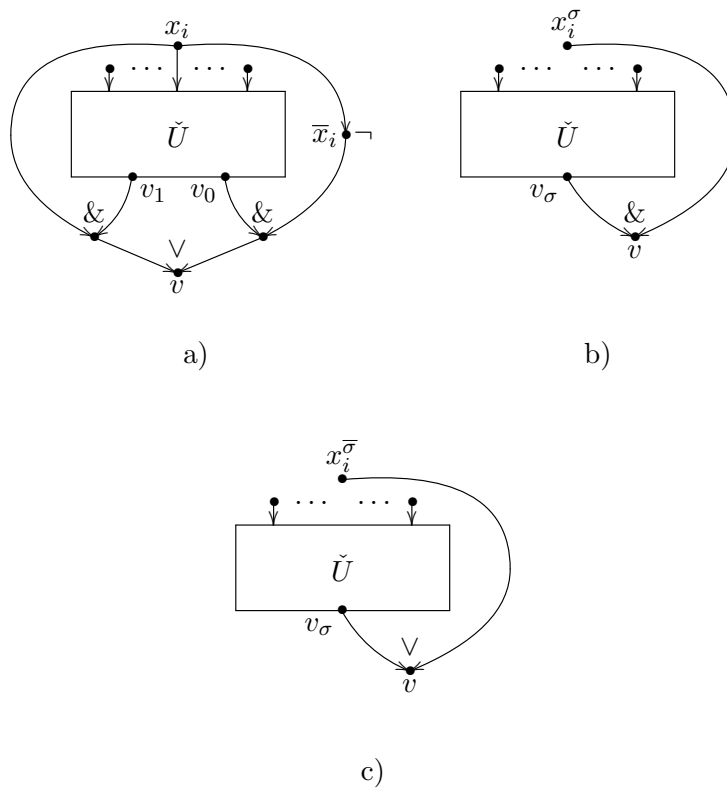


Рис. 4.2: к моделированию операций присоединения контактов в классе СФЭ

а объединение  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  является полной ККС. Дополнение  $\Sigma''$  к полной ККС  $\Sigma$  с 1 входом будем называть *инверсной* к  $\Sigma'$  ККС. Заметим, что ККС  $\Sigma''$ , в силу отмеченных выше свойств полных ККС, реализует систему ФАЛ  $\bar{F}'$ , если ККС  $\Sigma'$  реализует систему ФАЛ  $F'$ . Таким образом, в силу (4.3) справедливо следующее утверждение

**Лемма 4.1.** *Если  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma'$  реализует систему ФАЛ  $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$ , то существует  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma''$ , которая реализует систему ФАЛ  $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$  и для которой  $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$ .*

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики  $F = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $F \in P_2^m(n)$ , строить  $(1, m)$ -КС  $\Sigma_F$ ,  $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$ , и СФЭ  $U_F$ ,  $U_F \in \mathcal{U}^C$ , которые реализуют  $F$ . Будем считать, что все ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  системы  $F$  различны, отличны от констант, и для каждой БП  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от  $x_i$ .

Разложим ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  сначала по БП  $x_1$ , потом по БП  $x_2$  и так далее. При этом построим последовательности множеств  $G_i$  и  $\hat{G}_i$ , состоящих из ФАЛ от БП  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , такие, что

1.  $G_i$  состоит из всех различных ФАЛ  $g(x_i, \dots, x_n)$  вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где  $1 \leq j \leq m$ ,  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$ ;

2.  $\hat{G}_i$  состоит из всех различных функций  $g$ ,  $g \in G_i$ , которые существенно зависят от  $x_i$ .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \hat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ  $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$  не пусты и попарно не пересекаются.

Заметим, что любую ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , где  $1 \leq i \leq n$ , можно представить в виде (4.1)

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1,$$

где  $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , и, следовательно,  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$  для всех  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ . Если при этом для некоторого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $g_\sigma$  равна 0, то вместо (4.1) будем использовать разложение (4.2)

$$g = x_i^\sigma g_\sigma,$$

где  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$ .

Построим КС  $\check{\Sigma}_F$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , где  $G_F = \widehat{G}_1 \cup \dots \cup \widehat{G}_n$  с помощью операций присоединения одного или двух противоположных контактов. При этом для каждого  $i$ ,  $i = n, (n-1), \dots, 1$ , каждая ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , реализуется согласно (4.1) ((4.2)) на выходе  $v$ , который при  $\alpha = 0, 1$  (соответственно  $\alpha = \sigma$ ) соединен контактом вида  $x_i^\alpha$  с тем выходом  $v_\alpha$ , где реализуется ФАЛ  $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$  так, как это показано на рис. 4.1а (соответственно рис. 4.1б).

Заметим, что указанное присоединение одного или двух противоположенных контактов не изменяет ФАЛ, реализуемые в вершинах  $v_\alpha$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$ .

Для получения искомой КС  $\Sigma_F$  достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС  $\check{\Sigma}_F$ , в которых реализуются ФАЛ, отличные от  $f_1, \dots, f_m$ .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ  $\check{U}_F$ , реализующая систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , с той лишь разницей, что:

1. сначала реализуются все ФАЛ вида  $\bar{x}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , которые встречаются в КС  $\Sigma_F$ ;

2. для всех  $i$ ,  $i = (n-1), \dots, 1$ , разложение (4.1), где  $g \in \widehat{G}_i$  и  $g_0, g_1 \in \check{G}_{i+1}$ , реализуется так, как показано на рис. 4.2а, а разложение (4.2), применяемое в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 0$  (разложение

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} x_i^{\sigma} = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} \quad (4.4)$$

в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 1$ ), — так, как показано на рис. 4.2b (соответственно 4.2c);

3. каждая ФАЛ вида  $g_{\sigma} x_i^{\sigma}$ , используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (4.1) или (4.2) для различных ФАЛ  $g$ , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ  $U_F$ , реализующая систему ФАЛ  $F$  и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ  $\check{U}_F$  в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из  $F$ .

Пусть, например,  $F = (f_1, f_2)$ , где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \widehat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \widehat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \widehat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \widehat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \widehat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}. \end{aligned}$$

На рис. 4.3 показана построенная для данной системы ФАЛ КС  $\check{\Sigma}_F$ , вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 4.4 — соответствующая ей КС  $\Sigma_F$ , а на рис. 4.5 — СФЭ  $U_F$ .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ  $\ell_n$ , где  $n \geq 2$ , является известная схема

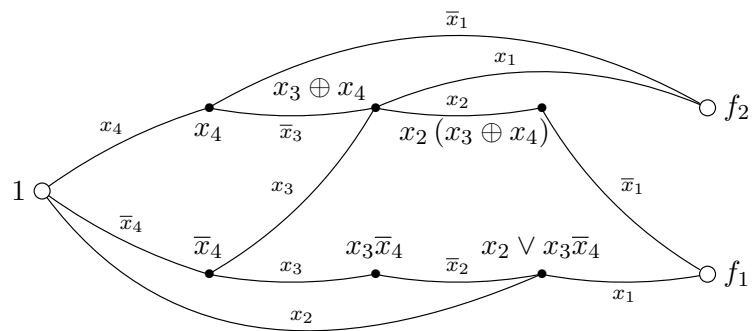


Рис. 4.3: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

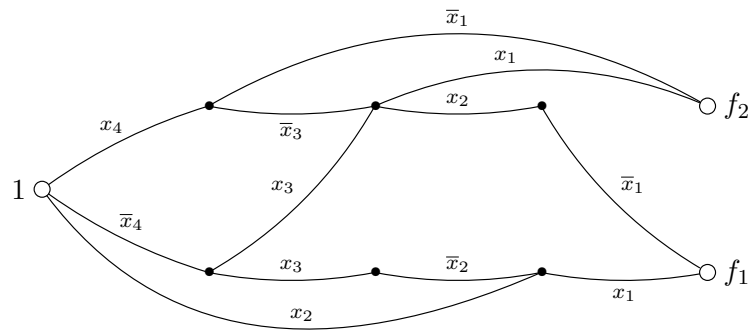


Рис. 4.4: пример КС, построенной методом каскадов

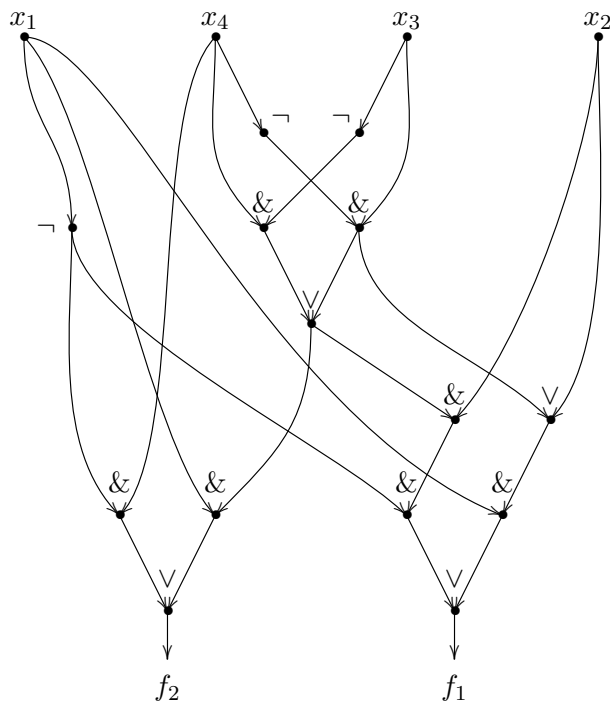


Рис. 4.5: СФЭ для системы ФАЛ  $F$ , построенная методом каскадов

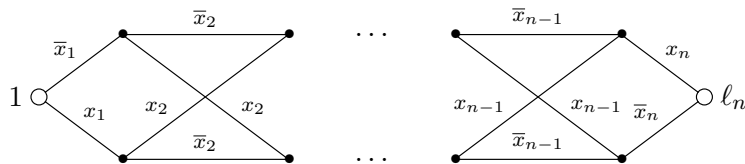


Рис. 4.6: схема Кардо для линейной функции  $l_n$

Кардо [32], показанная на рис. 4.6. Заметим, что эта КС имеет сложность  $(4n - 4)$  и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$ , по методу каскадов имеет сложность  $(7n - 9)$  и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой  $\Sigma_n^\oplus$  сложности  $(4n - 4)$ , показанной на рис. 2.2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ  $\bar{\ell}_n$  (см. лемму 2.3).

При построении по методу каскадов  $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики  $\vec{Q}_n$ , мы получим контактное дерево порядка  $n$ , показанное на рис. 1.1. Как будет показано далее это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный дизъюнктивный дешифратор порядка  $n$  и сложности не больше, чем  $2^{n+2} - 6$ , контактный универсальный многополюсник порядка  $n$  и сложности не больше, чем  $2 \cdot 2^{2^n}$ , а также контактный мультиплексор порядка  $n$  и сложности  $3 \cdot 2^n - 2$ , показанный на рис. 2.1 (см. лемму 2.3). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка  $n$ , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка  $2^n$  от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем  $2^{2^n+1}$ . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним леммы 1.3 и 2.3 следующим утверждением.

**Лемма 4.2.** *Для любого натурального  $n$  и  $\sigma \in B$  выполня-*

ются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [33, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$ .

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра  $q$ ,  $1 \leq q \leq n$ , и построении схемы  $\Sigma_f$ , реализующей произвольную ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  на основе ее разложения по части переменных:

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (4.5)$$

где  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$  при всех  $\sigma''$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ . При этом схема  $\Sigma_f$  представляет собой суперпозицию вида  $\Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  — мультиплексор порядка  $(n - q)$  от адресных БП  $x''$ , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника  $\Sigma'$  порядка  $q$  от БП  $x'$  в соответствии с (4.5).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  указанным выше способом КС (СФЭ в базисе  $B_0$ )  $\Sigma_f$ , где  $\Sigma''$  —  $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка  $(n - q)$  (соответственно формула  $\mathcal{F}_{n-q}$  из леммы 2.3), а  $\Sigma'$  — универсальный многополюсник из леммы 4.2 (соответственно леммы 1.3). Корректность построенной суперпозиции, т.е. реализация схемой  $\Sigma_f$  ФАЛ  $f$  в случае СФЭ очевидна, а в случае КС обеспечивается тем, что её можно представить в виде результата многократной операции присоединения



двух противоположенных контактов, корректность которой была отмечена выше (см. рис. 4.1). Для сложности полученной схемы  $\Sigma_f$  будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$ , и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** *Для функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$  выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

## §5 Нижние мощностные оценки функции Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для функций из специальных классов

Установим теперь ряд нижних оценок для введенных в §1 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [33, 14], который основан на том, что число ФАЛ от БП  $x_1, \dots, x_n$  не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента  $n$ .

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из рассмотренных в главе 2 классов схем,  $\Psi$  — введенный там функционал сложности, а  $\Psi(n)$  — функция Шеннона для класса  $\mathcal{U}$  относительно  $\Psi$ . Обозначим через  $\mathcal{U}(\Psi, n)$  множество тех схем  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}$ , которые реализуют

ют одну ФАЛ из  $P_2(n)$  и для которых  $\Psi(\Sigma) \leq \Psi$ . Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(n), n)\| = 2^{2^n}. \quad (5.1)$$

Заметим также, что если для некоторого натурального  $n$  и действительных  $\widehat{\Psi}$ ,  $\delta$ , где  $0 < \delta < 1$ , выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}(\widehat{\Psi}, n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то } \Psi(f) \geq \widehat{\Psi} \quad (5.2)$$

для не менее чем  $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$  ФАЛ  $f$  из  $P_2(n)$ .

Верхние оценки величины  $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$ , установленные в главе 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (5.1)–(5.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. леммы 4.3, 4.2, 6.2, 6.3 из главы 2) для любых натуральных  $n$  и  $L$  справедливы неравенства:

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L+n))^{L+1}, \quad (5.3)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}, \quad (5.4)$$

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L, \quad (5.5)$$

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L, \quad (5.6)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[L, n]\| \leq (8n)^{2^D}. \quad (5.7)$$

**Лемма 5.1.** *Для положительных действительных чисел  $a$ ,  $y$ ,  $q$  из неравенств*

$$a \log q > 1, \quad (ay)^y \geq q, \quad (5.8)$$

*следует неравенство*

$$y \geq \frac{\log q}{\log(a \log q)} \left( 1 + \frac{\log \log(a \log q)}{\log(ae \log q)} \right), \quad (5.9)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов, а из неравенств  $a > 1$ ,  $a^y \geq q$  — неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\log a}. \quad (5.10)$$

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда  $a = 1$  и  $\log q > 1$ . В этом случае неравенство (5.9) следует из того, что левая часть (5.8) монотонно возрастает по  $y$ , и для

$$y' = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\log \log \log q}{\log (\varepsilon \log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y' \log y' &= \\ &= (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q} (\log \log q - \log \log \log q + \log e \ln (1 + \varepsilon)) \leq \\ &\leq \log q (1 + \varepsilon) \left( 1 - \frac{\log \log \log q}{\log \log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log \log q} \right) = \\ &= \log q (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) = \log q (1 - \varepsilon^2) \leq \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае  $a > 0$  неравенство (5.8) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geq q^a,$$

и поэтому неравенство (5.9) получается из неравенства  $y \geq y'$  в результате замены  $y$  на  $ay$  и  $\log q$  на  $a \log q$ , если выполнено условие  $a \log q > 1$ .

Неравенство (5.10) в случае  $a > 1$  получается в результате логарифмирования неравенства  $a^y \geq q$  и деления обеих частей полученного неравенства на  $\log a$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 5.1.** Для некоторых последовательностей  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$ , где  $i = 1, \dots, 5$  и  $n = 1, 2, \dots$ , таких, что  $\varepsilon_i(n) \geq 0$  при  $n \geq n_0$  и  $\varepsilon_i(n)$  стремится к 0 при  $n$  стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства

$$L^C(f) \geq (1 + \varepsilon_1(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.11)$$

$$L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon_2(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (5.12)$$

$$L^K(f) \geq (1 - \varepsilon_3(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.13)$$

$$L^\pi(f) \geq (1 - \varepsilon_4(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (5.14)$$

$$D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_5(n). \quad (5.15)$$

*Доказательство.* Неравенства (5.11)–(5.14) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем  $\mathcal{U}$  с функционалом сложности  $L$  неравенства (5.3)–(5.6) на основе мощностного неравенства (5.2), где  $\delta = 1/n$  с использованием леммы 5.1, где  $q = 2^{2^n}/n$ , и

- 1)  $a = 8$ ,  $y = L^C(n) + n$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^C$ ;
- 2)  $a = 8n$ ,  $y = L^\Phi(n) + 1$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\Phi$ ;
- 3)  $a = 8n$ ,  $y = L^K(n)$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^K$ ;
- 4)  $a = 12n$ ,  $y = L^\pi(n)$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\pi$ .

Действительно, подставляя указанные значения в (5.9) по-

лучим, что доля тех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , для которых

$$\begin{aligned} 1) L^C(f) &\geq \frac{2^n}{n+3} \left( 1 + \frac{\log(n+3) - o(1)}{n+5} \right) - n \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{\log n - 3 - o(1)}{n} \right); \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$2) L^\Phi(f) \geq \frac{2^n - \log n}{\log n + 3} - 1 \geq \frac{2^n}{\log n} \left( 1 - \frac{3 + o(1)}{\log n} \right); \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} 3) L^K(f) &\geq \frac{2^n}{n+3+\log n} \left( 1 + \frac{\log(n+3+\log n) - o(1)}{n+5+\log n} \right) \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left( 1 - \frac{3 + o(1)}{n} \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

не меньше, чем  $(1 - 1/n)$ . Следовательно, неравенство (5.11) ((5.12), (5.13)) будет справедливо для достаточно больших  $n$  при  $\varepsilon_1(n) = \frac{\log n - 4}{n}$  (соответственно  $\varepsilon_2(n) = \frac{4}{\log n}$ ,  $\varepsilon_3(n) = \frac{4}{n}$ ).

Аналогичным образом устанавливается справедливость (5.14) и (5.15) при  $\varepsilon_4(n) = \frac{6}{\log n} = \varepsilon_5(n)$ .

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} D(n) &\geq n - \log \log n - o(1), \\ L^C(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \\ L^K(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\pi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}. \end{aligned}$$

Мощностные соображения можно использовать при получении нижних оценок для функций Шеннона, связанных с реализацией ФАЛ из класса  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(1), \mathcal{Q}(2), \dots, \mathcal{Q}(n), \dots$ , где

$$\mathcal{Q} \subseteq P_2 \text{ и } \mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n) \neq \emptyset, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из рассмотренных в главе 2 классов схем,  $\Psi$  — введенный там функционал сложности, а  $\Psi(\mathcal{Q}(n))$  — функция Шеннона (для класса схем  $\mathcal{U}$  относительно функционала сложности  $\Psi$ ), связанная с классом ФАЛ  $\mathcal{Q}$ , то есть

$$\Psi(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} \Psi(f).$$

Следующее «мощностное» неравенство обобщает равенство (5.1) и вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)\| \geq |\mathcal{Q}(n)|. \quad (5.19)$$

Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона  $\Psi(\mathcal{Q}(n))$  на основе известной верхней оценки величины  $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$ .

Рассмотрим, в частности, нижние мощностные оценки для функций  $L^C(\mathcal{Q}(n))$  и  $L^K(\mathcal{Q}(n))$ , то есть функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из класса  $\mathcal{Q}$  схемами из классов  $\mathcal{U}^C$  и  $\mathcal{U}^K$  соответственно. На основе мощностных соображений (см. (5.19)) аналогично тому, как это было сделано в теореме 5.1 для случая  $\mathcal{Q} = P_2$ , доказывается следующее утверждение.

**Лемма 5.2.** *Для класса ФАЛ  $\mathcal{Q}$  такого, что  $n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right)$  ( $\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|)$ ), выполняются следующие асимптотические неравенства*

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}, \quad (5.20)$$

$$\text{(соответственно } L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\text{)}. \quad (5.21)$$

Пусть, например, класс  $\mathcal{Q}$  состоит из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП. Легко видеть, что при этом

$|\mathcal{Q}(n)| = 2^{\frac{3}{4}2^n}$ , так как  $f \in \mathcal{Q}(n)$  тогда и только тогда, когда вторая и третья четверти столбца значений  $\tilde{\alpha}_f$  совпадают. Следовательно, в силу леммы 5.2, отсюда вытекает, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}. \quad (5.22)$$

**§6 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе  $\{\&, \vee, \neg\}$**

Рассмотрим метод синтеза схем из класса  $\mathcal{U}^C$ , который был предложен О.Б. Лупановым [14] и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона  $L^C(n)$ . Этот метод, как и метод Шеннона (см. §4), основан на представлении реализуемой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , в виде (4.5) и построении искомой СФЭ  $\Sigma_f$ , реализующей ФАЛ  $f$ , как суперпозиции схем вида  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ . При этом схема  $\Sigma''$  по-прежнему является мультиплексором порядка  $(n - q)$  от адресных БП  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ , а схема  $\Sigma'$  реализует все ФАЛ вида  $f_{\sigma''}(x')$ , где  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ , и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ . Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$  берется не с выхода универсального многополюсника от БП  $x'$ , а реализуется на выходе  $\Sigma'$  как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества  $G$ ,  $G \subseteq P_2(q)$ , реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы  $\Sigma'$ .

Множество ФАЛ  $G$ ,  $G \subseteq P_2(m)$ , называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка  $m$  и ранга  $p$* , если любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p,$$

где  $g_i \in G$  при всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Пусть  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  — разбиение куба  $B^m$ , и пусть для всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , ФАЛ  $\psi_i(x_1, \dots, x_m)$  — характеристическая ФАЛ множества  $\pi_i$ , а  $G^{(i)}$  — множество всех тех ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , которые обращаются в 0 вне  $\pi_i$ . Заметим, что множество ФАЛ  $G$  вида

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка  $m$  и ранга  $p$ . Действительно, любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p, \quad (6.1)$$

где  $g_i = \psi_i g$  и, следовательно,  $g_i \in G^{(i)}$  для всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Заметим также, что мощность множества  $G^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , равна  $2^{s_i}$ , где  $s_i = |\pi_i|$ , и что множество  $G^{(i)} \cap G^{(j)}$  состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если  $1 \leq i < j \leq p$ . Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{s_i} \leq p2^s,$$

где

$$s = \max_{1 \leq i \leq p} s_i.$$

Указанное ДУМ  $G$  будем называть ДУМ, *связанным с разбиением  $\Pi$* . Компоненты разбиения  $\Pi$  будем при этом называть *полосами* ДУМ  $G$ , а ФАЛ  $\psi_1 = \chi_{\delta_1}, \dots, \psi_p = \chi_{\delta_p}$  — его *характеристическими* ФАЛ. Заметим, что характеристические ФАЛ попарно ортогональны, то есть одновременно в 1 не обращаются, и принадлежат  $G$ . Заметим также,



	$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1} \ x_m$	$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \dots \mathfrak{g}_{2^s}$	$\mathfrak{g}_{2^s+1} \dots \mathfrak{g}_{2^{s+1}-1}$	$\dots$	$\mathfrak{g}_{(p-1)(2^s-1)+2} \dots \mathfrak{g}_\lambda$	
$\pi_1$	0 0 ... 0 0	0 1 ... 1	0 ... 0	...	0 ... 0	$s=s_1$
	0 0 ... 0 1	0 0 ... 1	0 ... 0	...	0 ... 0	
	...	...	...	...	...	
	...	0 0 ... 1	0 ... 0	...	0 ... 0	
$\pi_2$	...	0 0 ... 0	1 ... 1	...	0 ... 0	$s=s_2$
	...	0 0 ... 0	0 ... 1	...	0 ... 0	
	...	...	...	...	...	
	...	0 0 ... 0	0 ... 1	...	0 ... 0	
...	...	...	...	...	...	
$\pi_{p-1}$	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	$s=s_{p-1}$
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	
	...	...	...	...	...	
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	
$\pi_p$	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	1 ... 1	$s_p \leq s$
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 1	
	...	...	...	...	...	
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	
		$\leftarrow 2^s \rightarrow$	$\leftarrow 2^{s-1} \rightarrow$	$\leftarrow 2^{s-p-1} \rightarrow$		

Рис. 6.1: к определению дизъюнктивно-универсального множества

что представление (6.1) в случае рассматриваемого ДУМ  $G$  равносильно представлению:

$$g = \psi_1 g_1 \vee \psi_2 g_2 \vee \dots \vee \psi_p g_p \tag{6.2}$$

Будем считать *стандартным* ДУМ *порядка*  $m$  и *высоты*  $s$ , где

$$s \leq 2^m, \tag{6.3}$$

ДУМ ранга  $p$ ,  $p = \lceil 2^m/s \rceil$ , связанное с разбиением  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  куба  $B^m$  на последовательные отрезки, для которого номер любого набора из множества  $\pi_i$  меньше номера любого набора из множества  $\pi_j$ , если  $i < j$ , и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s, \\ s_p = 2^m - (p-1)s \leq s. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таблица значений ФАЛ ДУМ  $G$  приведена на рис. 6.1.

Из проведенных построений и отмеченных выше свойств стандартного ДУМ вытекает справедливость следующего утверждения.

**Лемма 6.1.** *Для любых натуральных  $p$ ,  $m$  и  $s$ , где  $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$ , существует стандартное ДУМ  $G$  порядка  $m$  и высоты  $s$ , которое является ДУМ ранга  $p$  и для которого:*

- 1)  $\lambda = |G| \leq p2^s$ ;
- 2) система из  $p$  характеристических ФАЛ  $\psi_1, \dots, \psi_p$  ДУМ  $G$  обладает тем свойством, что для любой ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , и соответствующих ФАЛ  $g_1, \dots, g_p$  из  $G$  справедливо не только представление (6.1), но и представление (6.2).

**Теорема 6.1.** *Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая ее СФЭ  $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ , такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (6.5)$$

*Доказательство.* Пусть  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$  для всех  $\sigma''$  из  $B^{n-q}$ . Пусть, далее,  $\Sigma''$  — мультиплексор порядка  $(n-q)$  от адресных БП  $x''$  и информационных БП  $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ , который построен в соответствии с леммой 2.3, представляет собой формулу  $\mathcal{F}_{n-q}$  и реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_{n-q}(x'', y)$ .

Пусть  $s$  — некоторый параметр, удовлетворяющий (6.3), а  $G$  — стандартное ДУМ порядка  $m = q$  и высоты  $s$ , удовлетворяющее требованиям леммы 6.1. Обозначим через  $\Sigma_G$  СФЭ, которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}$  и представляет собой объединение схем, построенных для каждой из них в соответствии с леммой 1.2. Заметим, что, в силу леммы 2.3, (1.3) и леммы 6.1, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma'') &\leq 4 \cdot 2^{n-q}, \\ L(\Sigma_G) &\leq 3p2^{s+q}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Схема  $\Sigma'$  содержит СФЭ  $\Sigma_G$  в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$ , где  $\sigma'' \in B^{n-q}$ , на одном из своих выходов как ФАЛ  $g(x')$  вида (6.1) с помощью СФЭ из  $(p-1)$  ФЭ  $\vee$ , входы которой присоединены к соответствующим выходам  $\Sigma_G$ . Искомая СФЭ  $\Sigma_f$  имеет вид  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$  и реализует ФАЛ  $f$  в соответствии с разложением (4.5). Для нее, в силу (6.6), будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq \\ &\leq 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}, \end{aligned}$$

из которых, выбрав значения параметров

$$\begin{aligned} s &= \lceil n - 5 \log n \rceil, \\ m = q &= \lceil 2 \log n \rceil, \end{aligned}$$

удовлетворяющие (6.3), в соответствии с леммой 6.1 получим

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq \frac{2^n}{n - 5 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Из (6.5) с учётом следствия из теоремы 5.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Отметим, в заключение, что в соответствии с (6.5) и теоремой 5.1 сложность  $L^C(f)$  для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , асимптотически равна функции Шеннона  $L^C(n)$ , то есть сложности самой сложной ФАЛ из  $P_2(n)$ . Тем самым, в отличие от класса ДНФ (см. §7 главы 1), в классе схем  $\mathcal{U}^C$  имеет место т. н. эффект Шеннона — асимптотическое равенство сложности почти всех ФАЛ и сложности самой сложной ФАЛ от заданного числа БП, стремящегося к бесконечности.

### §7 Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ .

Множество  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , называется *m-регулярным* множеством наборов куба  $B^q$ , если  $m < q$ ,  $|\delta| = 2^m$  и все префиксы<sup>1</sup> длины  $m$  наборов из  $\delta$  различны. Заметим, что *m-регулярному* множеству  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$  из  $P_2^{q-m}(m)$  так, что набор  $\alpha = (\beta, \gamma)$ , где  $\beta \in B^m$  и  $\gamma \in B^{q-m}$ , принадлежит  $\delta$  тогда и только тогда, когда  $\psi(\beta) = \gamma$ . Заметим также, что любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(q)$ , совпадает на *m-регулярном* множестве наборов  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , с некоторой ФАЛ из  $P_2(m)$ , если рассматривать  $P_2(m)$  как множество всех ФАЛ из  $P_2(q)$  с несущественными БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ . При этом любая ФАЛ из связанной с  $\delta$  системы функций совпадает на  $\delta$  с соответствующей БП куба  $B^q$ .

<sup>1</sup>Для слова (набора)  $\alpha$  вида  $\alpha = \beta\gamma$  слово  $\beta$  ( $\gamma$ ) считается его *префиксом* (соответственно *суффиксом*).

Для наборов  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  через  $\beta \oplus \alpha$  будем обозначать набор вида  $(\beta_1 \oplus \alpha_1, \dots, \beta_q \oplus \alpha_q)$ . Для множества  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , и набора  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^q$ , определим множество  $\delta \oplus \alpha$  как множество различных наборов вида  $\beta \oplus \alpha$ , где  $\beta \in \delta$ , то есть множество, получающееся из множества  $\delta$  сдвигом (параллельным переносом) на набор  $\alpha$ . Заметим, что для  $m$ -регулярного множества  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , и любого набора  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^q$ , множество  $\delta \oplus \alpha$  также является  $m$ -регулярным. Если при этом  $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$ , то есть

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \gamma),$$

где  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q-m})$  и  $\nu(\gamma) = \nu(\alpha)$ , а множество наборов  $\delta$  соответствует системе ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_{q-m})$ , то множество наборов  $\delta \oplus \alpha$  будет соответствовать системе ФАЛ  $(g_1 \oplus \gamma_1, \dots, g_{q-m} \oplus \gamma_{q-m})$ , получающейся из системы  $g$  инвертированием некоторых ФАЛ.

**Лемма 7.1.** *Для любых натуральных  $m$ ,  $\lambda$  и  $q = m + \lambda$  и для любой системы ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$  из  $P_2^\lambda(m)$  существует  $m$ -регулярное разбиение  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$  куба  $B^q$  такое, что любая ФАЛ  $g_i$  на любой компоненте  $\delta_j$  совпадает либо с одной из БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ , либо с её отрицанием.*

*Доказательство.* Пусть  $\delta = \delta_1$  —  $m$ -регулярное множество, соответствующее системе ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$ , и пусть  $\delta_i = \delta_1 \oplus \alpha$ , где  $\nu(\alpha) = i - 1$ , для всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ . Из построения системы множеств  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$  следует, что каждое из них обладает требуемыми свойствами, связанными с можелированием ФАЛ из  $g$  с помощью БП.

Покажем теперь, что  $\Delta$  — покрытие куба  $B^q$ . Для этого возьмем произвольный набор из  $B^q$  вида  $(\beta, \gamma)$ , где  $\beta \in B^m$  и  $\gamma \in B^{q-m}$ , а по нему найдем в множестве  $\delta$  набор вида  $(\beta, \hat{\gamma})$ , который имеется в  $\delta$  в силу  $m$ -регулярности этого

множества. Следовательно,

$$(\beta, \gamma) = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \underbrace{(0, \dots, 0)}_m, \hat{\gamma} \oplus \gamma = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \alpha,$$

где  $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$ . Таким образом, система  $\Delta$  образует покрытие куба  $B^m$ .

С другой стороны, из  $m$ -регулярности  $\delta$  следует  $m$ -регулярность любого из множеств  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ , и поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{q-m}} |\delta_i| = 2^m 2^{q-m} = 2^q.$$

Следовательно, система  $\Delta$  образует разбиение куба  $B^q$ .

Лемма доказана.  $\square$

*Замечание.* Если в условиях леммы  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j-1)$ , то  $g_i \equiv x_{i+m}^{\alpha_j}$  на  $\delta_j$ .

Применим технику моделирования ФАЛ из ДУМ переменными для синтеза формул в стандартном базисе.

**Теорема 7.1** (ср. [14]). *Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , в  $\mathcal{U}^\Phi$  существует реализующая ее формула  $\mathcal{F}_f$ , для которой*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left( 1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right). \quad (7.1)$$

*Доказательство.* Пусть параметры  $m$ ,  $s$  и  $p$  удовлетворяют соотношениям

$$s \leq 2^m, \quad p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad m + p \cdot 2^s \leq n,$$

а  $G$  — стандартное ДУМ порядка  $m$  и высоты  $s$ , для которого  $|G| = \lambda \leq p \cdot 2^s$  (см. §6). Пусть, далее,  $q = m + \lambda$  и, следовательно,  $q \leq n$ , а  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^\lambda})$  — разбиение куба  $B^q$ , полученное по лемме 7.1 для системы ФАЛ  $\vec{G}$ .

Положим  $x' = (x_1, \dots, x_q)$  и заметим, что произвольная ФАЛ  $h$ ,  $h \in P_2(q)$ , на любой компоненте  $\delta_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , в силу ее  $m$ -регулярности совпадает с некоторой ФАЛ  $\hat{h}(x_1, \dots, x_m)$ . При этом ФАЛ  $\hat{h}$  равна дизъюнкции  $p$  ФАЛ из ДУМ  $G$ , каждая из которых в силу леммы 7.1 совпадает на  $\delta_i$  с буквой одной из БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ . Следовательно, ФАЛ  $h$  совпадает на  $\delta_i$  с ЭД ранга  $p$  от указанных БП.

Для ФАЛ  $f(x)$  из  $P_2(n)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  рассмотрим ее представление в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left( \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') f_{\sigma''}(x') \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \left( \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} J_{\sigma'',i}(x') \right), \quad (7.2) \end{aligned}$$

где  $\chi_i(x')$  — характеристическая ФАЛ множества  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ , а ЭД  $J_{\sigma'',i}$  ранга  $p$  от БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ , совпадает на  $\delta_i$  с ФАЛ  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ .

Построим для ФАЛ  $f$  на основе (7.2) формулу  $\tilde{\mathcal{F}}_f$  с поднятыми отрицаниями, которая имеет вид

$$\tilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \mathcal{F}_{n-q} \left( x'', J_{0,i}, \dots, J_{1,i} \right),$$

где  $\mathcal{F}_{n-q}(x'', y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$  — неповторная по информационным БП формула из леммы 2.3, реализующая ФАЛ  $\mu_{n-q}$ , а  $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , — совершенная ДНФ ФАЛ  $\chi_i$ .

Пусть, далее, формула  $\mathcal{F}_f$  получается из формулы  $\tilde{\mathcal{F}}_f$  оптимизацией ЭД по числу отрицаний, то есть заменой каждой ЭД  $J_{\sigma'',i}$  вида  $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \bar{x}_{j_{t+1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{j_p}$ , где  $t \leq p$ , формулой

$\widehat{J}_{\sigma'', i}$  вида  $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_p}}$ . Заметим, что число ФЭ  $\neg$  во всех формулах  $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , равно половине их суммарного ранга, что в каждой формуле вида  $\widehat{J}_{\sigma'', i}$  имеется один ФЭ  $\neg$ , и напомним (см. лемму 2.3), что  $R(\mathcal{F}_{n-q}) \leq 3 \cdot 2^{n-q}$  и  $L_{\neg}(\mathcal{F}_{n-q}) \leq 2^{n-q}$ . Следовательно, в силу леммы 2.1 главы 2,

$$L_{\&, \vee}(\mathcal{F}_f) \leq 2^{q-m} (q \cdot 2^m + (p-1)2^{n-q} + 3 \cdot 2^{n-q}), \quad (7.3)$$

$$L_{\neg}(\mathcal{F}_f) \leq q \cdot 2^{q-1} + 2^{n-m}. \quad (7.4)$$

Выбирая значения параметров  $m$  и  $s$  так, что

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor - 1, \quad s = \lfloor \log n - 2 \log \log n \rfloor - 1,$$

и подставляя эти значения в (7.3), (7.4), получим неравенство

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n - 2 \log \log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right),$$

из которого для сложности формулы  $\mathcal{F}_f$  следует оценка (7.1).

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Из (7.1) с учётом нижних оценок следствия из теоремы 5.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

## §8 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых классов

Заметим сначала, что асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ из §6 без существенных изменений переносится на класс контактно-вентильных схем (КВС), в которых наряду с контактами можно использовать «вентили», то есть ориентированные ребра, проводящие только в направлении своей



ориентации. Действительно, для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , реализующая ее  $(1, 1)$ -КВС  $\tilde{\Sigma}_f$  может быть получена на основе разложения (4.5) так же, как и СФЭ  $\Sigma_f$  из теоремы 6.1. Она является результатом корректной суперпозиции вида  $\tilde{\Sigma}_f = \Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  —  $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП  $x''$ , а  $(1, 2^{n-q})$ -КВС  $\Sigma'$  реализует систему всех ФАЛ вида  $f_{\sigma''}(x')$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ . При этом схема  $\Sigma'$  по-прежнему содержит в качестве подсхемы  $(1, \lambda)$ -КС  $\Sigma_G$ , реализующую систему ФАЛ  $\vec{G}$  на основе леммы 1.2, и реализует каждую ФАЛ  $g(x')$  типа  $f_{\sigma''}(x')$  на основе ее представления (6.1) в виде дизъюнкции  $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$  с помощью присоединения входов вентилярной звезды порядка  $p$  к соответствующим выходам КС  $\Sigma_G$  (см. рис. 8.1a), которое является корректной суперпозицией. Сложность построенной КВС  $\tilde{\Sigma}_f$  при тех же значениях параметров, что и в теореме 6.1, будет удовлетворять неравенству (6.5).

Напомним (см. §6), что в силу специфики стандартного ДУМ  $G$  вместо представления (6.1) для ФАЛ  $g$  можно использовать эквивалентное (6.1) представление (6.2) вида

$$g = \psi_1 \cdot g_1 \vee \dots \vee \psi_p \cdot g_p \quad (8.1)$$

и на его основе реализовать ФАЛ  $g$  с помощью корректной суперпозиции т.н. итеративно-контактных схем, показанной на рис. 8.1b, где ФАЛ  $\psi_1, \dots, \psi_p$  управляют проводимостью соответствующих контактов. Асимптотически наилучший метод синтеза КС связан с «моделированием» этой суперпозиции и представления (8.1) на компонентах подходящего  $m$ -регулярного разбиения куба  $B^{m+p}$ .

Пусть  $\delta$  —  $m$ -регулярное множество наборов куба  $B^{m+p}$ , соответствующее системе ФАЛ  $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_p)$  (см. рис. 8.2a), а  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^p})$  — построенное для нее по лемме 7.1 разбиение куба  $B^{m+p}$ . Заметим, что любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m+p)$ ,

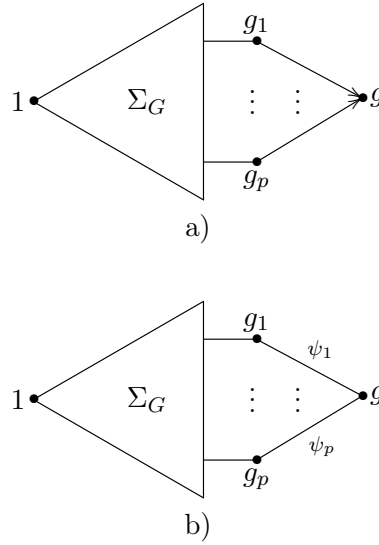


Рис. 8.1: Корректная реализация дизъюнкции ФАЛ  $g_1, \dots, g_p$  в классах КВС и ИКС

на любой компоненте этого разбиения вида  $\check{\delta} \oplus \alpha$ , где

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+p}),$$

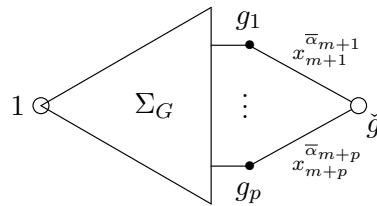
совпадает с ФАЛ

$$\check{g} = x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \dots \vee x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}} \cdot g_p, \quad (8.2)$$

где  $g_i = g\psi_i \in G^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . При этом ФАЛ  $\check{g}$  может быть реализована в результате операции присоединения звезды из контактов вида  $x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}}, \dots, x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}}$  к выходам  $(1, \lambda)$ -КС  $\Sigma_G$ , реализующей систему ФАЛ  $\vec{G}$ , так, как это показано на рис. 8.2b. Заметим также, что указанная операция суперпозиции является корректной на множестве наборов  $\check{\delta} \oplus \alpha$

	$x_1 \dots x_{m-1} x_m$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\dots$	$\psi_p$
$\pi_1$	0 $\dots$ 0 0	1	0		0
	0 $\dots$ 0 1	1	0	$\dots$	0
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$\dots$	1	0		0
$\pi_2$	$\dots$	0	1		0
	$\dots$	0	1	$\dots$	0
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$\dots$	0	1		0
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\pi_p$	$\dots$	0	0		1
	$\dots$	0	0	$\dots$	1
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	1 $\dots$ 1 1	0	0		1

a)



b)

Рис. 8.2:  $m$ -регулярное множество  $\check{\delta}$  и связанная с ним суперпозиция КС

в силу того, что из контактов присоединяемой  $(p, 1)$ -КС на любом наборе этого множества проводит только один.

**Теорема 8.1** (ср. [14]). *Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая ее КС  $\Sigma_f$  такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (8.3)$$

*Доказательство.* Пусть  $q = m + p$ , а  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^p})$  — описанное выше разбиение куба  $B^q$ , с помощью которого ФАЛ  $f$  можно представить в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^p} \chi_i(x') \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \check{g}_{\sigma'', i}(x'), \quad (8.4)$$

где  $\chi_i$  — характеристическая ФАЛ  $\delta_i$ , а в качестве ФАЛ  $f_{\sigma'', i}$  при всех  $\sigma'', \sigma'' \in B^{n-q}$ , и  $i, i \in [1, 2^p]$ , берется ФАЛ  $\check{g}_{\sigma'', i}$  вида (8.2), совпадающая с ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$  на компоненте  $\delta_i = \check{\delta} \oplus \alpha$ .

Пусть  $\Sigma_G$  —  $(1, \lambda)$ -КС, которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}$  по их совершенным ДНФ на основе контактного дерева (см. лемму 1.2 и оценку (1.2)). Для каждого  $i, i = 1, \dots, 2^p$ , построим  $(1, 2^{n-q})$ -КС  $\Sigma'_i$  (см. рис. 8.3а), которая содержит КС  $\Sigma_G$  в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ  $\check{g}_{\sigma'', i}$  вида (8.2) с помощью корректной на множестве наборов  $\delta_i$  суперпозиции, показанной на рисунке 8.2б. Пусть, далее,  $(1, 2^{n-m})$ -КС  $\Sigma'$  получается в результате отождествления входов у построенных выше КС  $\Sigma'_i, i \in [1, 2^p]$ , и реализует систему из всех ФАЛ вида  $\check{g}_{\sigma'', i}$ , где  $\sigma'' \in B^{n-q}, i \in [1, 2^p]$ . Заметим, что при этом выполняются неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_G) &\leq \lambda 2^{m+1}, \\ L(\Sigma'_i) &\leq L(\Sigma_G) + p 2^{n-q}, \\ L(\Sigma') &\leq p 2^{n-m} + \lambda 2^{q+1}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

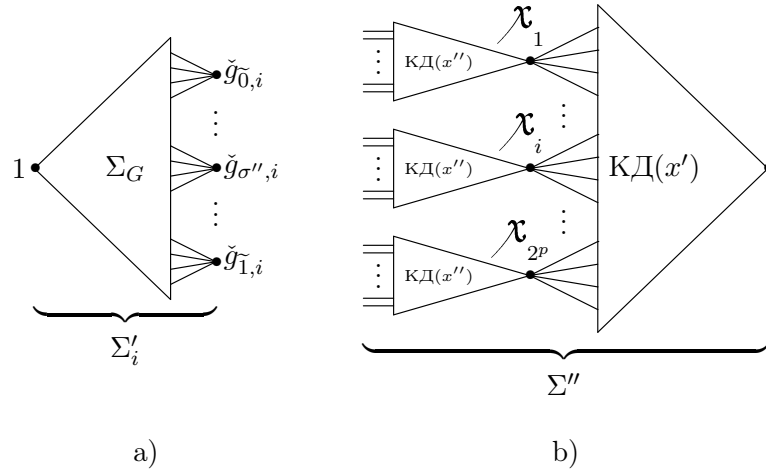


Рис. 8.3: к доказательству теоремы 8.1

Построим, наконец, каскадную  $(2^{n-m}, 1)$ -КС  $\Sigma''$ , которая реализует столбец из всех ФАЛ вида  $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$ , где  $i \in [1, 2^p]$  и  $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n) \in B^{n-q}$ . Эта КС получается в результате объединения  $2^p$  схем типа  $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП  $x''$ , к выходам которых присоединены входы  $(2^p, 1)$ -КС, реализующей столбец из ФАЛ  $\chi_i, i \in [1, 2^p]$ , и получающейся из  $(2^q, 1)$ -КД от БП  $x'$  в результате соответствующего отождествления входов (см. рис. 8.3b). Легко видеть, что при этом

$$L(\Sigma'') \leq 2^{q+1} + 2^{n-m+1}. \quad (8.6)$$

Искомая КС  $\Sigma_f$  является результатом корректной стыковки вида  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ , полученной в результате присоединения входов КС  $\Sigma''$  к выходам КС  $\Sigma'$  в соответствии с представлением (8.4), сложность которой, в силу (8.5)–(8.6),

удовлетворяет неравенству

$$L(\Sigma_f) \leq (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}.$$

Из этого неравенства при

$$m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor \quad \text{и} \quad s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil,$$

при которых выполнены условия

$$s \leq 2^m, \quad p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil \quad \text{и} \quad q = m + p \leq n,$$

вытекает неравенство (8.3) для сложности  $\Sigma_f$ , так как

$$\begin{aligned} (p+2)2^{n-m} &\leq \frac{2^n}{s} + 3 \cdot 2^{n-m} = \frac{2^n}{n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right), \\ (\lambda+1)2^{q+1} &\leq p2^s \cdot 2^{m+p+2} \leq \frac{2^{2m+s+p+3}}{s} \leq \\ &\leq \frac{32}{s} 2^{n-\sqrt{n}+3\log n} = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Из (8.3) с учетом нижней оценки (5.13) вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

*Замечание.* Построенную КС  $\Sigma_f$  можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda+1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа. Для этого достаточно контакты всех звезд, показанных на рис. 8.2b, перераспределить в звезды из однотипных контактов, «центрами» которых являются выходы подсхем  $\Sigma_G$  схем  $\Sigma'_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ , а любой из остальных контактов КС  $\Sigma_f$  считать отдельной звездой.

Описанные в §§6, 7, 8 асимптотически наилучшие методы синтеза схем ориентированы, вообще говоря, на произвольную или самую «сложную» ФАЛ. Тем не менее, во многих случаях они служат основой асимптотически наилучших методов синтеза СФЭ и КС для ФАЛ из заданного специального класса  $\mathcal{Q}$  и позволяют установить для этого класса «стандартные» (см. (5.20) и (5.21)) асимптотики вида

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) \sim L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}{\log |\mathcal{Q}(n)|}. \quad (8.7)$$

Заметим, что асимптотики (8.7) устанавливаются, как правило, путем сведения задачи синтеза СФЭ или КС для любой ФАЛ из  $\mathcal{Q}(n)$  к задаче синтеза соответствующей схемы для системы из одной или нескольких произвольных ФАЛ от меньшего числа БП. При этом требуется, чтобы двоичный логарифм числа тех систем ФАЛ, к реализации которых сводится реализация ФАЛ из  $\mathcal{Q}(n)$ , был асимптотически равен  $\log |\mathcal{Q}(n)|$ , а сложность вспомогательных ФАЛ, обеспечивающих данное сведение, была бы существенно меньше правой части (5.20) или (5.21).

Возьмем в качестве примера введенный выше класс ФАЛ  $\mathcal{Q}$ , состоящий из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП, и докажем, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \lesssim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n},$$

то есть, с учетом (5.22), установим для него асимптотику (8.7) вида

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Действительно, разлагая ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  из  $\mathcal{Q}(n)$  по БП  $x_1, x_2$ , получим

$$f(x_1, x_2, x') = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2) \in B^2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f_{\sigma_1, \sigma_2}(x'), \quad (8.8)$$

где  $x' = (x_3, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma_1, \sigma_2}(x') = f_{\sigma_1, \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2, x')$ , причем  $f_{01} = f_{10}$  в силу симметричности ФАЛ  $f$  по БП  $x_1, x_2$ . Искомая СФЭ  $\Sigma_f$  реализует ФАЛ  $f$  в соответствии с (8.8) и имеет вид  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  — мультиплексорная СФЭ порядка 2 от адресных БП  $x_1, x_2$ , а СФЭ  $\Sigma'$  от БП  $x'$  реализует асимптотически наилучшим способом ФАЛ  $f_{00}, f_{01} = f_{10}$  и  $f_{11}$  от БП  $x'$ . Легко видеть, что сложность построенной схемы  $\Sigma_f$  асимптотически не больше, чем  $\frac{3}{4} \frac{2^n}{n}$ . Аналогичным образом доказывается, что

$$L^K(Q(n)) \sim \frac{3}{4} \frac{2^n}{n}.$$

### §9 Синтез схем для некоторых дешифраторов и мультиплексоров. Поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ.

Применим технику моделирования ФАЛ переменными для синтеза некоторых дешифраторов и мультиплексоров.

**Лемма 9.1** (ср. [14]). *Для  $n = 1, 2, 3, \dots$  выполняются неравенства*

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right), \quad (9.1)$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right). \quad (9.2)$$

*Доказательство.* Выберем параметры  $m, q$  и  $\lambda$  так, что

$$\lambda = 2^m, \quad q = m + \lambda \quad \text{и} \quad q \leq n,$$

а затем рассмотрим  $m$ -регулярное множество наборов  $\delta_1$  куба  $B^q$  от БП  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ , связанное с системой ФАЛ  $\vec{Q}_m(x_1, \dots, x_m)$ , которая состоит из всех ЭК вида  $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ , где  $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = j - 1, j \in [1, \lambda]$ .



Построим для этой системы по лемме 7.1 разбиение  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$  куба  $B^q$  и заметим, что любая ЭК  $K(x') = x_1^{\sigma_1} \cdots x_q^{\sigma_q}$ , где  $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \delta_i$ , совпадает на множестве  $\delta_i$  с одной из ЭК системы  $\vec{Q}_m$ , то есть совпадает на нем с буквой  $x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}$ , где  $m+1 \leq j_{\sigma'} \leq q$ ,  $\alpha_{\sigma'} \in B$ . Заметим, что в силу указанных выше свойств разбиения  $\Delta$  любая ЭК  $K = x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ , где  $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \delta_i$ ,  $1 \leq i \leq 2^\lambda$ , может быть представлена в виде

$$K = \chi_i(x') \cdot x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} \cdot K_{\sigma''}(x''), \quad (9.3)$$

где  $x'' = (x_q + 1, \dots, x_n)$ ,  $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)$ .

Пусть, далее,  $(1, 2^\lambda)$ -КС  $\Sigma' = \Sigma'(a; b_1, \dots, b_{2^\lambda})$  реализует строку из ФАЛ  $\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_{2^\lambda})$ , где  $\chi_i(x')$  — характеристическая ФАЛ множества  $\delta_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , и получается в результате отождествления входов у схем  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{2^\lambda}$ , где  $\pi$ -схема  $\Sigma'_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , построена по лемме 1.2 для ФАЛ  $\chi_i$ , и является ККС сложности не больше, чем  $q \cdot 2^m$ , с входом  $a_i = a$  и выходом  $b_i$  — корнем соответствующего КД (см. рис. 9.1).

Искомая  $(1, 2^n)$ -КС  $\Sigma_n^{(\&)}$  реализует каждую ЭК из  $\vec{Q}_n$  в соответствии с (9.3), имеет вид, показанный на рис. 9.1, и является ККС.

Полагая

$$m = \lceil \log n \rceil - 2,$$

получим, что

$$\lambda = 2^m \leq \frac{n}{2}, \quad q = m + \lambda \leq n.$$

При этом сложность построенной  $(1, 2^n)$ -КС  $\Sigma_n^{(\&)}$ , являющейся контактным дешифратором порядка  $n$ , удовлетворяет неравенствам:

$$L\left(\Sigma_n^{(\&)}\right) \leq \lambda 2^{n-m} + 2^{n-m+1} + q 2^q \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

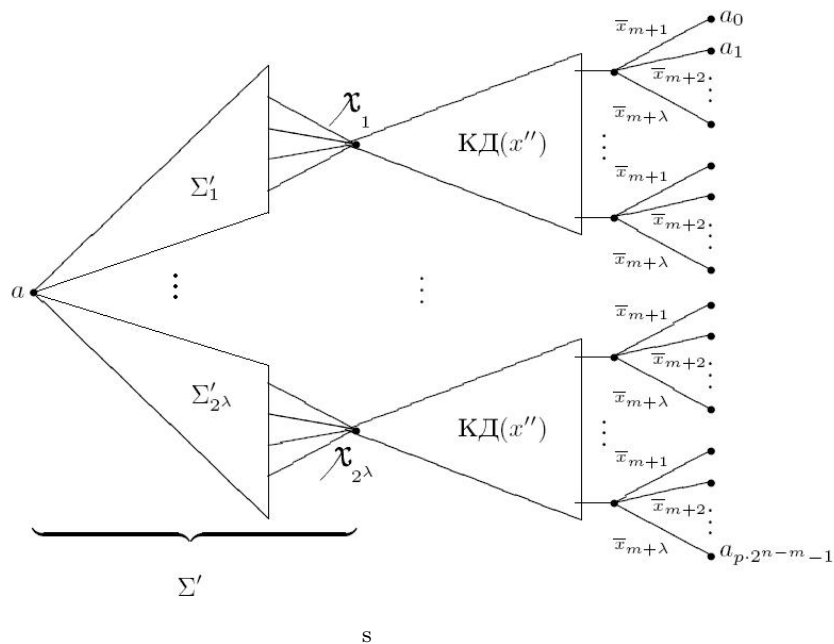


Рис. 9.1: к доказательству леммы 9.1

из которых вытекает неравенство (9.1).

Искомая  $(1, 2^n)$ -КК  $\Sigma_n^{(\vee)}$ , являющаяся дизъюнктивным контактным дешифратором порядка  $n$ , сложность которого удовлетворяет оценке (9.2), получается в результате перехода от КК  $\Sigma_n^{(\&)}$  к инверсной КК.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.** Оценки леммы 9.1, следствия из леммы 2.2 и следствия из леммы 2.4 дают асимптотические равенства

$$L^K(\vec{Q}_n) \sim 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

**Лемма 9.2.** Для  $n = 1, 2, \dots$  выполняются неравенства

$$L^\pi(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right), L^C(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right), \\ D(\mu_n) \leq n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ  $\mu_n$  и неповторная по информационным БП формула  $\mathcal{M}_n$  с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит  $7 \cdot 2^n$ .

*Доказательство.* Искомая  $\pi$ -схема  $\Sigma_n$  получается в результате присоединения к каждому из выходов  $(1, 2^n)$ -КС  $\Sigma_n^{(\&)}$ , построенной при доказательстве леммы 9.1, контакта соответствующей ему информационной БП и отождествления концевых вершин всех таких контактов в выходную вершину  $\Sigma_n$ . Искомая СФЭ  $S_n$  получается из формулы с поднятыми отрицаниями  $\mathcal{F}_n$ , которая моделирует  $\pi$ -схему  $\Sigma_n$  (см. §4 гл. 2), в результате применения операций приведения (см. §1) для вершин, соответствующих ФЭ  $\neg$ .

Для завершения доказательства леммы на основе разбиения  $\Delta$ , введенного в лемме 9.1, и представления (9.3) построим для ФАЛ  $\mu_n$  формулу  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  следующим образом

$$\tilde{\mathcal{F}}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \& \bigwedge_{\sigma'' \in B^{n-q}} \left( J_{\bar{\sigma}''}(x'') \vee \bigvee_{\sigma' \in \delta_i} x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} y_{\nu(\sigma', \sigma'')} \right) \quad (9.4)$$

где  $\mathfrak{A}_i$  — совершенная ДНФ ФАЛ  $\chi_i$ ,  $i = 1, \dots, \lambda$ , и  $J_{\bar{\sigma}''}(x'') = \bar{K}_{\sigma''}(x'')$ . Легко видеть, что  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_n$ , неповторна по БП  $y_0, \dots, y_{2^n-1}$  и что  $\text{Alt}(\tilde{\mathcal{F}}_n) \leq 3$ .

Пусть, далее, формула  $\mathcal{M}_n$  получается в результате оптимизации формулы  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  по глубине. Тогда при

$$n \geq 3 \text{ и } m = \left\lceil \log \left( \frac{n}{3} \right) \right\rceil$$

сложность и глубина  $\mathcal{M}_n$  будут удовлетворять условиям леммы. Действительно, если<sup>1</sup>  $n \geq 6$ , то  $q \leq n - m$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} R(\tilde{\mathcal{F}}_n) &= 2^{q-m} (q \cdot 2^m + 2^{n-q} ((n-q) + 2^{m+1})) \leq \\ &\leq 2^{n+1} + n \cdot 2^{n-m} \leq 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n = 5 \cdot 2^n. \end{aligned}$$

При этом, очевидно,

$$L_{-}(\tilde{\mathcal{F}}_n) \leq \frac{1}{2} (R(\tilde{\mathcal{F}}_n) - 2^n) \leq 2^{n+1}$$

и, таким образом,

$$L(\tilde{\mathcal{F}}_n) \leq R(\tilde{\mathcal{F}}_n) + L_{-}(\tilde{\mathcal{F}}_n) - 1 \leq 7 \cdot 2^n - 1,$$

откуда в силу теоремы 2.1 главы 2 следует, что  $D(\mathcal{M}_n) \leq n + 6$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.** Из полученных оценок в силу следствий из леммы 2.5 вытекает, что

$$L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}, \quad D(\mu_n) = n + O(1).$$

Применяя технику моделирования ФАЛ из  $\vec{P}_2(q)$  переменными и используя построенную в лемме 9.1 формулу  $\mathcal{M}_n$ , докажем следующее утверждение.

**Теорема 9.1.** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , в  $\mathcal{U}^\Phi$  существует реализующая ее формула  $\mathcal{F}_f$ , для которой

$$D(\mathcal{F}_f) \leq n - \log \log n + O(1). \quad (9.5)$$

<sup>1</sup>Случай  $n \leq 5$  рассматриваются отдельно.

*Доказательство.* Пусть параметры  $m$ ,  $q$  и  $\lambda$  удовлетворяют соотношениям

$$\lambda = 2^{2^m}, \quad q = m + \lambda \leq n, \quad (9.6)$$

а  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^\lambda})$  — разбиение куба  $B^q$ , полученное по лемме 7.1 для системы ФАЛ  $\vec{P}_2(m)$ .

Положим  $x' = (x_1, \dots, x_q)$  и заметим, что произвольная ФАЛ  $h$ ,  $h \in P_2(q)$ , на любой компоненте  $\delta_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , в силу ее  $m$ -регулярности совпадает с некоторой ФАЛ  $\tilde{h}(x_1, \dots, x_m)$ , которая, в свою очередь, в силу леммы 7.1 совпадает на  $\delta_i$  с буквой одной из БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ .

Для ФАЛ  $f(x)$  из  $P_2(n)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  рассмотрим ее представление в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left( \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') f_{\sigma''}(x') \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \left( \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} u_{\sigma'',i} \right), \end{aligned} \quad (9.7)$$

где  $\chi_i(x')$  — характеристическая ФАЛ множества  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ , а буква  $u_{\sigma'',i} = x_{j_{\sigma'',i}}^{\beta_{\sigma'',i}}$  при некоторых  $m+1 \leq j_{\sigma'',i} \leq q$  и  $\beta_{\sigma'',i} \in B$  совпадает на  $\delta_i$  с ФАЛ  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ .

Построим для ФАЛ  $f$  на основе (9.7) формулу  $\tilde{\mathcal{F}}_f$  с поднятыми отрицаниями, которая имеет вид

$$\tilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \mathcal{M}_{n-q} \left( x'', u_{\bar{0},i}, \dots, u_{\bar{1},i} \right),$$

где  $\mathcal{M}_{n-q}(x'', y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$  — неповторная по информационным БП формула из леммы 9.2, реализующая ФАЛ  $\mu_{n-q}$ ,

а  $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , — совершенная ДНФ ФАЛ  $\mathfrak{X}_i$ . Заметим, что при этом (см. доказательство леммы 9.2) выполняются соотношения

$$R(\tilde{\mathcal{F}}_f) \leq q \cdot 2^q + 2^\lambda R(\mathcal{M}_{n-q}) \leq 2^\lambda (q \cdot 2^m + 5 \cdot 2^{n-q}), \quad (9.8)$$

$$\text{Alt}(\tilde{\mathcal{F}}_f) \leq 5. \quad (9.9)$$

Пусть, далее, формула  $\mathcal{F}_f$  получается из формулы  $\tilde{\mathcal{F}}_f$  оптимизацией по глубине (см. теорему 2.1 гл. 2). Тогда для нее согласно указанной теореме и оценкам (9.8), (9.9) будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} D(\mathcal{F}_f) &\leq \left\lceil \log \left( 2R(\tilde{\mathcal{F}}_f) \right) \right\rceil + \text{Alt}(\tilde{\mathcal{F}}_f) \leq \\ &\leq \lambda + n - q + \left\lceil \log(5 + q \cdot 2^{n+q-m}) \right\rceil + 5, \end{aligned}$$

последнее из которых при  $m = \lfloor \log(\log n - 2) \rfloor$  дает (9.5), поскольку условия (9.6) при этом выполняются.  $\square$

**Следствие.** Для  $n = 1, 2, \dots$ , с учетом следствия из теоремы 5.1 справедливо равенство

$$D(n) = n - \log \log n \pm O(1).$$

## Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.



- // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.
- [18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.
- [19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [20] *Низматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [26] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

- 
- [28] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [29] Яблонский С. В. Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [30] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [31] Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.
- [32] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [33] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [34] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.